

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-3-351-363

О КОЛЕБАНИЯХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ*

© 2022 г.

Ватульян А.О., Юров В.О.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

aovatulyan@sfnedu.ru, vyurov@sfnedu.ru

Поступила в редакцию 08.07.2022

Исследованы задачи об установившихся колебаниях функционально-градиентных электроупругих стержней для двух типов поляризации. Функциональная градиентность характеризуется изменением вдоль продольной координаты изотермической упругой податливости и пьезоэлектрического модуля. В статье использованы линейный, квадратичный и экспоненциальный законы неоднородности. Для моделирования затухания используется модель стандартного вязкоупругого тела, которая применяется в рамках концепции комплексных модулей. Для численного решения поставленных задач применен метод стрельки. В целях верификации вычислительной схемы построено точное решение задачи для случая постоянных свойств. Анализ влияния законов неоднородности проведен для законов, имеющих одинаковые среднеинтегральные значения. Построены амплитудно-частотные характеристики тока и проводимости. Исследованы антирезонансы, установлено наличие двух различных типов в зависимости от законов неоднородности. Проведен асимптотический анализ задачи для случая низких частот. Показано, что в низкочастотном диапазоне механическое продольное напряжение зависит только от закона изменения пьезоэлектрического модуля, перемещение при этом зависит и от закона изменения упругой податливости. В результате вычислительных экспериментов выявлены особенности строения амплитудно-частотной характеристики тока в окрестности второго резонанса, который обладает различной добротностью в зависимости от того, одинаковый или различный типы монотонности имеют функции податливости и пьезоэлектрического модуля. Выявлено, что первый резонанс из рассматриваемого частотного диапазона имеет низкую чувствительность к законам неоднородности, а третий резонанс имеет достаточную чувствительность к законам неоднородности и может быть использован для определения типа монотонности при решении обратных задач по реконструкции свойств.

Ключевые слова: функционально-градиентный материал, электроупругость, колебания, неоднородность, затухание, резонанс, антирезонанс, ток, проводимость.

*Выполнено за счет гранта РФФИ №22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>.

Введение

Область использования различных устройств, в основе работы которых лежит пьезоэффект, с каждым годом расширяется. В технику внедряются различного рода датчики, преобразователи, пьезотрансформаторы, пьезодвигатели и другие устройства. Для улучшения качества работы таких устройств (в частности, для увеличения коэффициента электромеханической связи) применяются новые пьезоматериалы, выбираются нестандартные электродные покрытия [1] и используется неоднородная поляризация [2]. Отметим, что неоднородность поляризации может возникать как на этапе изготовления пьезоэлемента, так и в процессе эксплуатации в неоднородном температурном поле; например, с учетом располяризации пьезоэлемента или его части при нагревании выше точки Кюри. Для правильного расчета актуальных характеристик пьезопреобразователя, во-первых, необходимо осуществлять исследование в рамках моделей для функционально-градиентных (ФГ) материалов (ФГ-материалов), что приводит к анализу некоторых спектральных краевых задач для операторов с переменными коэффициентами. Во-вторых, необходимо знание функций, характеризующих неоднородность свойств. В первой части настоящего исследования предлагается формулировка краевой задачи, описывающей колебания пьезостержня из ФГ-материала, расчет искомых характеристик – резонансных и антирезонансных частот, тока в цепи, коэффициента электромеханической связи. Представлен способ численного анализа искомых характеристик для произвольных законов неоднородности, опирающийся на метод пристрелки. В-третьих, многие из современных пьезоактивных ФГ-материалов в качестве компонентов связующего содержат полимерные добавки, придающие материалу реологические свойства, которые необходимо учитывать при совершенствовании моделей. Кстати, как свидетельствуют результаты экспериментов, учет неоднородности свойств может помочь в развитии и совершенствовании моделей, учитывающих располяризацию.

В статье [3] представлен обзор, касающийся исследований структурных элементов из ФГ-пьезоматериалов. Отмечено, что при моделировании неоднородности обеспечивается переход упругих свойств одного материала к свойствам другого по степенному, экспоненциальному или сигма-образному законам. В обзор вошли публикации, учитывающие размерный эффект, нелинейные колебания.

В статье [4] исследованы колебания слоистой электроупругой балки при наличии затухания, в которой слои отличаются направлением поляризации. Выполнено сравнение точного решения двумерной задачи и решения по приближенной теории, учитывающей сдвиговые деформации. Выполнен расчет амплитуд и фаз в низкочастотном диапазоне. Показано кусочно-непрерывное распределение напряжений по поперечному сечению балки. Композитная балка с системой пьезоактуаторов-сенсоров рассмотрена в [5], учтено затухание и различная ориентация волокон, проведен анализ колебаний конца консольной балки. В [6] рассмотрены статические и динамические задачи для шарнирно опертой балки из ФГ-материала с электроупругим покрытием.

Контекст исследования колебаний балок довольно широк. Так, в [7] изучается аспект переменности площади поперечного сечения, в [8, 9] – затухание в рамках концепции комплексных модулей, в [10] – упругое закрепление концов, в [11] – задача о колебаниях и устойчивости колонны совместно с контролирующим пьезоэлементом. Учет пористости и наноразмеров осуществлен в рамках градиентной модели в статье [12], микромасштабная модель балки Тимошенко исследована в [13].

В [14] изучаются колебания балки при наличии системы эллиптических пьезовключений, а нелинейные колебания изучены в [15, 16].

В статье [17] на основе двумерной модели анализируются пьезоэлектрические структуры при учете гидротермоэлектромеханических связей. Предполагается, что коэффициенты упругости линейно зависят от температуры и влажности. Статические и динамические реакции пьезоэлектрических балок исследованы при различных гидротермических условиях. Обсуждено влияние коэффициентов демпфирования и гидротермических параметров на обобщенные смещения и собственные частоты накопителя энергии.

В настоящей статье исследованы задачи об установившихся колебаниях функционально-градиентных электроупругих стержней при продольной и поперечной поляризации с учетом затухания и изменения изотермической упругой податливости и пьезоэлектрического модуля вдоль продольной координаты.

1. Поперечная поляризация пьезоэлектрического ФГ-стержня

Рассмотрим колебания пьезоэлектрического стержня длиной l со свободными от напряжений торцами, ориентированного вдоль оси x_1 , с электродами, нанесенными на торцах перпендикулярно оси x_3 (поперечное сечение стержня – прямоугольник со сторонами b, h). Колебания вызываются подведением к электродам разности потенциалов, что в рамках одномерной модели эквивалентно созданию во всем объеме стержня электрического поля с компонентами $E_1 = E_2 = 0, E_3 = E(t)$. В предположении одномерности задачи уравнения состояния имеют вид [2]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = s_{11}(x_1)\sigma_{11} + d_{31}(x_1)E(t), \quad D_3 = d_{31}(x_1)\sigma_{11} + \varepsilon_{33}E(t), \quad D_1 = 0, \quad (1)$$

где u_1 – осевые смещения, σ_{11} – осевые напряжения, $s_{11}(x_1)$ – изотермическая упругая податливость; ε_{33} – диэлектрическая проницаемость (считается постоянной); $d_{31}(x_1)$ – пьезоэлектрический модуль, зависящий от x_1 ; D_1, D_3 – компоненты вектора электрической индукции. Отметим, что подобная задача при не зависящем от координаты x_1 пьезомодуле рассмотрена в [18]. Сформулируем уравнение колебаний, составленное относительно напряжения, отличное от приведенных в [18] и [2]. Дифференцируя уравнение движения по x_1 и используя (1), получим уравнение колебаний пьезоэлектрического ФГ-стержня:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} [s_{11}(x_1)\sigma_{11} + d_{31}(x_1)E(t)]. \quad (2)$$

Здесь ρ – плотность материала стержня. Для этого уравнения сформулируем граничные условия: $\sigma_{11}(0) = \sigma_{11}(l) = 0$. Заметим, что уравнение электростатики $\operatorname{div} D = 0$ в этом случае выполнено автоматически, а ток в цепи определяется через найденное напряжение из соотношения

$$I(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^l d_{31}(x_1)\sigma_{11} dx_1 + \varepsilon_{33}E(t)l \right] b.$$

Получим замкнутую задачу для нахождения тока в цепи, анализ этой характеристики позволит находить и изучать влияние пьезохарактеристик на резонансные и антирезонансные частоты.

Изучим далее задачу при частотном возбуждении, полагая $E(t) = E_0 \exp(i\omega t)$. Введем соответствующие амплитуды $\sigma(x_1, t) = \sigma_0(x_1) \exp(i\omega t)$, $I(t) = I_0 \exp(i\omega t)$, безразмерную координату $y = x_1 l^{-1}$ и безразмерные функции и параметры

$$f_1(y) = d_{31}(yl)(d_{31}^*)^{-1}, \quad f_2(y) = s_{11}(yl)(s_{11}^*)^{-1}, \quad \kappa^2 = \rho\omega^2 l^2 s_{11}^*, \quad k^2 = (d_{31}^*)^2 (\varepsilon_{33} s_{11}^*)^{-1},$$

$$U = u_1 l^{-1} (d_{31}^* E_0)^{-1}, \quad T = \sigma_0 s_{11}^* (d_{31}^* E_0)^{-1},$$

где s_{11}^* , d_{31}^* – характерные податливость и пьезомодуль.

Приведем значение тока в цепи к безразмерному виду, получим

$$J = i\kappa c k^2 \left[\int_0^1 f_1(y) T(y, \kappa) dy + k^{-2} \right], \quad c = \frac{b\varepsilon_{33} E_0}{I_0^* \sqrt{\rho s_{11}^*}},$$

где I_0^* – характерная величина тока в цепи.

Таким образом, исходя из первоначальной постановки (2), имеем каноническую систему дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} U'(y, \kappa) = f_2(y) T(y, \kappa) + f_1(y), \\ T'(y, \kappa) = -\kappa^2 U(y, \kappa), \end{cases} \quad T(0, \kappa) = T(1, \kappa) = 0. \quad (3)$$

Отметим, что при $f_1(y) = 0$ имеем обычную задачу о колебаниях упругого ФГ-стержня, исследованную в [19].

Для решения краевой задачи (3) и нахождения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) возможны два подхода. Первый опирается на сведение задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и анализу его дискретного аналога, как это реализовано в [20], а второй подход основан на методе пристрелки и требует решения двух краевых задач.

Первая задача для нахождения частного решения неоднородной задачи имеет вид:

$$\begin{cases} U'_0(y, \kappa) = f_2(y) T_0(y, \kappa) + f_1(y), \\ T'_0(y, \kappa) = -\kappa^2 U_0(y, \kappa), \end{cases} \quad T_0(0, \kappa) = 0, \quad U_0(0, \kappa) = 0. \quad (4)$$

Вторая задача состоит в решении краевой задачи

$$\begin{cases} U'_1(y, \kappa) = f_2(y) T_1(y, \kappa) \\ T'_1(y, \kappa) = -\kappa^2 U_1(y, \kappa) \end{cases} \quad T_1(0, \kappa) = 0, \quad U_1(0, \kappa) = 1. \quad (5)$$

Решение исходной задачи ищется в виде $U(y, \kappa) = U_0(y, \kappa) + cU_1(y, \kappa)$, причем параметр c определяется из условия $T(1, \kappa) = T_0(1, \kappa) + cT_1(1, \kappa) = 0$.

Введем безразмерную проводимость $Z = c_2/J$. Значения κ , для которых $Z = 0$, определяют частоты резонанса ($J \rightarrow \infty$), а те, при которых $Z \rightarrow \infty$, определяют частоты антирезонанса ($J = 0$).

Анализ решения в случае постоянных характеристик

Рассмотрим краевую задачу (3) при $f_1(y) = f_2(y) = 1$. Сведем ее к краевой задаче для уравнения второго порядка $T'' = -\kappa^2 U' = -\kappa^2 (T + 1)$, $T(0) = T(1) = 0$.

Ее решение имеет вид

$$T = \sin(\kappa y) \frac{1 - \cos \kappa}{\sin \kappa} + \cos(\kappa y) - 1, \quad (6)$$

а ток с точностью до постоянного размерного множителя выражается формулой

$$I = \kappa \left(\int_0^1 T dy + k^{-2} \right) = \kappa \left(2 \frac{1 - \cos \kappa}{\kappa \sin \kappa} - 1 + k^{-2} \right) = \kappa \left(\frac{2}{\kappa} \operatorname{tg} \frac{\kappa}{2} - 1 + k^{-2} \right). \quad (7)$$

Резонанс возникает при $\cos(\kappa/2) = 0$, $\kappa = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$, а антирезонансы определяются корнями некоторого трансцендентного уравнения [18].

Асимптотика задачи (3) при малых κ

Пусть $\lambda = \kappa^2$ мало. Воспользуемся разложением по малому параметру и сформулируем задачи при одинаковых степенях λ :

$$\begin{aligned} U &= U_0 + \lambda U_1 + \lambda^2 U_2, \\ T &= T_0 + \lambda T_1 + \lambda^2 T_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Задачи при нулевой и первой степенях имеют, соответственно, вид

$$U'_0 = f_2 T_0 + f_1, \quad T'_0 = 0, \quad T_0(0) = T_0(1) = 0, \quad (9)$$

$$U'_1 = f_2 T_1, \quad T'_1 = -U_0, \quad T_1(0) = T_1(1) = 0. \quad (10)$$

Используя граничные условия, получим, что

$$T_0 = 0, \quad U'_0 = f_1, \quad U_0 = \int_0^y f_1(\xi) d\xi + c_0,$$

а используя второе уравнение (10), получим, что

$$T_1 = -\int_0^y (y - \xi) f_1(\xi) d\xi - c_0 y + c_1.$$

Из граничных условий находим $c_1 = 0$, $c_0 = -\int_0^1 (1 - \xi) f_1(\xi) d\xi$. В результате $T_1 = y \int_0^1 (1 - \xi) f_1(\xi) d\xi - \int_0^y (y - \xi) f_1(\xi) d\xi$ и можно сделать вывод, что из двух функций, характеризующих неоднородность, только функция $f_1(y)$ оказывает влияние на напряжение и ток при малых частотах, а смещение зависит и от функции $f_2(y)$:

$$U_1 = \int_0^y f_2(\eta) \left[\eta \int_0^1 (1 - \xi) f_1(\xi) d\xi - \int_0^\eta (\eta - \xi) f_1(\xi) d\xi \right] d\eta + c_2.$$

Отметим, что в рассмотренном случае, когда $f_1 = 1$, найден параболический закон $T_1|_{f_1=1} = 0,5y(1 - y)$.

Вычислительные эксперименты к задаче 1

Для выявления нетривиальных зависимостей АЧХ и тока от частотного параметра κ в качестве функций неоднородности рассмотрим набор функций с одинаковым средним, удовлетворяющих равенству

$$\int_0^1 g_n(y) dy = 1,$$

где

$$g_1(y) = 1, \quad g_2(y) = \frac{2}{3}(1 + y), \quad g_3(y) = \frac{2}{3}(2 - y), \quad g_4(y) = e^{-1} + e^{y-1},$$

$$g_5(y) = e^{-1} + e^{-y}, \quad g_6(y) = \frac{3}{4}(1 + y^2), \quad g_7(y) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}(1 - y)^2,$$

$g_2(y), g_4(y), g_6(y)$ – возрастающие функции, $g_3(y), g_5(y), g_7(y)$ – убывающие функции.

В качестве законов неоднородности рассмотрим 11 наборов:

- 1: $f_1, f_2 = g_1, g_1$; 2: $f_1, f_2 = g_6, g_2$; 3: $f_1, f_2 = g_4, g_2$;
 4: $f_1, f_2 = g_1, g_2$; 5: $f_1, f_2 = g_5, g_2$; 6: $f_1, f_2 = g_7, g_2$;
 7: $f_1, f_2 = g_6, g_3$; 8: $f_1, f_2 = g_4, g_3$; 9: $f_1, f_2 = g_1, g_3$;
 10: $f_1, f_2 = g_5, g_3$; 11: $f_1, f_2 = g_7, g_3$.

Для моделирования затухания воспользуемся концепцией комплексных модулей в электроупругости [8, 9], вводя комплексный модуль податливости

$$s_{11}(x_1, \omega) = \frac{i\omega n + 1}{i\omega E(x_1)n + H(x_1)},$$

где $E(x_1) > H(x_1) > 0$.

Для безразмерной податливости $f_2(y)$ достаточно осуществить замену

$$f_2(y) \rightarrow f_2(y, \kappa) = \frac{1}{H(y)} \frac{1 + i\kappa\tau}{1 + i\kappa\tau\eta(y)},$$

где $\eta(y) = E(y)/H(y)$, $\tau = \kappa^{-1}\omega n$ – безразмерное время релаксации.

Для проведения вычислительных экспериментов примем $k^2 = 0,22$, что соответствует материалу PZT-4 [18]. В результате вычислительных экспериментов с различными законами неоднородности выявлены следующие особенности:

1. Для задачи с постоянными свойствами $f_1(y) = 1, f_2(y) = 1$ на интервале $\kappa \in [0, 12]$ имеется 2 резонанса: $\pi, 3\pi$. Другие сочетания $f_1(y), f_2(y)$, выбранные из набора $g_k(y), k = 2, \dots, 7$, приводят к тому, что на том же интервале имеется 3 резонанса.

2. В зависимости от законов неоднородности второй резонанс имеет различную добротность. Построим зависимость J от безразмерной частоты κ . В результате выявлено, что пара функций с одинаковым типом монотонности дает резонанс с низкой добротностью (например, для наборов 2, 3, 10, 11), а «разноименные» по монотонности функции дают резонанс с умеренной добротностью (наборы 5, 6, 7, 8). На рис. 1 приведены зависимости $J(\kappa)$ для наборов 8, 10, а на рис. 2 изображена окрестность второго резонанса.

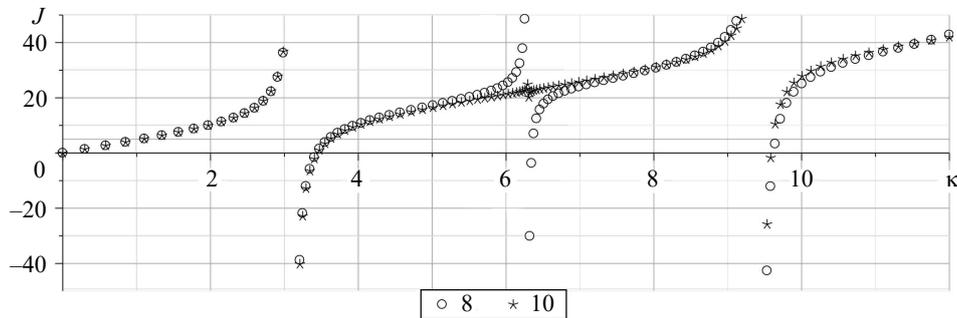


Рис. 1. Зависимость $J(\kappa)$ для наборов 8 и 10

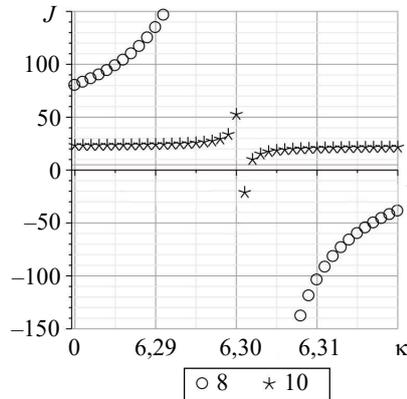


Рис. 2. Зависимость $J(\kappa)$ в окрестности точки $\kappa = 6,3$ (второй резонанс)

Резонансы, имеющие различную добротность, в упругом случае и при наличии затухания обладают этим же свойством. Рассмотрим наборы, аналогичные 3, 5:

$$\text{набор } 3+: f_1 = g_4, \quad f_2 = g_2 \frac{1 + i\kappa\tau}{1 + i\kappa\tau\eta}; \quad \text{набор } 5+: f_1 = g_5, \quad f_2 = g_2 \frac{1 + i\kappa\tau}{1 + i\kappa\tau\eta}.$$

При анализе результатов будем различать антирезонансы двух типов. Назовем антирезонансом первого типа такое значение частотного параметра, при котором ток обращается в нуль, а антирезонансом второго типа будем считать такое его значение, для которого амплитуда тока имеет локальный минимум.

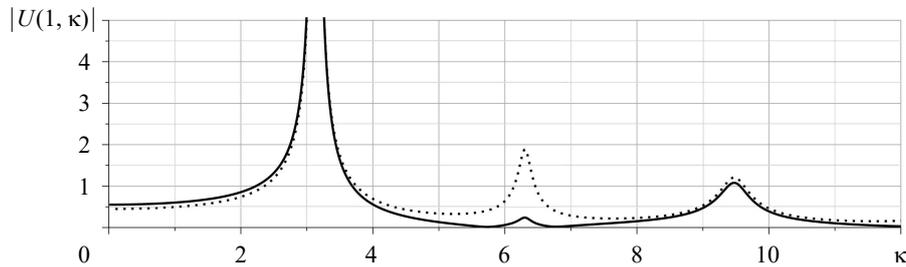


Рис. 3. Модуль смещения (сплошная линия – набор 3+, точки – набор 5+)

Так, например, при $\tau = 0,01$, $\eta = 1,5$ получим графики АЧХ, тока и проводимости. На рис. 3 наблюдается существенное различие зависимости $|U(1, \kappa)|$ для наборов 3+ и 5+ в окрестности второго резонанса. Антирезонансы первого типа наблюдаются для набора 3+, а антирезонансы второго типа, соответственно, для 5+.

На рис. 4 изображен график $|J(\kappa)|$. Для набора 3+ второй резонанс практически неразличим.

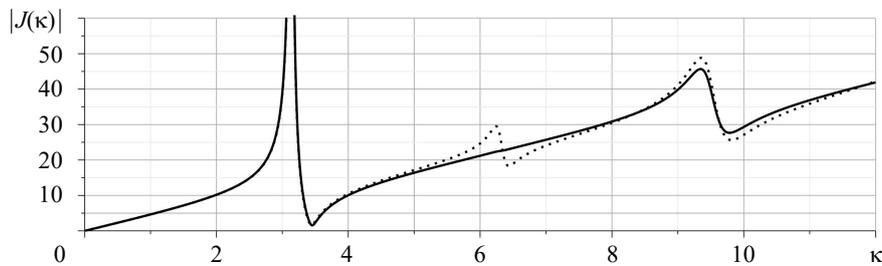


Рис. 4. Модуль тока (сплошная линия – набор 3+, точки – набор 5+)

Отметим, что амплитуда на графике проводимости при наличии затухания быстро убывает. Приведем локальные рисунки в окрестности резонансов.

На рис. 5 изображен график функции, пропорциональной проводимости. Для набора 3+ второй резонанс также практически неразличим.

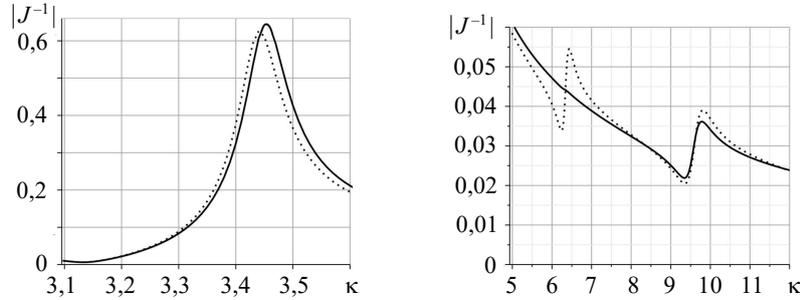


Рис. 5. Проводимость (сплошная линия – набор 3+, точки – набор 5+)

2. Продольная поляризация пьезоэлектрического стержня

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω пьезоэлектрического стержня длиной l , в котором пьезомодуль d_{33} зависит от координаты x_3 . Это возможно как в результате реализации технологического процесса с заданием некоторого закона изменения, так и вследствие воздействия неоднородных тепловых полей в процессе эксплуатации, из-за чего возможна частичная располяризация, моделируемая описанной выше зависимостью. Будем считать, что направление поляризации совпадает с осью x_3 , торцы стержня электродированы (левый электрод закорочен), а колебания возбуждаются осциллирующим потенциалом $V \exp(i\omega t)$, подающимся на правый электрод. Кроме того, считаем, что из компонентов тензора напряжений отличен от нуля компонент $\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_3, t)$ и определяющие соотношения представимы в форме [2]:

$$E = -\varphi_{,3}, \quad u_{3,3} = s_{33}(x_3)\sigma_{33} - d_{33}(x_3)\varphi_{,3}, \quad D_3 = d_{33}(x_3)\sigma_{33} - \varepsilon_{33}\varphi_{,3}. \quad (11)$$

Здесь $u_3(x_3, t)$ – смещение стержня вдоль оси x_3 ; s_{33} – упругая податливость; ε_{33} – диэлектрическая проницаемость; φ – электрический потенциал.

Из уравнений движения для электроупругой среды в этом случае остаются два:

$$\sigma_{33,3} = -\rho\omega^2 u_3, \quad D_{3,3} = 0. \quad (12)$$

Обычно в задачах электроупругости составляется базовая система относительно переменных u_3 и φ , однако в рассматриваемом случае удобнее сформулировать ее относительно неизвестных σ_{33} и φ . Итак, используя (11) и (12), а также считая, что торцы стержня свободны от усилий, сформулируем краевую задачу. Полагая $x_3 = x$, $\sigma_{33}(x_3, t) = \sigma(x, t)$, $u_3(x_3, t) = u(x, t)$ и отделяя частотный множитель, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{,33} &= -\rho\omega^2 (s_{33}(x)\sigma - d_{33}(x)\varphi_{,3}), & (d_{33}(x)\sigma - \varepsilon_{33}\varphi_{,3})_{,3} &= 0, \\ \sigma(0) &= \sigma(l) = 0, & \varphi(0) &= 0, \quad \varphi(l) = V. \end{aligned} \quad (13)$$

Приведем задачу (13) к безразмерному виду, вводя $x = ly$. Проинтегрируем второе уравнение (13) и, найдя $d_{33}(x)\sigma - \varepsilon_{33}\varphi_{,3} = D_{30}$, исключим электрический потенциал из задачи

$$\sigma_{,33} = -\rho\omega^2 \left(s_{33}(x)\sigma - d_{33}(x) \frac{d_{33}(x)\sigma - D_{30}}{\varepsilon_{33}} \right). \quad (14)$$

Учитывая граничные условия для потенциала, получим интегральное соотношение

$$\int_0^1 \frac{d_{33}(x)\sigma - D_{30}}{\varepsilon_{33}} = V. \quad (15)$$

Введем безразмерные параметры и переменные:

$$d_{33}^* f_3(y) = d_{33}(yl), \quad s_{33}^* f_4(y) = s_{33}(yl), \quad \kappa^2 = \rho\omega^2 l^2 s_{33}^*, \\ k^2 = (d_{33}^*)^2 / (\varepsilon_{33} s_{33}^*), \quad S = \sigma_{33} s_{33}^* \varepsilon_{33} / (d_{33}^* D_{30}),$$

где d_{33}^*, s_{33}^* – характерные значения пьезоэлектрического модуля и податливости.

Получаем краевую задачу

$$S'' = -\kappa^2 [(f_4(y) - k^2 f_3^2(y))S + f_3(y)], \quad S(0) = S(1) = 0. \quad (16)$$

Решение этой задачи строится, как и выше, методом пристрелки, а для определения амплитуды тока в цепи $I = -i\omega b D_{30}$ найдем связь между параметрами V и D_{30} , рассматривая соотношение (15):

$$D_{30} = \varepsilon_{33} \frac{V}{k^2 \int_0^1 f_3(y) S(y, \kappa) dy - 1}.$$

Аналогично предыдущему введем $Z = Vh/J$ и определим частоты резонанса и антирезонанса.

Вводя функцию $f_5(y) = f_4(y) - k^2 f_3^2(y)$, можно перенести полученные для $T(y)$ результаты на $S(y)$ путем замены $f_1(y), f_2(y) \rightarrow f_3(y), f_5(y)$.

Вычислительные эксперименты – задача 2

Вычислительные эксперименты по анализу тока в зависимости от частоты для второй задачи показали, что ток в окрестности первого резонанса крайне мало зависит от набора законов неоднородности, второй резонанс имеет низкую добротность для наборов 2, 3, 4, 9, 10, 11 в сравнении с 5, 6, 7, 8; то есть при $f_3 = f_1, f_4 = f_2$ проявляются закономерности, аналогичные задаче 1.

На рис. 6 приведена зависимость тока с точностью до постоянного размерного множителя в окрестности второго и третьего резонансов для наборов 3, 6, 8, 11.

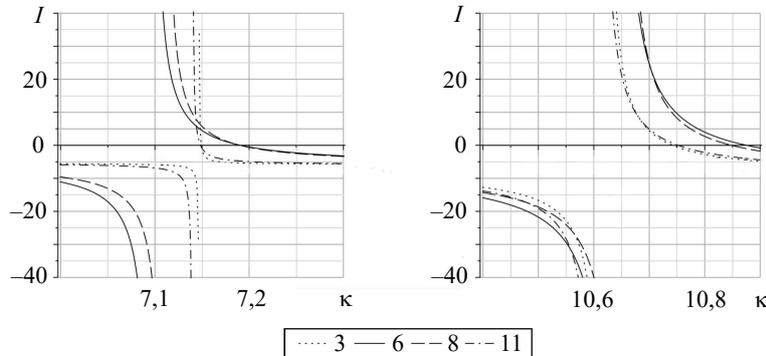


Рис. 6. Зависимость $I(\kappa)$ для наборов 3, 6, 8, 11

Вычислительные эксперименты показали, что третий резонанс смещен вправо для наборов 5, 6, 7, 8.

На рис. 7 приведен график проводимости в окрестности второго и третьего резонансов. Выявлено, что точки резонанса и антирезонанса могут быть достаточно близки. Так, для набора 7 резонансы тока происходят при значениях κ , равных 3,192627, 7,096901, 10,64060, а резонансы проводимости – при κ , равных 3,502554, 7,190873, 10,87557.

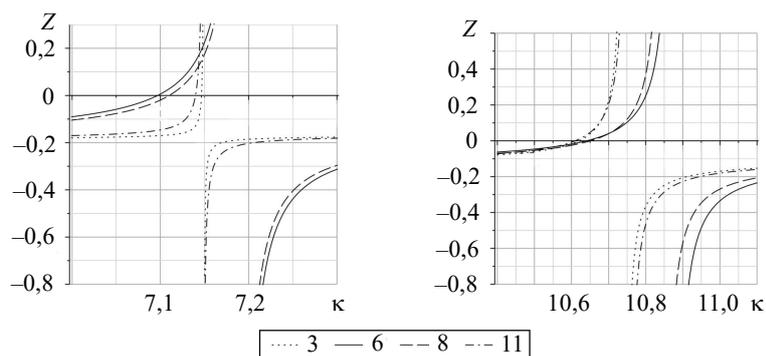


Рис. 7. Зависимость проводимости $Z(\kappa)$ для наборов 3, 6, 8, 11

Заключение

Исследованы задачи для двух вариантов поляризации пьезоэлектрического ФГ-стержня, построены численное и асимптотическое для низких частот решения. Изучено влияние законов изменения свойств неоднородных податливости и пьезомодуля на частотные характеристики. Выявлены отсутствие зависимости тока и проводимости от законов неоднородности в низкочастотной области, различная добротность второго резонанса, смещение третьего резонанса в зависимости от типа монотонности функций неоднородности. Построены графики смещений, тока и проводимости от частотного параметра. В рамках модели стандартного вязкоупругого тела и концепции комплексных модулей учтено затухание. Найдены резонансы и антирезонансы двух типов.

Список литературы

1. Ватульян А.О., Рынкова А.А. Об одной модели изгибных колебаний пьезоэлектрических биморфов с разрезными электродами и ее приложениях. *Изв. РАН. МТТ*. 2007. №4. С. 114–122.
2. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. *Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел*. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008. 175 с.
3. Sharma P. Vibration analysis of FGPM beam: A review. *Materials Today: Proceedings*. 2021. Vol. 44. Pt. 1. P. 1384–1390. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.621>.
4. Kapuria S., Ahmed A., Dumir P.C. An efficient coupled zigzag theory for dynamic analysis of piezoelectric composite and sandwich beams with damping. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 279. Iss. 1-2. P. 345–371. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.11.018>.
5. Lin J-Ch., Nien M.H. Adaptive control of a composite cantilever beam with piezoelectric damping-modal actuators/sensors. *Composite Structures*. 2005. Vol. 70. Iss. 2. P. 170–176. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.08.020>.
6. Bian Z.G., Lim C.W., Chen W.Q. On functionally graded beams with integrated surface piezoelectric layers. *Composite Structures*. 2006. Vol. 72. Iss. 3. P. 339–351. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.01.005>.

7. Sharma P., Gupta B., Rathore S.K. Parametric study on natural frequency of axially tapered functionally graded piezoelectric beam. *Materials Today: Proceedings*. 2022. Vol. 62. Pt. 6. P. 3647–3650. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.419>.
8. Ватульян А.О., Кондратьев В.С. Колебания неоднородного пьезокерамического цилиндра при наличии затухания. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. №4. С. 406–414. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2016-78-4-406-414>.
9. Ватульян А.О., Кондратьев В.С. О колебаниях пьезокерамического цилиндра с окружающей поляризацией. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №4. С. 427–437. DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-427-437.
10. Ватульян А.О., Васильев Л.В. Об определении параметров закрепления неоднородной балки при наличии затухания. *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2016. Т. 16. Вып. 4. С. 449–456. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2016-16-4-449-456>.
11. Przybylski J., Kuliński K. Stability and free vibration analysis of compound column with piezoelectric rod. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Vol. 148. Article No 107178. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2020.107178>.
12. Jankowski P., Kamil Żur K., Farajpour A. Analytical and meshless DQM approaches to free vibration analysis of symmetric FGM porous nanobeams with piezoelectric effect. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2022. Vol. 136. P. 266–289. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.01.007>.
13. Yue Y.M., Xu K.Y., Chen T. A micro scale Timoshenko beam model for piezoelectricity with flexoelectricity and surface effects. *Composite Structures*. 2016. Vol. 136. P. 278–286. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.046>.
14. Della C.N., Shu D. Vibration of beams with piezoelectric inclusions. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. Iss. 7-8. P. 2509–2522. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.08.002>.
15. Carboni B., Catarci S., Lacarbonara W. Parametric resonances of nonlinear piezoelectric beams exploiting in-plane actuation. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2022. Vol. 163. Article No 108119. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.108119>.
16. Przybylski J., Gasiorski G. Nonlinear vibrations of elastic beam with piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration*. 2018. Vol. 437. P. 150–165. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.09.005>.
17. Zhou L., Nie B., Ren S., Kamil Żur K., Kim J. On the hygro-thermo-electro-mechanical coupling effect on static and dynamic responses of piezoelectric beams. *Composite Structures*. 2021. Vol. 259. Article No 113248. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113248>.
18. Паргон В.З., Кудрявцев Б.А. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. М.: Наука, 1988. 472 с.
19. Ватульян А.О. *Коэффициентные обратные задачи механики*. М.: Физматлит, 2019. 271 с.
20. Бочарова О.В., Ватульян А.О. Обратные задачи для упругого неоднородного стержня. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Ест. науки*. 2008. №3. С. 33–37.

References

1. Vatul'yan A.O., Rynkova A.A. A model of bending vibrations of piezoelectric bimorphs with split electrodes and its applications. *Mechanics of Solids*. 2007. Vol. 42. No 4. P. 595–602. DOI: 10.3103/S0025654407040127.
2. Vatul'yan A.O., Solov'yev A.N. *Pryamye i obratnye zadachi dlya odnorodnykh i neodnorodnykh uprugikh i elektrouprugikh tel [Direct and Inverse Problems for Homogeneous and Heterogeneous Elastic and Electroelastic Bodies]*. Rostov-on-Don. Yuzhnyy federal'nyy universitet Publ. 2008. 175 p. (In Russian).
3. Sharma P. Vibration analysis of FGPM beam: A review. *Materials Today: Proceedings*. 2021. Vol. 44. Pt. 1. P. 1384–1390. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.621>.
4. Kapuria S., Ahmed A., Dumir P.C. An efficient coupled zigzag theory for dynamic analysis of piezoelectric composite and sandwich beams with damping. *J. Sound Vib.* 2005. Vol. 279. Iss. 1-2. P. 345–371. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.11.018>.

5. Lin J-Ch., Nien M.H. Adaptive control of a composite cantilever beam with piezoelectric damping-modal actuators/sensors. *Compos. Struct.* 2005. Vol. 70. Iss. 2. P. 170–176. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.08.020>.
6. Bian Z.G., Lim C.W., Chen W.Q. On functionally graded beams with integrated surface piezoelectric layers. *Compos. Struct.* 2006. Vol. 72. Iss. 3. P. 339–351. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.01.005>.
7. Sharma P., Gupta B., Rathore S.K. Parametric study on natural frequency of axially tapered functionally graded piezoelectric beam. *Materials Today: Proceedings.* 2022. Vol. 62. Pt. 6. P. 3647–3650. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.04.419>.
8. Vatulyan A.O., Kondratev V.S. Kolebaniya neodnorodnogo pyezokeramicheskogo tsilindra pri nalichii zatukhaniya [The vibrations of inhomogeneous piezoceramic cylinder with the damping]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2016. Vol. 78. No 4. P. 406–414 (In Russian).
9. Vatulyan A.O., Kondratev V.S. O kolebaniyakh pyezokeramicheskogo tsilindra s okruzhnoy polarizatsiyey [On the vibrations of piezoceramic cylinder with circumferential polarization]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2018. Vol. 80. No 4. P. 427–437 (In Russian).
10. Vatulyan A.O., Vasilev L.V. Ob opredelenii parametrov zakrepleniya neodnorodnoy balki pri nalichii zatukhaniya [Determination of attaching parameters of inhomogeneous beams in the presence of damping]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika [Izv. Saratov Univ. (N. S.). Ser. Math. Mech. Inform.]*. 2016. Vol. 16. Iss. 4. P. 449–456 (In Russian).
11. Przybylski J., Kuliński K. Stability and free vibration analysis of compound column with piezoelectric rod. *Mech. Syst. Signal Process.* 2021. Vol. 148. Article No 107178. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2020.107178>.
12. Jankowski P., Kamil Żur K., Farajpour A. Analytical and meshless DQM approaches to free vibration analysis of symmetric FGM porous nanobeams with piezoelectric effect. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2022. Vol. 136. P. 266–289. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.01.007>.
13. Yue Y.M., Xu K.Y., Chen T. A micro scale Timoshenko beam model for piezoelectricity with flexoelectricity and surface effects. *Compos. Struct.* 2016. Vol. 136. P. 278–286. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.046>.
14. Della C.N., Shu D. Vibration of beams with piezoelectric inclusions. *Int. J. Solids Struct.* 2007. Vol. 44. Iss. 7-8. P. 2509–2522. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.08.002>.
15. Carboni B., Catarci S., Lacarbonara W. Parametric resonances of nonlinear piezoelectric beams exploiting in-plane actuation. *Mech. Syst. Signal Process.* 2022. Vol. 163. Article No 108119. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2021.108119>.
16. Przybylski J., Gasiorski G. Nonlinear vibrations of elastic beam with piezoelectric actuators. *J. Sound Vib.* 2018. Vol. 437. P. 150–165. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.09.005>.
17. Zhou L., Nie B., Ren S., Kamil Żur K., Kim J. On the hygro-thermo-electro-mechanical coupling effect on static and dynamic responses of piezoelectric beams. *Compos. Struct.* 2021. Vol. 259. Article No 113248. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113248>.
18. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Elektromagnitoupругost pyezoelektricheskikh i elektroprovodnykh tel [Electromagnetoelastic of Piezoelectric and Electroconductive Bodies]*. Moscow. Nauka Publ. 1988. 472 p. (In Russian).
19. Vatulyan A.O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki [Coefficient Inverse Problems of Mechanics]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2019. 271 p. (In Russian).
20. Bocharova O.V., Vatulyan A.O. Obratnye zadachi dlya uprugogo neodnorodnogo sterzhnya [Inverse problems for an elastic inhomogeneous rod]. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya Estestvennye nauki [Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences]*. 2008. No 3. P. 33–37 (In Russian).

ON THE VIBRATIONS OF FUNCTIONALLY GRADED ELECTROELASTIC RODS

Vatulyan A.O., Yurov V.O.

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

The problems of steady-state vibrations of functionally graded electroelastic rods for two types of polarization were investigated. The functional gradient is characterized by a change along the longitudinal coordinate of the isothermal elastic compliance and the piezoelectric modulus. The linear, quadratic and exponential laws of inhomogeneity are used in the work. To simulate damping, a model of a standard viscoelastic body was used, which is used within the framework of the concept of complex modules. For the numerical solution of the tasks set, the shooting method was applied. In order to verify the computational scheme, an exact solution of the problem is constructed for the case of constant properties. An analysis of the influence of the laws of inhomogeneity was carried out for laws that have the same mean integral values. The amplitude-frequency characteristics of current and conductivity are constructed. Antiresonances are investigated, the presence of two types is established, depending on the laws of inhomogeneity. An asymptotic analysis of the problem is performed for the case of low frequencies. It is shown that in the low-frequency range, the mechanical longitudinal stress depends only on the law of change in the piezoelectric modulus, while the displacement also depends on the law of change in elastic compliance. As a result of computational experiments, the features of the current's amplitude-frequency characteristic (AFC) structure in the vicinity of the second resonance were revealed. The AFC has a different quality factor depending on whether the compliance functions and the piezoelectric modulus have the same or different types of monotonicity. It is revealed that the first resonance from the frequency range under consideration has low sensitivity to the laws of inhomogeneity, and the third resonance is affected sufficiently by the inhomogeneity laws and can be used to determine the type of monotonicity when solving inverse problems on reconstructing properties.

Keywords: functionally graded material, electroelasticity, vibrations, inhomogeneity, attenuation, resonance, antiresonance, current, conductivity.