

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-3-331-342

АЛГОРИТМ КОНСЕРВАТИВНОГО СГЛАЖИВАНИЯ РАЗРЫВНЫХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В МКЭ*

© 2022 г.

**Баженов В.Г., Кибец А.И.,
Демарева А.В., Калинина Ю.А.**

*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

kibec@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 15.06.2022

Рассматриваются трехмерные геометрически и физически нелинейные задачи нестационарного деформирования конструкций. Определяющая система уравнений формулируется в переменных Лагранжа. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей работы. Упругопластическое деформирование конструкционных материалов описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. Решение задачи основано на моментной схеме метода конечных элементов. Дискретизация задачи по пространственным переменным осуществляется восьмиузловыми конечными элементами с полилинейными функциями формы аппроксимации скорости перемещений. Интегрирование по времени выполняется по явной конечно-разностной схеме типа «крест», которая не обладает свойством монотонности. Из-за дисперсии в окрестностях разрыва схема порождает нефизичные осцилляции, что существенно ограничивает область ее применимости. Для подавления высокочастотных осцилляций предлагается применять алгоритм консервативного сглаживания численного решения с пространственно-временным анализатором монотонности. На основе этого алгоритма разработаны программные модули для вычислительного комплекса «Динамика-3». Проведена верификация разработанной методики и ее программной реализации путем решения в трехмерной постановке одномерной задачи о прохождении волны сжатия по закрепленному упругому слою. Для сравнения получены результаты численного решения задачи по схеме «крест» без сглаживания, с линейной вязкостью, с консервативным сглаживанием с применением пространственного и пространственно-временного анализаторов монотонности. Решена в трехмерной постановке задача проникания упругого цилиндра в круглую стальную пластину. Показано, что разработанная методика не только подавляет высокочастотные осцилляции, но и препятствует развитию мод нулевой энергии. В задаче с круглой пластиной без применения процедуры консервативного сглаживания численного решения конечные элементы пластины в зоне соударения значительно искажаются, что приводит к досрочному прерыванию счета.

Ключевые слова: нелинейность, нестационарность, монотонность, метод конечных элементов, схема «крест», сглаживание.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №20-08-00455_а).

Введение

В задачах динамики, связанных с ударным воздействием на среду или конструкцию, возникают особые проблемы, обусловленные наличием поверхностей разрыва. При решении этого класса задач методами сквозного счета разрывы сеточных полей аппроксимируются непрерывными функциями с большими градиентами. Окрестность, на которую размазывается разрыв, определяется численной диссипацией схемы. Поэтому при выборе метода сквозного счета предпочтение отдают схемам повышенного порядка точности [1]. Линейные разностные схемы второго и более высокого порядка аппроксимации немонотонны. Из-за дисперсии в окрестностях разрыва они порождают паразитные, не имеющие физического смысла осцилляции, локализованные в окрестности фронта ударной волны, вблизи точек разрыва граничных условий, в окрестности оси или точки симметрии в задачах с осевой или сферической симметрией и т.д., что существенно ограничивает область применимости таких схем [2]. Монотонные схемы лишены этого недостатка. Но в классе однородных разностных схем свойством монотонности обладают схемы не выше первого порядка аппроксимации [3]. Из-за большой аппроксимационной вязкости они приводят к сильному размазыванию разрывов. Этот же недостаток затрудняет применение искусственной вязкости [4]. В [5, 6] предложен способ построения монотонных схем – метод коррекции потоков (method of Flux-Corrected Transport, FCT), имеющий на гладких решениях второй порядок аппроксимации. Последующее развитие FCT-метода отражено в [7–12]. В его основе лежит нелинейное консервативное сглаживание, состоящее из двух характерных этапов: введения в схему диффузионного оператора и последующего исключения диффузии. Исходя из [5, 6], была разработана простая процедура нелинейного сглаживания, имеющая локальный характер и не нарушающая консервативности разностной схемы [13–15]. В [16, 17] на основе метода коррекции потоков разработан гибридный конечно-разностный алгоритм для расчета динамических процессов деформирования оболочечных конструкций. В [18] процедура консервативного сглаживания [14] обобщена на задачи нестационарного деформирования упругопластических сред.

Для применения оператора монотонизации [14, 18] необходим четырехточечный пространственный шаблон. Поэтому оператор не работает в приграничных контактных элементах, где обычно и генерируются осцилляции численного решения при ударах и отскоках. Ниже излагается пространственно-временной анализатор монотонности численного решения, реализуемый на двух слоях по времени независимо от мерности задачи для каждой пары узлов конечного элемента, принадлежащих одному ребру. Эффективность модифицированной методики подтверждена результатами верификационных расчетов.

1. Определяющая система уравнений

Предположим, что конструкция состоит из N подобластей Ω_i ($i = \overline{1, N}$) и занимает в пространстве в текущий момент времени t область $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$, ограниченную поверхностью $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$. Подобласть Ω_i может представлять собой массивное тело или оболочку. На граничной поверхности конструкции в общем случае может действовать распределенная нагрузка, часть поверхности Γ движется с заданной скоростью. Между отдельными подобластями Ω_i возможно контактное взаимодействие. Деформирование конструкций рассматривается с позиций механики

сплошных сред без введения упрощающих гипотез теории оболочек в тонкостенных элементах. Для описания движения конструкции применяется текущая лагранжева формулировка [19]. Введем обозначения: $X = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$ – неподвижная система ортогональных координат; $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ – локальный ортогональный базис, отслеживающий движение частицы как жесткого целого; $U = [U_1 \ U_2 \ U_3]^T$, $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ – перемещения в общей X и подвижной x системах координат; $P = [P_1 \ P_2 \ P_3]^T$ – распределенная нагрузка; P^q – давление в области контакта деформируемых тел; Γ_p, Γ_q – зоны приложения P, P^q ; $\rho, G, g, g_1, \sigma_T$ – механические характеристики материала (плотность, модуль сдвига, модули кинематического и изотропного упрочнения, предел текучести); $\varepsilon = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{31}]^T$, $\sigma = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}]^T$ – векторы-столбцы, составленные из компонент тензоров деформаций и напряжений; аналогично образуются векторы-столбцы, состоящие из шаровых ε^v, σ^v , девиаторных ε', σ' упругих ε'^e и пластических ε'^p составляющих деформаций и напряжений, компонент тензоров активных напряжений S и микронапряжений r . Точка над переменной означает частную производную по времени, T – операцию транспонирования, D – производную в смысле Яумана. В этих обозначениях система уравнений, определяющая динамическое деформирование упруго-пластической среды, записывается в виде:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \dot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma_p} p_i \delta \dot{U}_i d\gamma + \int_{\Gamma_q} p_i^q \delta \dot{U}_i d\gamma; \quad (1)$$

кинематические соотношения

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i}}{2}, \quad \dot{U}_{i,j} = \frac{\partial \dot{U}_i}{\partial X_j}, \quad X_j = X_j|_{t=0} + \int_0^t \dot{U}_i dt; \quad (2)$$

уравнения состояния

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}'_{ij} &= \dot{\varepsilon}'_{ij}{}^e + \dot{\varepsilon}'_{ij}{}^p, \quad \dot{\varepsilon}'_{11}{}^p + \dot{\varepsilon}'_{22}{}^p + \dot{\varepsilon}'_{33}{}^p = 0, \\ D\sigma'_{ij} &= 2G\dot{\varepsilon}'_{ij}{}^e, \quad \sigma^v = \sigma^v(\rho), \\ \rho_{ij} &= 2g\varepsilon'_{ij}{}^p, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}, \quad D\varepsilon'_{ij}{}^p = d\lambda S_{ij}, \\ S_{ij}S_{ij} &= \frac{2}{3}\sigma_T^2, \quad \sigma_T = \sigma_T^0 + g_1\chi, \quad \sigma_T^0 = \sigma_T^0(I_{2\varepsilon}), \\ I_{2\varepsilon} &= \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right)^{1/2}, \quad \chi = \int_0^t I_{2\varepsilon} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) $d\lambda$ – параметр, тождественно равный нулю при упругом деформировании и определяемый при упругопластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки. Начальные значения задаются для всех компонент \dot{U} , $\dot{\varepsilon}$, σ , граничные условия – для \dot{U} . Положение контактной поверхности и контактные усилия в общем случае неизвестны и определяются в ходе решения поставленной задачи. В зоне контакта рассматривается непроникание по нормали и свободное скольжение вдоль касательной к поверхности контакта:

$$\dot{u}_n^1 = \dot{u}_n^2, \quad (4)$$

$$q_n^1 = -q_n^2, \quad q_i^1 = q_i^2 = 0, \quad i = \tau_1, \tau_2. \quad (5)$$

Здесь τ_1, τ_2 – единичные векторы локального ортогонального базиса, n – вектор нормали к поверхности контакта, нижний индекс i означает проекцию вектора на оси подвижной системы координат, верхними индексами 1 и 2 обозначены номера соответствующих подобластей, поверхности которых находятся в контакте. Связь контактирующих подобластей полагается односторонней, то есть возможен отрыв поверхностей друг от друга и повторное вступление в контакт. Поэтому условия (4), (5) применяются только для сжимающих сил

$$(q_n^i, n^i) < 0. \quad (6)$$

2. Метод решения

Решение определяющей системы уравнений (1)–(6) основано на методе конечных элементов [20–25] и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест». Расчетная область покрывается лагранжевой сеткой из 8-узловых конечных элементов. В узлах сетки определяются перемещения U , скорости \dot{U} и ускорения \ddot{U} в общей системе координат X , используемой для стыковки конечных элементов (КЭ). В каждом элементе вводится локальный прямоугольный базис x , отслеживающий его вращение как жесткого целого пошаговым пересчетом направляющих косинусов осей. Конечный элемент, в общем случае искаженный, с помощью полилинейного изопараметрического преобразования отображается на единичный куб $-1 \leq \xi_i \leq 1$:

$$x_i = \sum_{k=1}^8 x_i^k N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad N_k = \frac{(1 + \xi_1/\xi_1^k)(1 + \xi_2/\xi_2^k)(1 + \xi_3/\xi_3^k)}{8}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (7)$$

В (7) x_i^k, ξ_i^k – координаты узлов в базисе x, ξ . Компоненты скорости перемещений аппроксимируются внутри элемента с помощью функций формы N_k :

$$\dot{U}_i = \sum_{k=1}^8 \dot{U}_i^k N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (8)$$

Компоненты скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в локальном базисе x аппроксимируются в КЭ линейными функциями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^0 + \dot{\varepsilon}_{ij}^1 \xi_1 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \xi_2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^3 \xi_3. \quad (9)$$

В (9) $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ – значения компонент скорости деформаций в центре КЭ (безмоментные составляющие), а $\dot{\varepsilon}_{ij}^k = \partial \dot{\varepsilon}_{ij} / \partial \xi_k = \text{const}$ – их градиенты (моментные составляющие). Пластические и упругие компоненты деформаций могут иметь в пределах конечного элемента нелинейную зависимость от пространственных координат. В соответствии с этим значения пластических деформаций и напряжений определяются из уравнений состояния (3) в выбранных фиксированных точках конечного элемента, исходя из линейного распределения полных деформаций. Для выполнения интегрирования в уравнении баланса виртуальных мощностей (1) применяются квадратурные формулы [21]. После замены интегрирования по области Ω суммированием по конечным элементам получается дискретный аналог уравнений движения:

$$[M] \{\ddot{U}\} = \{F\}, \quad (10)$$

где $[M]$ – диагональная матрица масс; $\{\ddot{U}\}$ – вектор, составленный из ускорений

узлов КЭ-сетки; $\{F\}$ – результирующие узловых сил в общей системе координат X , статически эквивалентные напряжениям в КЭ и внешней нагрузке на их гранях.

Численное определение контактного давления в зонах взаимодействия деформируемых тел и статически эквивалентных ему сил в узлах КЭ-сетки осуществляется из условий непроникания и законов сохранения массы и количества движения [25].

Для интегрирования определяющей системы уравнений по времени воспользуемся явной конечно-разностной схемой типа «крест». Величина временных шагов выбирается, исходя из условия устойчивости Куранта.

3. Метод консервативного сглаживания численного решения

Алгоритм сглаживания основан на законе сохранения импульса. Численное решение осуществляется по схеме «предиктор-корректор». На этапе «предиктор» по явной конечно-разностной схеме типа «крест» определяются предварительные значения компонент скорости перемещений на новом временном слое:

$$(\tilde{u})_j^{n+1/2} = (\dot{u})_j^{n-1/2} + (F)_j^n \frac{\Delta t^n}{m_j}. \quad (11)$$

Предполагается, что в узлах КЭ-сетки перед выполнением процедуры сглаживания численного решения сохранены компоненты скорости перемещений на предыдущем временном слое: $(\dot{u}_1)_j^{n-1/2}$, $(\dot{u}_2)_j^{n-1/2}$, $(\dot{u}_3)_j^{n-1/2}$. Обработка поля скоростей перемещений узлов КЭ-сетки осуществляется следующим образом:

1) в конечных элементах сетки расчетной области просматриваются все пары узлов, образующие ребра;

2) в каждом узле j определяются компоненты ускорения в общем базисе на временном интервале $\Delta t^n = t^{n+1/2} - t^{n-1/2}$:

$$\ddot{u}^n_j = \frac{\tilde{u}_j^{n+1/2} - \dot{u}_j^{n-1/2}}{\Delta t^n}; \quad (12)$$

3) условие монотонности записывается в виде

$$\ddot{u}^n_{j-1} \cdot \ddot{u}^n_j > 0; \quad (13)$$

4) на ребре КЭ-сетки между узлами $j-1$ и j вычисляется поток количества движения

$$\Phi_{j-1/2} = m_{j-1/2} (\tilde{u}_j^{n+1/2} - \tilde{u}_{j-1}^{n+1/2}); \quad (14)$$

5) поток количества движения корректируется с учетом условия монотонности

$$\Phi_{j-1/2} = \begin{cases} \Phi_{j-1/2}, & \ddot{u}^n_{j-1} \cdot \ddot{u}^n_j < 0, \\ 0, & \ddot{u}^n_{j-1} \cdot \ddot{u}^n_j \geq 0; \end{cases} \quad (15)$$

6) определяется поток количества движения в узле КЭ-сетки

$$\Phi_j = \Phi_{j+1/2} - \Phi_{j-1/2}; \quad (16)$$

7) осуществляется коррекция компонент скорости перемещений

$$\dot{u}_j^{n+1/2} = \tilde{u}_j^{n+1/2} + \frac{\beta \Phi_j}{m_j}, \quad (17)$$

где $\beta \approx 1/12$ – весовой коэффициент, регулирующий влияние корректирующих потоков на численное решение. При суммировании по всей расчетной области корректирующие потоки, определяемые по формулам (12)–(17), взаимно уничтожаются, что обеспечивает в целом сохранение величины исходного импульса и консервативность процедуры сглаживания численного решения.

Преимущества предлагаемого пространственно-временного анализатора монотонности численного решения по сравнению с пространственным анализатором таковы:

1) шаблон, необходимый для обработки сеточной информации, сокращается с четырех до двух узлов;

2) обработка информации ведется по парам узлов, образующим ребра, не зависит от линий сетки и может быть реализована на одном конечном элементе, а следовательно, для любых типов конечных элементов и на нерегулярных сетках.

Следует отметить, что процедура консервативного сглаживания при любом способе анализа монотонности вносит некоторую погрешность в кинематические граничные условия, которая исправляется на шаге «предиктор». При исследовании динамики тонкостенных конструкций на сетке с одним слоем конечных элементов по толщине применение процедуры сглаживания приводит к чрезмерному гашению колебаний по толщине. Этот недостаток в значительной степени устраняется при допущении малых осцилляций решения. Для этого при выполнении неравенства

$$|\dot{U}_{j+1}^{n+1/2} - \dot{U}_j^{n+1/2}| < \varepsilon |\dot{U}_*^{n+1/2}|$$

полагается $\varphi_{j+1/2} = 0$. Здесь $|\dot{U}_*^{n+1/2}|$ – максимальное значение скорости перемещений в расчетной области, ε – допустимая погрешность. При измельчении КЭ-сетки такой подход приводит к сходящемуся решению, а при малом количестве элементов ограничивает рост высокочастотных колебаний по толщине пластин и оболочек, что существенно при исследовании их ударного взаимодействия со средами.

Изложенная процедура консервативного сглаживания численного решения с пространственно-временным анализатором монотонности реализована в рамках вычислительной системы «Динамика-3» [26].

4. Решение тестовых задач

Рассмотрена в трехмерной постановке одномерная задача о прохождении волны сжатия по закрепленному упругому слою (рис. 1). Расчетная область представляла собой параллелепипед, имеющий геометрические и механические характеристики: $L_1 = 10$ см, $L_2 = L_3 = 1$ см,

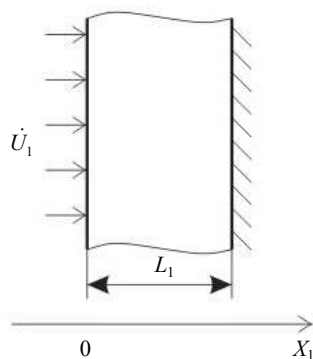


Рис. 1

модуль объемного сжатия $K = 1667 \cdot 10^2$ МПа, модуль сдвига $G = 769,2 \cdot 10^2$ МПа, плотность $\rho = 7,8$ г/см³. Для моделирования одномерного напряженно-деформированного состояния, соответствующего бесконечному в направлениях X_2 и X_3 слою, для всех узлов расчетной области компоненты скорости \dot{U}_2 и \dot{U}_3 полагались равными нулю. При $X_1 = 0$ задавалось граничное условие для скорости перемещений:

$$\dot{U}_1 = \begin{cases} 1 \text{ м/с}, & t \leq 6 \text{ мкс}, \\ 0, & t > 6 \text{ мкс}. \end{cases}$$

При $X_1 = L_1$ задавались условия жесткой заделки.

Для решения задачи расчетная область разбивалась сеткой из 50 конечных элементов ($N_1 = 50, N_2 = N_3 = 1$). Результаты решения задачи отображены на рис. 2, 3 в виде распределения продольной скорости перемещений вдоль оси X_1 в момент времени $t = 3,52t^*$, где t^* – время одного пробега продольной волны в упругом слое. На рис. 2 приведены результаты аналитического решения задачи (сплошная линия) и численного решения по схеме «крест» без сглаживания (штриховая линия).

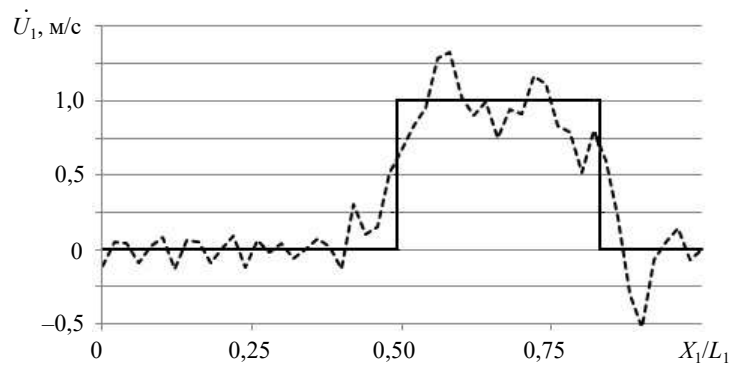


Рис. 2

На рис. 3 представлены результаты численного решения задачи по схеме «крест» с консервативным сглаживанием с применением пространственного (тонкая сплошная линия) и пространственно-временного (штриховая линия) анализаторов монотонности. Пунктирной линией на рис. 3 изображен результат решения задачи с применением линейной вязкости [4], толстой сплошной линией показано аналитическое решение.

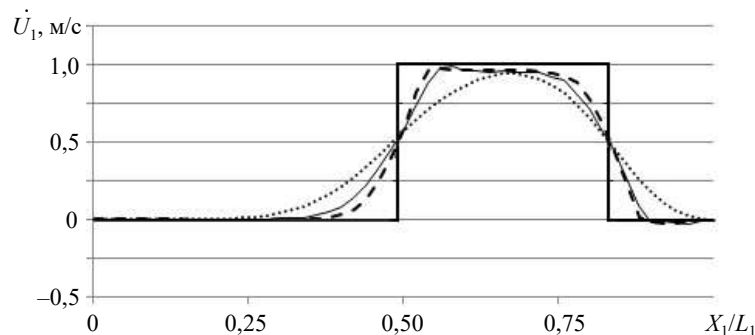


Рис. 3

Сравнительный анализ результатов решения показывает следующее.

1. Численный расчет разрывных решений без вязкости по явной схеме второго порядка точности имеет осциллирующий характер (амплитуда осцилляций достигает 30% и более).

2. Линейная вязкость сильно сглаживает фронты импульса и понижает его амплитуду.

3. Расхождение результатов решения задачи с консервативным сглаживанием с пространственным [18] и пространственно-временным анализаторами монотонности в описании фронтов импульса не превышает 3%.

Рассмотрим продольное соударение недеформируемого цилиндра ($R = 1,275$ см, $L = 4,7$ см) массой 100 г с круглой стальной пластиной ($R = 13$ см, $h = 4$ см,

$\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$, $K = 166,7 \text{ ГПа}$, $G = 76,92 \text{ ГПа}$, $\sigma_T = 500 \text{ МПа}$, $g = 500 \text{ МПа}$), жестко заземленной по контуру. В начальный момент времени для цилиндра задавалась продольная скорость $U_0 = 750 \text{ м/с}$. В качестве расчетной области рассматривалась 1/2 часть цилиндра и пластины ($X_3 \geq 0$), которые разбивались на 960 и 43520 конечных элементов соответственно (рис. 4).

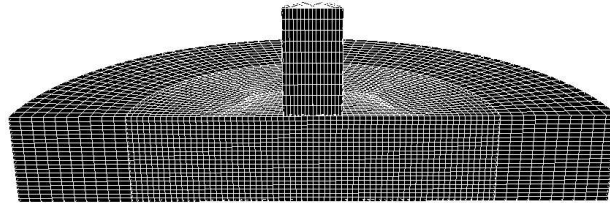


Рис. 4

На рис. 5 представлены конечно-элементные сетки в области контакта, полученные без применения (рис. 5а) и с применением консервативного сглаживания численного решения (рис. 5б) в момент окончания счета. В результате соударения в пластине образуются локальные зоны пластических деформаций, достигающие наибольшего значения вблизи края кратера. Без применения консервативного сглаживания численного решения удастся проследить только начальную стадию процесса соударения. Конечные элементы пластины в зоне контакта под действием удара цилиндра значительно искажаются (см. рис. 5а) и после 20 мкс решение прерывается из-за перехлеста отдельных конечных элементов. Применение процедуры консервативного сглаживания устраняет перехлест конечных элементов и позволяет проследить процесс проникания до момента отскока ударника.

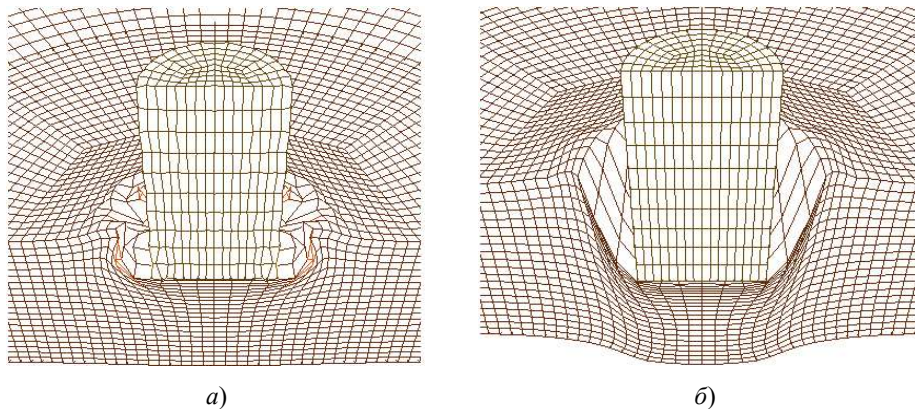


Рис. 5

Заключение

Результаты верификационных расчетов показали, что предлагаемая процедура консервативного сглаживания улучшает дисперсионные свойства конечно-разностной схемы типа «крест» и замедляет развитие моды нулевой энергии КЭ-сетки расчетной области (неустойчивость типа «песочные часы» [21]), возникающей в локальных зонах интенсивных нестационарных воздействий.

Список литературы

1. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.А. *Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел*. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2006. 349 с.
2. Минайлос А.Н. О значении монотонности конечно-разностных схем в методах сквозного счета. *ЖВМ и МФ*. 1977. Т. 17. №4. С. 1058–1063.
3. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. *Математический сборник*. 1959. Т. 47. №3. С. 271–306.
4. Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач*. М.: Мир, 1972. 420 с.
5. Boris J.P., Book D.L. Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *Journal of Computational Physics*. 1973. Vol. 11. Iss. 1. P. 38–69. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(73\)90147-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(73)90147-2).
6. Book D.L., Boris J.P., Hain K. Flux-corrected transport II: Generalizations of the method. *Journal of Computational Physics*. 1975. Vol. 18. Iss. 3. P. 248–283. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(75\)90002-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(75)90002-9).
7. Zalesak S.T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *Journal of Computational Physics*. 1979. Vol. 31. Iss. 3. P. 335–362. DOI: 10.1016/0021-9991(79)90051-2.
8. Löhner R., Morgan K., Vahdati M., Boris J.P., Book D.L. FEM-FCT: combining unstructured grids with high resolution. *Communications in Applied Numerical Methods*. 1988. Vol. 4. Iss. 6. P. 717–729. DOI: 10.1002/CNM.1630040605.
9. Boris J.P., Book D.L. Flux-corrected transport. *Journal of Computational Physics*. 1997. Vol. 135. Iss. 2. P. 172–186. DOI: 10.1006/JCPH.1997.5700.
10. Zalesak S.T. The design of Flux-Corrected Transport (FCT) algorithms for structured grids. In: *Flux-Corrected Transport*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2005. P. 29–78. DOI: 10.1007/978-94-007-4038-9_2.
11. Kuzmin D. Explicit and implicit FEM-FCT algorithms with flux linearization. *Journal of Computational Physics*. 2009. Vol. 228. Iss. 7. P. 2517–2534. DOI: 10.1016/j.jcp.2008.12.011.
12. *Flux-Corrected Transport: Principles, Algorithms, and Applications*. Eds. D. Kuzmin, R. Löhner, S. Turek. Dordrecht–Heidelberg–New York–London: Springer Science & Business Media, 2012. 462 p.
13. Лобановский Ю.И. О монотонизации конечно-разностных решений в методах сквозного счета. *ЖВМ и МФ*. 1979. Т. 12. №4. С. 1063–1069.
14. Жмакин А.И., Фурсенко А.А. Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета. *ЖВМ и МФ*. 1980. Т. 20. №4. С. 1021–1031.
15. Головизнин В.П., Жмакин А.И., Фурсенко А.А. Об одном методе расчета нестационарных взаимодействий ударных волн. *ЖВМ и МФ*. Т. 22. №2. 1982. С. 484–488.
16. Гурьянов А.А. Метод коррекции потоков для исследования волновых процессов деформирования пластин. *Аэрофизика и геокосмические исследования*. Сб. статей. М.: МФТИ, 1984. С. 111–115.
17. Гурьянов А.А. *Численное решение динамических задач теории оболочек методом коррекции потоков*. М., 1985. Деп. в ВИНТИ, 1985. №2832-85.
18. Баженов В.Г., Зефиоров С.В., Кочетков А.В. Численное исследование нестационарной дифракции упругой волны на цилиндрической оболочке. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация конструкций*. 1991. С. 71–78.
19. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. М.: Наука, 1986. 232 с.
20. Баженов В.Г., Демарева А.В., Жестков М.Н., Кибец А.И. Особенности численного моделирования упругопластического выпучивания полусферических оболочек при нагружении жестким индентором. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. №2. С. 22–33. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.02.

21. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. UK, Chichester: John Wiley & Sons., 2014. 830 p.
22. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Pearson, 2019. 1058 p.
23. Reddy J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*. New York: McGraw-Hill Education, 2019. 816 p.
24. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций*. М.: Физматлит, 2006. 391 с.
25. Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1995. №2. С. 20–26.
26. *Вычислительный комплекс «Динамика-3»*. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013.

References

1. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogulskiy I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.A. *Chislennoe reshenie dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdykh tel [Numerical Solution of Dynamic Problems of Elastic-Plastic Deformation of Solids]*. Novosibirsk. Sibirskoe universitetskoe izdatelstvo. 2006. 349 p. (In Russian).
2. Minailos A.N. Significance of the monotonicity of finite-difference schemes in shock-capturing methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1977. Vol. 17. Iss. 4. P. 235–240. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(77\)90124-0](https://doi.org/10.1016/0041-5553(77)90124-0).
3. Godunov S.K. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Sbornik: Mathematics*. 1959. Vol. 47. No 8-9. P. 357–393.
4. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. New York. London. Sydney. Wiley & Son. 1967. 405 p.
5. Boris J.P., Book D.L. Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys*. 1973. Vol. 11. Iss. 1. P. 38–69. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(73\)90147-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(73)90147-2).
6. Book D.L., Boris J.P., Hain K. Flux-corrected transport II: Generalizations of the method. *J. Comput. Phys*. 1975. Vol. 18. Iss. 3. P. 248–283. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(75\)90002-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(75)90002-9).
7. Zalesak S.T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys*. 1979. Vol. 31. Iss. 3. P. 335–362. DOI: 10.1016/0021-9991(79)90051-2.
8. Löhner R., Morgan K., Vahdati M., Boris J.P., Book D.L. FEM?FCT: combining unstructured grids with high resolution. *Communications in Applied Numerical Methods*. 1988. Vol. 4. Iss. 6. P. 717–729. DOI: 10.1002/CNM.1630040605.
9. Boris J.P., Book D.L. Flux-corrected transport. *J. Comput. Phys*. 1997. Vol. 135. Iss. 2. P. 172–186. DOI: 10.1006/JCPH.1997.5700.
10. Zalesak S.T. The design of Flux-Corrected Transport (FCT) algorithms for structured grids. In: *Flux-Corrected Transport*. Berlin. Heidelberg. Springer. 2005. P. 29–78. DOI: 10.1007/978-94-007-4038-9_2.
11. Kuzmin D. Explicit and implicit FEM-FCT algorithms with flux linearization. *J. Comput. Phys*. 2009. Vol. 228. Iss. 7. P. 2517–2534. DOI: 10.1016/j.jcp.2008.12.011.
12. *Flux-Corrected Transport: Principles, Algorithms, and Applications*. Eds. D. Kuzmin, R. Löhner, S. Turek. Dordrecht. Heidelberg. New York. London. Springer Science & Business Media. 2012. 462 p.
13. Lobanovskii Yu.I. On the monotonization of finite-difference solutions for shock-capturing methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1979. Vol. 19. Iss. 4. P. 285–291. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(79\)90179-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90179-4).
14. Zhmakin A.I., Fursenko A.A. On a monotonic shock-capturing difference scheme. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1980. Vol. 20. Iss. 4. P. 218–227. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(80\)90283-9](https://doi.org/10.1016/0041-5553(80)90283-9).

15. Goloviznin V.P., Zhmakin A.I., Fursenko A.A. On a method for calculating non-stationary interactions of shock waves. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1982. Vol. 22. Iss. 2. P. 249–253. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(82\)90058-1](https://doi.org/10.1016/0041-5553(82)90058-1).

16. Guryanov A.A. Metod korrektsii potokov dlya issledovaniya volnovykh protsessov deformirovaniya plastin [Flow correction method for studying wave processes of plate deformation]. *Aerofizika i geokosmicheskie issledovaniya. Collection of Papers*. Moscow. MFTI Publ. 1984. P. 111–115 (In Russian).

17. Guryanov A.A. *Chislennoe reshenie dinamicheskikh zadach teorii obolochek metodom korrektsii potokov [Numerical Solution of Dynamic Problems of Shell Theory by the Flux Correction Method]*. Moscow. 1985. Deponirovano v VINITI, 1985. No 2832-85 (In Russian).

18. Bazhenov V.G., Zefirov S.V., Kochetkov A.V. Chislennoe issledovanie nestatsionarnoy difraktsii uprugoy volny na tsilindricheskoy obolochke [Numerical study of unsteady diffraction of an elastic wave on a cylindrical shell]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Analiz i optimizatsiya konstruktivnykh [Applied Problems of Strength and Plasticity. Analysis and Optimisation]*. 1991. P. 71–78 (In Russian).

19. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bolshie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya [Large Elastoplastic Deformations: Theory, Algorithms, Applications]*. Moscow. Nauka Publ. 232 p. (In Russian).

20. Bazhenov V.G., Demareva A.V., Zhestkov M.N., Kibets A.I. Osobennosti chislenogo modelirovaniya uprugoplasticheskogo vypuchivaniya polusfericheskikh obolochek pri nagruzhении zhestkim indentorom [Special features of numerical simulation for elastic-plastic buckling of hemispherical shells under loading with the rigid indenter]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [Perm National Research Polytechnic University. Mechanics Bulletin]*. 2016. No 2. P. 22–33 (In Russian).

21. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. UK, Chichester. John Wiley & Sons. 2014. 830 p.

22. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Pearson. 2019. 1058 p.

23. Reddy J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*. New York. McGraw-Hill Education. 2019. 816 p.

24. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktivnykh [The Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2006. 392 p. (In Russian).

25. Bazhenov V.G., Kibets A.I., Tsvetkova I.N. Chislennoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov udarnogo vzaimodeystviya deformiruemykh elementov konstruktivnykh [Numerical simulation of unsteady processes of deformable structural elements impact interaction]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]*. 1995. No 2. P. 20–26 (In Russian).

26. *Vychislitelnyy kompleks "Dinamika-3" [Computing Complex "Dynamics-3"]*. Nauchno-tekhnicheskii tsentr po yadernoy i radiatsionnoy bezopasnosti. Attestatsionnyy pasport programmnogo sredstva. Registratsionnyy pasport attestatsii PS No 325 ot 18.04.2013 [Scientific and Technical Center for Nuclear and Radiation Safety. Certification passport software. Registration passport of certification PS No 325 dated 04.18.2013] (In Russian).

ALGORITHM FOR CONSERVATIVE SMOOTHING OF STRESS WAVES IN FEM

Bazhenov V.G., Kibets A.I., Demareva A.V., Kalinina Yu.A.

*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

Three-dimensional geometrically and physically nonlinear problems of nonstationary deformation of structures are considered. The defining system of equations is formulated in Lagrange variables. The equation of motion is derived from the balance of virtual work capacities. The elastic-plastic deformation of structural materials is described by the relations of the flow theory with isotropic

hardening. The solution of the problem is based on the moment scheme of the finite element method. The discretization of the problem by spatial variables is carried out by eight nodal finite elements with multilinear functions of the approximation form of the displacement velocity. Time integration is performed according to an explicit finite-difference scheme of the “cross” type, which does not have the monotonicity property. Due to the dispersion in the vicinity of the gap, it generates non-physical oscillations, which significantly limits the scope of its applicability. In this paper, to suppress high-frequency oscillations, it is proposed to use an algorithm for conservative smoothing of a numerical solution with a space-time monotony analyzer. Based on it, software modules have been developed for the “Dynamics-3” computing complex. Verification of the developed technique and its software implementation was carried out by solving a one-dimensional problem in a three-dimensional formulation of the compression wave passing through a fixed elastic layer. For comparison, the results of numerical solution of the problem according to the “cross” scheme without smoothing, with linear viscosity, with conservative smoothing using spatial and spatiotemporal monotonicity analyzers are obtained. The problem of penetration of an elastic cylinder into a round steel plate is solved in a three-dimensional formulation. It is shown that the developed technique not only suppresses high-frequency oscillations, but also prevents the occurrence of zero-energy modes. So, in the second problem, without using the procedure of conservative smoothing of the numerical solution, the final elements of the plate in the collision zone are significantly distorted, which leads to an early interruption of the calculation.

Keywords: nonlinear, non-stationary, monotonicity, finite element method, “cross” scheme, smoothing.