УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-3-343-350

К ОБОСНОВАНИЮ ОДНОЗНАЧНОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ДЕФОРМИРОВАНИИ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

Коровайцева Е.А.

НИИ механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

katrell@mail.ru

Поступила в редакцию 02.06.2022

Предложен критерий оценки однозначности продолжения численного решения нелинейной задачи деформирования мягкой оболочки из высокоэластичного материала, применимый в процессе проведения вычислений. Критерий основан на исследовании свойств матрицы Якоби системы линейных алгебраических уравнений, формируемых при использовании метода дифференцирования по параметру, позволяющего свести решение нелинейной краевой задачи к совокупности квазилинейной краевой и нелинейной начальной задач и применить метод начальных параметров решения линейных краевых задач. Для оценки однозначности продолжения решения в каждой точке интервала интегрирования необходим контроль величин компонент вектора правых частей разрешающей системы дифференциальных уравнений, а также расчет определителя и ранга матрицы Якоби системы алгебраических уравнений, формируемой в результате использования метода начальных параметров, и вычисление ранга расширенной матрицы Якоби.

Для тестирования предложенного критерия рассмотрена задача статического раздувания полусферы из неогуковского материала равномерно распределенным по меридиану давлением, решение которой при определенных значениях параметров численного алгоритма приводит к различным вычислительным сложностям – потере устойчивости счета, большой погрешности результатов расчетов, неоднозначности решения, причина которой требует дополнительных исследований. Показано, что в точках, в которых возникают указанные сложности, нарушаются условия определенности функции правых частей системы дифференциальных уравнений, сформулированные в рамках предложенного критерия.

Ключевые слова: нелинейное деформирование, мягкая оболочка, метод дифференцирования по параметру, бифуркация решения, особые точки.

Введение

Вопрос существования решения нелинейных задач, а также возможности и однозначности продолжения решения из некоторой точки в пространстве разрешающих переменных задачи, как правило, рассматривается в литературе на примере некоторого нелинейного операторного уравнения, записанного в векторной форме и содержащего параметр, в общем случае не являющийся параметром продолжения [1]. Для изучения поведения решения уравнения при изменении его параметра используется теорема о неявных функциях [2], формулирующая условия, при которых решения уравнения в окрестности некоторой начальной точки пространства разрешающих переменных являются однозначными непрерывными функциями параметра. Для исследования вопроса однозначности продолжения решения из начальной точки изучаются свойства матрицы Якоби (определитель и ранг) и расширенной матрицы Якоби (ранг) рассматриваемого нелинейного операторного уравнения.

Условия существования и однозначности решения нелинейных дифференциальных уравнений в доступной литературе были сформулированы в [3], при этом рассматривались задачи Коши. Однако применение указанных условий к нелинейным задачам механики деформируемого твердого тела (МДТТ) затруднено, так как последние являются не начальными, а краевыми условиями, и их решение требует использования различных алгоритмов, в рамках которых непосредственная проверка выполнения условий теорем [3] невозможна.

Одними из наиболее сложных нелинейных задач МДТТ являются задачи деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов, постановка которых подразумевает учет и физической, и геометрической нелинейностей. По-видимому, по этой причине аналитические соотношения, определяющие условия бифуркации решения, получены в доступной литературе только для случаев раздувания мягких оболочек канонических форм меридиана при простейших условиях нагружения и закрепления [4–10].

При численном исследовании задач деформирования мягких оболочек более сложной постановки, а также в ряде случаев при построении аналитического решения вопрос анализа поведения решения в окрестности точки бифуркации решается непосредственно при оценке полученных результатов [11–17]. Однако в большинстве публикаций вопрос исследования однозначности решения нелинейной задачи деформирования мягкой оболочки не обсуждается, а приводятся лишь результаты расчетов [18–23].

Таким образом, вопрос формулировки прикладных условий оценки однозначности продолжения решения нелинейной краевой задачи, которые могут быть использованы в вычислительной практике, представляется актуальным.

1. Условия однозначности продолжения решения нелинейной краевой задачи

Рассмотрим соотношения двухточечной нелинейной краевой задачи вида

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, p) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{y}(x_1) = \mathbf{b}_1, \quad 1 \leftrightarrow 2. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{y}$ – вектор искомых функций размерности n; $\mathbf{f}$ – вектор-функция правых частей системы дифференциальных уравнений размерности n; p – параметр задачи.

Положим, что при некотором значении параметра $p = p_0$ известно решение задачи $\mathbf{y}(x, p_0) = \mathbf{y}_0(x)$. Пусть неизвестная функция $\mathbf{y}(x, p)$ и параметр p являются непрерывными и дифференцируемыми функциями некоторого параметра λ, выбранного так, что $\mathbf{y}(x,\lambda_0)=\mathbf{y}_0(x)$, $p(\lambda_0)=p_0$ при начальном его значении $\lambda=\lambda_0$. Продифференцировав по λ нелинейную краевую задачу (1), (2), получим квазилинейную краевую задачу

$$\frac{d\dot{\mathbf{y}}}{dx}=\mathbf{A}(\mathbf{y},p)\dot{\mathbf{y}}+\dot{p}\mathbf{b}(\mathbf{y},p), \tag{3}$$

$$\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{y}}(x_1)=\mathbf{0}, \quad 1\leftrightarrow 2, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{A}(\mathbf{y},p)=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{y}}, \quad \mathbf{b}(\mathbf{y},p)=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial p}.$$

Используя стандартный алгоритм метода начальных параметров для построения решения краевой задачи (3), (4), из граничного условия на правом краю задачи получаем алгебраическое уравнение:

$$\left[\mathbf{A}_2\mathbf{M}(x_2) \quad \mathbf{A}_2\mathbf{H}(x_2)\right]\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{y}}_{12}\\ \dot{p}\end{pmatrix}=\mathbf{0}, \tag{5}$$

где $\mathbf{M}(x)$ – фундаментальная матрица; $\mathbf{H}(x)$ – частное решение системы уравнений (3), (4); $\dot{\mathbf{y}}_{12}$ – неизвестный подвектор из граничных условий левого края размерности $n/2$.

Полученное уравнение для нелинейной краевой задачи (1), (2) имеет тот же смысл, что и уравнение продолжения для векторного операторного уравнения, представленное в [1]. Поэтому матрицы $\overline{\mathbf{J}}=[\mathbf{A}_2\mathbf{M}(x_2) \quad \mathbf{A}_2\mathbf{H}(x_2)]$, $\mathbf{J}=\mathbf{A}_2\mathbf{M}(x_2)$ аналогичны расширенной и исходной матрицам Якоби исследуемого в [1] операторного уравнения, и для оценки однозначности продолжения решения задачи (1), (2) по параметру λ можно использовать свойства указанных матриц аналогично [1]: в регулярных точках $\det\mathbf{J}\neq 0$, $\operatorname{rang}\overline{\mathbf{J}}=\operatorname{rang}\mathbf{J}=n/2$, и решение может быть однозначно продолжено. В особых точках $\det\mathbf{J}=0$. Если при этом $\operatorname{rang}\overline{\mathbf{J}}=n/2$, $\operatorname{rang}\mathbf{J}=n/2-1$, то особая точка является предельной, и в ее окрестности возможно успешное продолжение решения уравнения (1) после изменения параметра продолжения λ [1]. При этом выбор параметра λ (в частности, в форме, которая позволяет избежать необходимости его изменения) может оказать существенное влияние на возможность и эффективность продолжения решения в окрестности предельной точки. В тех случаях, когда в особых точках $\operatorname{rang}\overline{\mathbf{J}}=\operatorname{rang}\mathbf{J}=n/2-1$, возможна бифуркация решения.

Подводя итог, сформулируем последовательность действий, необходимых для проверки существования решения нелинейной краевой задачи и однозначности его продолжения по параметру:

1) исследование определенности и непрерывности вектора правых частей разрешающей системы дифференциальных уравнений $\mathbf{f}(x,\mathbf{y},p)$ и матрицы $\partial\mathbf{f}(x,\mathbf{y},p)/\partial\mathbf{y}$;

2) вычисление определителя $\det\mathbf{J}$ и рангов $\operatorname{rang}\mathbf{J}$, $\operatorname{rang}\overline{\mathbf{J}}$, где $\mathbf{J}=\mathbf{A}_2\mathbf{M}(x_2)$ и $\overline{\mathbf{J}}=[\mathbf{A}_2\mathbf{M}(x_2) \quad \mathbf{A}_2\mathbf{H}(x_2)]$. В точках, где продолжение решения однозначно, должны выполняться условия $\det\mathbf{J}\neq 0$, $\operatorname{rang}\overline{\mathbf{J}}=\operatorname{rang}\mathbf{J}=n/2$.

Следует также сформулировать критерий определенности и непрерывности функции, получаемой при расчетах, так как, к примеру, получение строгого нуля или бесконечного значения, используемых в теоретических выкладках для характеристики определенности или непрерывности, в вычислениях невозможно. Однако в вычислениях возможно получение значений чисел, которые используемая среда программирования оценивает как бесконечные или неопределенные числа. Практика расчетов показала, что достижению этих значений предшествует непрерывный рост порядков рассчитываемых величин. Представляется обоснованным остановить процесс вычислений раньше, чем среда программирования выдаст сообщение об ошибке, связанной с появлением недопустимо больших чисел. В качестве величины, при достижении которой следует прекратить расчеты, назначим $K_{\max} = 10^{16}$. При оценке равенства нулю определителя матрицы будем считать нулевым значение $K_{\min} \leq 10^{-4}$, а сравнение величин компонентов матрицы, необходимое для определения числа линейно независимых строк, будем проводить с точностью до четырех значащих цифр.

2. Пример

Рассмотрим задачу о раздувании шарнирно опертой полусферы из неогуковского материала равномерно распределенным по меридиану давлением. Отношение радиуса недеформированной полусферы к ее толщине примем равным $R_0/h_0 = 200$. Пусть для некоторого базового расчета начальное значение шага по параметру продолжения $\Delta\lambda_0 = 0{,}001$, максимальное значение $\Delta\lambda_{\max} = 0{,}01$, величина предварительного давления $p_0 = 10^{-4}$, а регуляризация системы уравнений теории мягких оболочек проводится на первых $N_{\mathrm{reg}} = 15$ шагах по параметру продолжения. В качестве параметра продолжения выберем прогиб полюса оболочки.

Как было показано в [24], при назначении иных величин указанных параметров в ряде случаев возникают вычислительные сложности, связанные с получением либо недопустимо больших чисел, либо ошибочного решения, либо большой погрешности решения. Поэтому представляется целесообразной проверка выполнения условий существования решения используемой в расчетах системы уравнений [25], а также условий однозначности продолжения решения, сформулированных выше.

С этой целью введем:

1) при каждом обращении к вектору правых частей разрешающей системы уравнений $\mathbf{f}(x,\mathbf{y},p)$ контроль величин его компонентов, а также компонентов соответствующей матрицы $\partial\mathbf{f}(x,\mathbf{y},p)/\partial\mathbf{y}$. При превышении этими величинами значения $K_{\max} = 10^{16}$ будем считать условие непрерывности вектора правых частей и компонентов соответствующей ему матрицы нарушенным;

2) при формировании системы уравнений (5) контроль значений определителя $\det\mathbf{J}$ и рангов $\operatorname{rang}\overline{\mathbf{J}}$, $\operatorname{rang}\mathbf{J}$. При этом значение $\det\mathbf{J} \leq K_{\min}$ будем считать нулевым.

Таким образом, в процессе проведения расчетов при назначении величин параметров вычислительного алгоритма, отличных от указанных выше, были выявлены случаи нарушения условий существования решения, которые предваряли непрерывное возрастание величин компонентов искомого вектора разрешающих переменных, названное в [24] потерей устойчивости счета:

1) при $p_0 = 10^{-5}$ на первом шаге по параметру продолжения решения в точке меридиана $x = 0{,}4688$ третий компонент вектора правых частей системы дифференциальных уравнений $f_3 = 1{,}61\cdot10^{16} > K_{\max}$;

2) при $\Delta\lambda_{\max} = 10^{-3}$ на 177-м шаге по параметру продолжения решения в точке $x = 0{,}1127$ третий компонент вектора правых частей системы дифференциальных уравнений $f_3 = 2{,}61\cdot10^{16} > K_{\max}$;

3) при регуляризации системы уравнений теории мягких оболочек на первых $N_{\text{reg}} = 5$ шагах по параметру продолжения и расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия деформированной оболочки на 47-м шаге по параметру продолжения решения в точке меридиана $x = 0{,}0579$ первый компонент вектора правых частей системы дифференциальных уравнений $f_1 = 1{,}1 \cdot 10^{18} > K_{\max}$. При этом при использовании уравнений технической теории мягких оболочек на всем интервале решения задачи условия существования решения и единственности его продолжения не нарушаются, то есть получаемая в этом случае большая погрешность решения обусловлена лишь некорректным использованием системы уравнений технической теории мягких оболочек.

Аналогичные расчеты были проведены при назначении параметра продолжения решения задачи в форме, предложенной В.И. Шалашилиным [1]. Было установлено, что неоднозначность зависимости раздувающего оболочку давления от прогиба ее полюса, возникающая при регуляризации системы уравнений теории больших деформаций мягких оболочек на первых $N_{\text{reg}} = 15$ шагах по параметру продолжения и расчете основного напряженного состояния по уравнениям равновесия недеформированной оболочки, сопровождается достижением вторым компонентом вектора правых частей системы дифференциальных уравнений величины $f_2 = 1{,}53 \cdot 10^{16} > K_{\max}$ на 52-м шаге по параметру продолжения решения в точке $x = 0{,}5934$.

Ни в одном из случаев возникновения сложностей получения численного решения, описанных в [24], не нарушалось условие $\det \mathbf{J} > K_{\min}$, а ранги матриц $\mathbf{J}$ и $\overline{\mathbf{J}}$ были равны $n/2$. Таким образом, к неограниченному возрастанию решения приводило лишь нарушение условий, связанных с определенностью функции правых частей системы дифференциальных уравнений.

Заключение

Сформулированы условия, позволяющие оценить возможность ветвления решения нелинейной краевой задачи в процессе проведения вычислений и, следовательно, прояснить причину ряда затруднений, возникающих при построении численного решения. В частности, проверка указанных условий дает возможность разделить причины резкого изменения поведения решения, связанные с переходом на другую ветвь решения и обусловленные накоплением вычислительных погрешностей.

Список литературы

1. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. *Проблемы нелинейного деформирования*. М.: Наука, 1988. 232 с.

2. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т. 1. М.: Наука, 1969. 616 с.

3. *Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения: Лекции*. Ред. Дж.Б. Келлер, С. Антман. М.: Мир, 1974. 254 с.

4. Fu Y.B., Pearce S.P., Liu K.K. Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2008. Vol. 43. Iss. 8. P. 697–706. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003.

5. Guo Z.H., Solecki R. Free and forced finite amplitude oscillations of an elastic thick-walled hollow sphere made of incompressible material. *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. 1963. Vol. 15. No 3. P. 427–433.

6. Calderer C. The dynamical behavior of nonlinear elastic spherical shells. *Journal of Elasticity.* 1983. Vol. 13. Iss. 1. P. 17–47. DOI: 10.1007/BF00041312.

7. Ren J.-s. Dynamical response of hyper-elastic cylindrical shells under periodic load. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2008. Vol. 29. Iss. 10. P. 1319–1327.

8. Wang T., Yang Y., Fu C., Liu F., Wang K., Xu F. Wrinkling and smoothing of a soft shell. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2020. Vol. 134. P. 103738-1–103738-20. DOI: 10.1016/j.jmps.2019.103738.

9. Zhu Y., Luo X.Y., Wang H.M., Ogden R.W., Berry C. Three-dimensional nonlinear buckling of thick-walled elastic tubes under pressure. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2013. Vol. 48. P. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.06.013.

10. Jiang L., Haddow J.B. A finite element formulation for finite static axisymmetric deformation of hyperelastic membranes. *Computers&Structures.* 1995. Vol. 57. Iss. 3. P. 401–405. DOI: 10.1016/0045-7949(94)00629-H.

11. Колпак Е.П. Устойчивость и закритические состояния безмоментных оболочек при больших деформациях: *Дисс… докт. физ.-мат. наук*. СПб., 2000. 334 с.

12. Gent A.N. Elastic instabilities in rubber. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2005. Vol. 40. Iss. 2-3. P. 165–175. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006.

13. Ren J.-s. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyper-elastic shells. *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. Iss. 7-8. P. 745–753. DOI: 10.1016/J.IJENGSCI.2009.02.001.

14. Yong H., He X., Zhou Y. Dynamics of a thick-walled dielectric elastomer spherical shell. *International Journal of Engineering Science*. 2011. Vol. 49. Iss. 8. P. 792–800. DOI: 10.1016/J.IJENGSCI.2011.03.006.

15. Yuan X.G., Zhang R.J., Zhang H.W. Controllability conditions of finite oscillations of hyperelastic cylindrical tubes composed of a class of Ogden material models. *Computers, Materials & Continua*. 2008. Vol. 7. No 3. P. 155–166. DOI: 10.3970/CMC.2008.007.155.

16. Гимадиев Р.Ш. Моделирование динамики раздува избыточным давлением трехслойной резиноподобной оболочки. *Известия Уфимского научного центра РАН. Математика, механика*. 2018. №1. С. 5–10.

17. Akyuz U., Ertepinar A. Stability and asymmetric vibrations of pressurized compressible hyperelastic cylindrical shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1999. Vol. 34. Iss. 3. P. 391–404. DOI: 10.1016/S0020-7462(98)00015-8.

18. Колесников А.М. Большие деформации высокоэластичных оболочек. *Дисс… канд. физ.-мат. наук*. Ростов-на-Дону, 2006. 115 с.

19. Kydoniefs A.D., Spencer A.J. The finite inflation of an elastic torus. *International Journal of Engineering Science*.1965. Vol. 3. Iss. 2. P. 173–195. DOI: 10.1016/0020-7225(65)90043-1.

20. Dneprov I.V., Ponomarev A.T., Radchenko A.V. The stress-strain state of soft shells of arbitrary shape. *Journal of Mathematical Sciences.* 1994. Vol. 72. No 5. P. 3293–3298. DOI: 10.1007/BF01261683.

21. Ридель В.В., Гулин Б.В. *Динамика мягких оболочек*. М.: Наука, 1990. 204 с.

22. Лялин В.В., Морозов В.И., Пономарев А.Т. *Парашютные системы: проблемы и методы их решения.* М.: Физматлит, 2009. 575 с.

23. Gorissen B., Milana E., Baeyens A., Broeders E., Christiaens J., Collin K., Reynaerts D., De Volder M.F. Hardware sequencing of inflatable nonlinear actuators for autonomous soft robots. *Advanced Materials*. 2019. Vol. 31. Iss. 3. Article No 1804598. DOI: 10.1002/adma.201804598.

24. Коровайцева Е.А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях. *Труды МАИ*. 2020. №114. С. 1–34. DOI: 10.34759/trd-2020-114-04.

25. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек. *Труды МАИ.* 2019. №108. С. 1–17. https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1.

References

1. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problemy nelineynogo deformirovaniya* [*Problems of Nonlinear Deformation*]. Moscow. Nauka Publ. 1988. 232 p. (In Russian).

2. Fikhtengolts G.M. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [*Course of Differential and Integral Calculus*]. Vol. 1. Moscow. Nauka Publ. 1969. 616 p. (In Russian).

3. *Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems.* Eds. J.B. Keller, S. Antman. New York. Amsterdam. W.A. Benjamin, Inc. 1969. 434 p.

4. Fu Y.B., Pearce S.P., Liu K.K. Post-bifurcation analysis of a thin-walled hyperelastic tube under inflation. *Int. J. Non Linear Mech.* 2008. Vol. 43. Iss. 8. P. 697–706. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2008.03.003.

5. Guo Z.H., Solecki R. Free and forced finite amplitude oscillations of an elastic thick-walled hollow sphere made of incompressible material. *Arch. Mech. Stosow*. 1963. Vol. 15. No 3. P. 427–433.

6. Calderer C. The dynamical behavior of nonlinear elastic spherical shells. *J. Elast.* 1983. Vol. 13. Iss. 1. P. 17–47. DOI: 10.1007/BF00041312.

7. Ren J.-s. Dynamical response of hyper-elastic cylindrical shells under periodic load. *Appl. Math. Mech.* 2008. Vol. 29. Iss. 10. P. 1319–1327.

8. Wang T., Yang Y., Fu C., Liu F., Wang K., Xu F. Wrinkling and smoothing of a soft shell. *J. Mech. Phys. Solids.* 2020. Vol. 134. P. 103738-1–103738-20. DOI: 10.1016/j.jmps.2019.103738.

9. Zhu Y., Luo X.Y., Wang H.M., Ogden R.W., Berry C. Three-dimensional nonlinear buckling of thick-walled elastic tubes under pressure. *Int. J. Non Linear Mech.* 2013. Vol. 48. P. 1–14. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.06.013.

10. Jiang L., Haddow J.B. A finite element formulation for finite static axisymmetric deformation of hyperelastic membranes. *Computers&Structures.* 1995. Vol. 57. Iss. 3. P. 401–405. DOI: 10.1016/0045-7949(94)00629-H.

11. Kolpak E.P. Ustoychivost i zakriticheskie sostoyaniya bezmomentnykh obolochek pri bolshikh deformatsiyakh. [Stability and post-bifurcation states of momentless shells at large strains]. *Diss… dokt. fiz.-mat. nauk* [*D. Sci.* (*Phys.&Math*.). *Dissertation*]. Saint-Petersburg. 2000. 334 p. (In Russian).

12. Gent A.N. Elastic instabilities in rubber. *Int. J. Non Linear Mech.* 2005. Vol. 40. Iss. 2-3. P. 165–175. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2004.05.006.

13. Ren J.-s. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyper-elastic shells. *Int. J. Eng. Sci.* 2009. Vol. 47. Iss. 7-8. P. 745–753. DOI: 10.1016/J.IJENGSCI.2009.02.001.

14. Yong H., He X., Zhou Y. Dynamics of a thick-walled dielectric elastomer spherical shell. *Int. J. Eng. Sci.* 2011. Vol. 49. Iss. 8. P. 792–800. DOI: 10.1016/J.IJENGSCI.2011.03.006.

15. Yuan X.G., Zhang R.J., Zhang H.W. Controllability conditions of finite oscillations of hyperelastic cylindrical tubes composed of a class of Ogden material models. *Comput. Mater. Contin.* 2008. Vol. 7. No 3. P. 155–166. DOI: 10.3970/CMC.2008.007.155.

16. Gimadiev R.Sh. Modelirovanie dinamiki razduva izbytochnym davleniem trekhsloynoy rezinopodobnoy obolochki [Modeling the dynamics of inflation of three-layer rubber-like shell with excessive pressure]. *Izvestiya Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN. Matematika, mekhanika* [*Proceedings of the RAS Ufa Scientific Centre. Mathematics. Mechanics*]. 2018. No 1. P. 5–10 (In Russian).

17. Akyuz U., Ertepinar A. Stability and asymmetric vibrations of pressurized compressible hyperelastic cylindrical shells. *Int. J. Non Linear Mech*. 1999. Vol. 34. Iss. 3. P. 391–404. DOI: 10.1016/S0020-7462(98)00015-8.

18. Kolesnikov A.M. Bolshie deformatsii vysokoelastichnykh obolochek [Large deformations of highly elastic shells]. *Diss… kand. fiz.-mat. nauk* [*Cand. Sci.* (*Phys.&Math*.). *Dissertation*]. Rostov-on-Don. 2006. 115 p. (In Russian).

19. Kydoniefs A.D., Spencer A.J. The finite inflation of an elastic torus. *Int. J. Eng. Sci.* 1965. Vol. 3. Iss. 2. P. 173–195. DOI: 10.1016/0020-7225(65)90043-1.

20. Dneprov I.V., Ponomarev A.T., Radchenko A.V. The stress-strain state of soft shells of arbitrary shape. *J. Math. Sci.* 1994. Vol. 72. No 5. P. 3293–3298. DOI: 10.1007/BF01261683.

21. Ridel V.V., Gulin B.V. *Dinamika myagkikh obolochek* [*Dynamics of Soft Shells*]. Moscow. Nauka Publ. 1990. 204 p. (In Russian).

22. Lyalin V.V., Morozov V.I., Ponomarev A.T. *Parashyutnye sistemy: problemy i metody ikh resheniya* [*Parachute Systems: Problems and Methods of their Solution*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2009. 575 p. (In Russian).

23. Gorissen B., Milana E., Baeyens A., Broeders E., Christiaens J., Collin K., Reynaerts D., De Volder M.F. Hardware sequencing of inflatable nonlinear actuators for autonomous soft robots. *Advanced Materials.* 2019. Vol. 31. Iss. 3. Article No 1804598. DOI: 10.1002/adma.201804598.

24. Korovaytseva E.A. O nekotorykh osobennostyakh resheniya zadach statiki myagkikh obolochek vrashcheniya pri bolshikh deformatsiyakh [On some features of soft shells of revolution static problems solution at large deformations]. *Trudy MAI*. 2020. No 114. P. 1–34 (In Russian).
25. Korovaytseva E.A. Smeshannye uravneniya teorii myagkikh obolochek [Mixed Equations of Soft Shells Theory]. *Trudy MAI*. 2019. No 108. P. 1–17.

PROBLEMS SOLUTION BASED ON PARAMETER DIFFERENTIATION METHOD

Korovaytseva E.A.

Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
Moscow, Russian Federation

Criterion of hyperelastic soft shell deforming nonlinear problem numerical solution continuation uniqueness assessment is suggested in the work. The criterion can be used when carrying out calculations. It is based on investigation of properties of Jacobi matrix of linear algebraic equations system which is formed when using parameter differentiation method. This method allows reducing nonlinear boundary value problem solution to a couple of quasilinear boundary value and nonlinear initial problems and applying initial parameters method of solving linear boundary value problems. For assessment of solution continuation uniqueness in each point of integration interval one needs controlling magnitudes of resolving differential equation system right-hand sides vector components, as well as calculating determinant and rank of Jacobi matrix of algebraic equations system formed as a result of initial parameters method using, and expanded Jacobi matrix rank calculation.
For testing suggested criterion the problem of neohookean material hemisphere static inflation by uniformly applied pressure is considered. Solution of this problem as certain values of numerical algorithm parameters leads to various calculation difficulties – calculation stability loss, big errors of calculation results, non-uniqueness of solution which reason requires additional investigations. It is shown that in the points, where mentioned difficulties are met, determinateness conditions for the function of right-hand sides of differential equation system formulated within the framework of the suggested criterion are broken.

Keywords: nonlinear deforming, soft shell, parameter differentiation method, solution bifurcation, critical points.