

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-3-311-330

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВИБРАЦИЙ
В ТОНКОСТЕННЫХ КАРКАСИРОВАННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ.
2. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ
И ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ***

© 2022 г. Паймушин В.Н.^{1,2}, Фирсов В.А.¹, Шишкин В.М.³

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, Казань, Российская Федерация*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Казань, Российская Федерация*

³*Вятский государственный университет, Киров, Российская Федерация*

vpajmushin@mail.ru

Поступила в редакцию 01.04.2022

На основе уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко построены одномерные конечные элементы для моделирования динамической реакции плоских стержней, имеющих на одной из лицевых поверхностей закреплённый участок конечной длины. Для анализа их стационарной динамической реакции при гармоническом внешнем воздействии сформирована система разрешающих уравнений в комплексной форме. Разработаны три модели кинематического сопряжения закреплённых и незакреплённых участков стержней с использованием уравнения связи между углом поворота поперечного сечения и осевым перемещением на границе между отмеченными частями стержня, переходного конечного элемента, а также концепции единого конечного элемента с узлами, расположенными на одной из его лицевых поверхностей. Отмечено, что для практической реализации наиболее удобной является модель, использующая для представления закреплённых и незакреплённых участков стержня единый конечный элемент. На основе указанной модели найдено конечно-элементное решение задачи о поперечных изгибных колебаниях консольно закреплённого плоского стержня в условиях вибрационного нагружения периодической осевой силой, приложенной к торцевому сечению закреплённого участка конечной длины, а также задачи о поперечных изгибных колебаниях стержня-полосы с двумя незакреплёнными концами и участком закрепления конечной длины между ними при вибрационном нагружении поперечной силой на одном из незакреплённых концов стержня. Результаты конечно-элементного решения этих двух задач хорошо согласуются с полученными ранее точными аналитическими решениями, построенными на основе сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Выявлено наличие значительной трансформации параметров напряженно-деформированного состояния рассмотренных стержней при

*Выполнено за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

переходе через границу от незакрепленных частей к участкам закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей.

Ключевые слова: конечный элемент, распространение вибраций, плоский стержень, участок закрепления конечной длины, уточненная модель С.П. Тимошенко, трансформация параметров напряженно-деформированного состояния.

Введение

Вопросам вибрационного нагружения тонкостенных каркасированных конструкций уделяется значительное внимание в научной литературе [1–5 и др.]. Однако необходимо отметить, что при этом практически не уделяется должного внимания проблемам формулировки граничных условий при тех или иных вариантах соединения стержневых элементов каркаса с тонкостенными элементами конструкций или их закрепления на жестких опорных элементах. Так, например, при постановке и решении даже статических задач механики деформирования стержней (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов) реальные условия закрепления их концевых участков конечной длины, как правило, заменяют условиями шарнирного опирания или защемления, что, безусловно, вносит погрешности в их решения за счет неучета деформативности отмеченных участков, а в случае вибрационного нагружения может качественно менять напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции.

Исходя из этого, в статье [6] на основе уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко и вариационного уравнения Гамильтона – Остроградского получены уравнения движения стержня-полосы, имеющего закрепленные участки конечной длины на одной из лицевых поверхностей. С использованием полученных уравнений найдено точное аналитическое решение задачи о поперечных изгибных колебаниях консольно закрепленного плоского стержня в условиях вибрационного нагружения периодической осевой силой, приложенной к торцевому сечению закрепленного участка конечной длины, а также задачи о поперечных изгибных колебаниях плоского стержня с двумя незакрепленными концами и участком закрепления конечной длины между ними при вибрационном нагружении поперечной силой на одном из незакрепленных концов.

Следует заметить, что использование аналитических методов анализа динамической реакции стержней, имеющих на одной из лицевых поверхностей участки закрепления конечной длины, ограничивается рамками простейших расчетных схем и достаточно простыми видами их нагружения. Для задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций (в том числе и плоских стержней) возможна пространственная постановка соответствующих задач и построение их численных решений на основе современных коммерческих пакетов прикладных программ [7, 8], основанных преимущественно на использовании метода конечных элементов (МКЭ) [9–15], что является желательным, но малоэффективным при их малой относительной толщине. Поэтому актуальным является вопрос разработки специализированного конечно-элементного и программного обеспечения на основе уточненных одномерных и двумерных моделей деформирования с высоким порядком точности. Простейшей из моделей, имеющей первый порядок точности, является известная сдвиговая модель С.П. Тимошенко, положенная в основу исследований в статье [6] для описания механики деформирования плоских стержней с участками закрепления

конечной длины на одной из лицевых поверхностей. Настоящая статья посвящена разработке конечно-элементного обеспечения для анализа динамической реакции указанных стержней и исследованию методов формирования систем разрешающих уравнений, обеспечивающих выполнение условий кинематического сопряжения конечных элементов и трансформацию параметров НДС при переходе через границу между закрепленными и незакрепленными частями стержня.

1. Конечные элементы для моделирования закрепленных и незакрепленных участков стержня

Простейший конечный элемент для представления участков закрепления конечной длины с неподвижной поверхностью $z = -t/2$ (рис. 1а) может быть построен в рамках модели С.П. Тимошенко на основе представления перемещений U_0 и W_0 произвольной точки элемента в виде

$$U_0 = u_0 + z\gamma_0, \quad W_0 = w_0 = 0$$

с ограничением $\gamma_0 = 2u_0/t$, где γ_0 – угол поворота поперечного сечения элемента, которое следует из условия $U_0|_{z=-t/2} = 0$. Узловыми параметрами элемента являются осевые перемещения $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}$, определяемые вектором $\{r_0^{(e)}\} = \{u_0^{(1)}, u_0^{(2)}\}$.

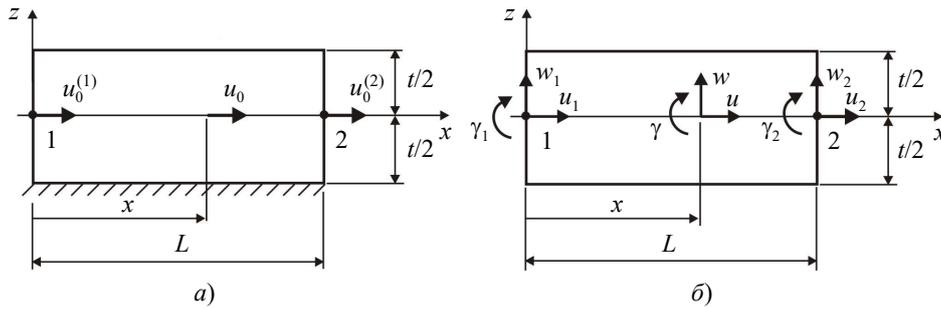


Рис. 1. Конечные элементы для моделирования закрепленных (а) и незакрепленных (б) участков стержня

Перемещение u_0 в пределах элемента представляется зависимостью

$$u_0 = \{N_1, N_2\}^T \{r_0^{(e)}\}, \quad N_1 = 1 - \xi, \quad N_2 = \xi, \quad \xi = x/L. \quad (1)$$

В случае малых перемещений u_0 и условия $W_0 = w_0 = 0$ имеют место кинематические соотношения

$$\varepsilon_x^0 = U'_0 = \left(1 + \frac{2z}{t}\right) u'_0, \quad \gamma_{xz}^0 = \gamma_0 = \frac{2u_0}{t}, \quad (2)$$

где ε_x^0 и γ_{xz}^0 – соответственно деформация на расстоянии z от продольной оси элемента и угол поперечного сдвига. Верхний штрих в (2) и далее означает дифференцирование соответствующей величины по переменной x . С учетом (1) соотношения (2) принимают вид:

$$\varepsilon_x^0 = \left(1 + \frac{2z}{t}\right) \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix}^T \{r_0^{(e)}\}, \quad \gamma_{xz}^0 = \frac{2}{t} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}^T \{r_0^{(e)}\}. \quad (3)$$

Материал стержня считается вязкоупругим. Упругие и демпфирующие свойства материала при растяжении-сжатии и поперечном сдвиге определяются модулями упругости E_1, G_{13} и логарифмическими декрементами колебаний (ЛДК) δ_1, δ_{13} . Для учета этих свойств используется классическая модель Кельвина – Фойгта [16, 17 и др.]:

$$\sigma_x^0 = E_1 \varepsilon_x^0 + \eta_1 \dot{\varepsilon}_x^0, \quad \sigma_{xz}^0 = G_{13} \gamma_{xz}^0 + \eta_{13} \dot{\gamma}_{xz}^0. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_x^0, \sigma_{xz}^0$ – нормальные и касательные напряжения; η_1, η_{13} – коэффициенты вязкости при указанных видах деформирования материала; $\dot{\varepsilon}_x^0, \dot{\gamma}_{xz}^0$ – производные от ε_x^0 и γ_{xz}^0 по времени τ . Коэффициенты η_1, η_{13} связаны с ЛДК δ_1 и δ_{13} соотношениями [18]

$$\eta_1 = \frac{E_1 \delta_1}{\pi \omega}, \quad \eta_{13} = \frac{G_{13} \delta_{13}}{\pi \omega}, \quad (5)$$

где ω – круговая частота деформирования материала. С учетом (5) зависимости (4) запишутся в виде

$$\sigma_x^0 = E_1 \left(\varepsilon_x^0 + \frac{\delta_1}{\pi \omega} \dot{\varepsilon}_x^0 \right), \quad \sigma_{xz}^0 = G_{13} \left(\gamma_{xz}^0 + \frac{\delta_{13}}{\pi \omega} \dot{\gamma}_{xz}^0 \right). \quad (6)$$

Подставляя в (6) представления (3), получаем связь напряжений $\sigma_x^0, \sigma_{xz}^0$ с узловыми перемещениями $\{r_0^{(e)}\}$ и узловыми скоростями $\{\dot{r}_0^{(e)}\}$ конечного элемента:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= E_1 \left(1 + \frac{2z}{t} \right) \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix}^T \left(\{r_0^{(e)}\} + \frac{\delta_1}{\pi \omega} \{\dot{r}_0^{(e)}\} \right), \\ \sigma_{xz}^0 &= \frac{2G_{13}}{t} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}^T \left(\{r_0^{(e)}\} + \frac{\delta_{13}}{\pi \omega} \{\dot{r}_0^{(e)}\} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Для получения уравнений движения конечного элемента воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода, взяв в качестве обобщенных координат его узловые перемещения $\{r_0^{(e)}\}$:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T_0^{(e)}}{\partial \{\dot{r}_0^{(e)}\}} \right) - \frac{\partial T_0^{(e)}}{\partial \{r_0^{(e)}\}} = - \frac{\partial \Pi_0^{(e)}}{\partial \{r_0^{(e)}\}} + \{Q_0^{(e)}\} + \{P_0^{(e)}\}. \quad (8)$$

Здесь $T_0^{(e)}, \Pi_0^{(e)}$ – соответственно кинетическая и потенциальная энергия деформации конечного элемента; $\{Q_0^{(e)}\}, \{P_0^{(e)}\}$ – векторы, содержащие соответственно демпфирующие и внешние узловые силы конечного элемента.

Выражение для $T_0^{(e)}$ имеет вид

$$T_0^{(e)} = \frac{1}{2} \rho b \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} \dot{U}_0^2 dz dx = \frac{1}{2} \rho b \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} \dot{u}_0^2 \left(1 + \frac{2z}{t} \right)^2 dz dx, \quad (9)$$

где ρ – плотность материала, b – ширина элемента. После вычисления в (9) определенного интеграла по переменной z и подстановки в него представления (1) получаем

$$\begin{aligned} T_0^{(e)} &= \frac{2}{3} \rho b t \{\dot{r}_0^{(e)}\}^T \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}^T dx \{\dot{r}_0^{(e)}\} = \\ &= \frac{2}{3} \rho b t \{\dot{r}_0^{(e)}\}^T \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{bmatrix} dx \{\dot{r}_0^{(e)}\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражение (10) можно записать в виде

$$T_0^{(e)} = \frac{1}{2} \{ \dot{r}_0^{(e)} \}^T [M_0^{(e)}] \{ \dot{r}_0^{(e)} \}, \quad (11)$$

где

$$[M_0^{(e)}] = \frac{4}{3} \rho b t \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{bmatrix} dx = \frac{2}{9} \rho b t L \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

– матрица масс конечного элемента.

Величина $\Pi_0^{(e)}$ определяется выражением

$$\Pi_0^{(e)} = \frac{1}{2} E_1 b \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} (\varepsilon_x^0)^2 dz dx + \frac{1}{2} G_{13} b \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} (\gamma_{xz}^0)^2 dz dx, \quad (13)$$

которое с учетом зависимостей (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_0^{(e)} = & \frac{1}{2} E_1 b \{ r_0^{(e)} \}^T \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} \left(1 + \frac{2z}{t} \right)^2 \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix}^T dz dx \{ r_0^{(e)} \} + \\ & + \frac{2G_{13}b}{t^2} \{ r_0^{(e)} \}^T \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}^T dz dx \{ r_0^{(e)} \}. \end{aligned} \quad (14)$$

После вычисления в (14) определенных интегралов по переменной z получаем

$$\Pi_0^{(e)} = \frac{2}{3} E_1 b t \{ r_0^{(e)} \}^T \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix}^T dx \{ r_0^{(e)} \} + \frac{2G_{13}b}{t} \{ r_0^{(e)} \}^T \int_0^L \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}^T dx \{ r_0^{(e)} \}.$$

Последнее выражение можно записать в виде

$$\Pi_0^{(e)} = \frac{1}{2} \{ r_0^{(e)} \}^T [K_0^{(e)}] \{ r_0^{(e)} \}, \quad (15)$$

где

$$[K_0^{(e)}] = \frac{4}{3} E_1 b t \int_0^L \begin{bmatrix} N_1' N_1' & N_1' N_2' \\ N_2' N_1' & N_2' N_2' \end{bmatrix} dx + \frac{4G_{13}b}{t} \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 N_1 & N_1 N_2 \\ N_2 N_1 & N_2 N_2 \end{bmatrix} dx \quad (16)$$

– матрица жесткости конечного элемента. После нахождения в (16) определенных интегралов окончательно получаем

$$[K_0^{(e)}] = \frac{4}{3} \frac{E_1 b t}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \frac{G_{13} b L}{t} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Для определения демпфирующих узловых сил $\{Q_0^{(e)}\}$ можно использовать выражение $\{Q_0^{(e)}\} = \delta A_0^{(e)} / \{ \delta r_0^{(e)} \}$, где $\delta A_0^{(e)}$ – возможная работа неупругих частей напряжений σ_x^0 и σ_{xz}^0 в объеме конечного элемента, соответствующая его возможным узловым перемещениям $\{ \delta r_0^{(e)} \}$. Выражение для $\delta A_0^{(e)}$ можно представить в виде

$$\delta A_0^{(e)} = -\{ \delta r_0^{(e)} \} [C_0^{(e)}] \{ \dot{r}_0^{(e)} \},$$

где $[C_0^{(e)}]$ – матрица демпфирования конечного элемента. Отсюда следует, что демпфирующие узловые силы

$$\{Q_0^{(e)}\} = -[C_0^{(e)}] \{ \dot{r}_0^{(e)} \}. \quad (18)$$

Будем считать, что ЛДК материала δ_1, δ_{13} при растяжении-сжатии и сдвиге постоянны, то есть не зависят от амплитуд соответствующих деформаций. Тогда в соответствии с (7) матрицу $[C_0^{(e)}]$ можно получить из матрицы $[K_0^{(e)}]$, заменяя в ней модули упругости E_1, G_{13} соответственно величинами $E_1\delta_1/(\pi\omega)$ и $G_{13}\delta_{13}/(\pi\omega)$:

$$[C_0^{(e)}] = \frac{4bt}{3L} \frac{E_1\delta_1}{\pi\omega} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2bL}{3t} \frac{G_{13}\delta_{13}}{\pi\omega} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

После подстановки в (8) соотношений (11), (15), (18) и выполнения необходимых операций дифференцирования получаем систему уравнений движения конечного элемента незакрепленной части стержня:

$$[M_0^{(e)}] \{\ddot{r}_0^{(e)}\} + [C_0^{(e)}] \{\dot{r}_0^{(e)}\} + [K_0^{(e)}] \{r_0^{(e)}\} = \{P_0^{(e)}\}. \quad (19)$$

Для представления незакрепленных участков стержня используется конечный элемент с шестью степенями свободы (рис. 1б), работающий в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Узловыми параметрами элемента являются осевые перемещения u_1, u_2 , прогибы w_1, w_2 и углы поворота поперечных сечений γ_1, γ_2 , задаваемые вектором $\{r^{(e)}\} = \{u_1, w_1, \gamma_1, u_2, w_2, \gamma_2\}$. Осевое перемещение u в пределах элемента аппроксимируется зависимостью

$$u = \{N\}^T \{r^{(e)}\}, \quad (20)$$

где $\{N\} = \{N_1, 0, 0, N_2, 0, 0\}$, $N_1 = 1 - \xi$, $N_2 = \xi$, $\xi = x/L$. Прогиб w и угол поворота γ поперечного сечения представляются зависимостями

$$w = \{H\}^T \{r^{(e)}\}, \quad \gamma = \{S\}^T \{r^{(e)}\} \quad (21)$$

с векторами $\{H\} = \{0, H_1, H_2, 0, H_3, H_4\}$, $\{S\} = \{0, S_1, S_2, 0, S_3, S_4\}$, где H_j, S_j ($j = \overline{1, 4}$) – базисные функции, имеющие вид [19, 20]:

$$\begin{aligned} H_1 &= (1 - \xi)(\mu\xi - 2\mu\xi^2 + 1), & H_2 &= -0,5L\xi(1 - \xi)(\mu - 2\mu\xi + 1), \\ H_3 &= \xi(3\mu\xi - 2\mu\xi^2 - \mu + 1), & H_4 &= 0,5L\xi(1 - \xi)(-\mu + 2\mu\xi + 1), \\ S_1 &= \frac{6\mu\xi}{L}(1 - \xi), & S_2 &= -(1 - \xi)(3\mu\xi - 1), \\ S_3 &= -\frac{6\mu\xi}{L}(1 - \xi), & S_4 &= \xi(3\mu\xi - 3\mu + 1), \\ \mu &= \frac{1}{1 + 12D/(B_{13}L^2)}, & D &= \frac{E_1t^3}{12}, & B_{13} &= G_{13}t. \end{aligned} \quad (22)$$

Для деформации ε_x , угла сдвига γ_{xz} и напряжений σ_x, σ_{xz} имеют место соотношения

$$\varepsilon_x = u' + z\gamma', \quad \gamma_{xz} = w' + \gamma, \quad (23)$$

$$\sigma_x = E_1 \left(\varepsilon_x + \frac{\delta_1}{\pi\omega} \dot{\varepsilon}_x \right), \quad \sigma_{xz} = G_{13} \left(\gamma_{xz} + \frac{\delta_{13}}{\pi\omega} \dot{\gamma}_{xz} \right). \quad (24)$$

Подставляя в (23) и (24) представления (20) и (21), получаем

$$\varepsilon_x = (\{N'\}^T + z\{S'\}^T) \{r^{(e)}\}, \quad \gamma_{xz} = (\{H'\}^T + \{S\}^T) \{r^{(e)}\}, \quad (25)$$

$$\sigma_x = E_1 (\{N'\}^T + z\{S'\}^T) \{r^{(e)}\} + \frac{E_1\delta_1}{\pi\omega} (\{N'\}^T + z\{S'\}^T) \{\dot{r}^{(e)}\}, \quad (26)$$

$$\sigma_{xz} = G_{13}(\{H\}^T + \{S\}^T)\{r^{(e)}\} + \frac{E_1 \delta_{13}}{\pi \omega} (\{H\}^T + \{S\}^T)\{\dot{r}^{(e)}\}. \quad (27)$$

Запишем уравнения Лагранжа второго рода, взяв в качестве обобщенных координат узловые перемещения $\{r^{(e)}\}$ конечного элемента:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial \{\dot{r}^{(e)}\}} \right) - \frac{\partial T^{(e)}}{\partial \{r^{(e)}\}} = - \frac{\partial \Pi^{(e)}}{\partial \{r^{(e)}\}} + \{Q^{(e)}\} + \{P^{(e)}\}. \quad (28)$$

Кинетическая энергия элемента имеет вид

$$T^{(e)} = \frac{1}{2} \rho b \int_{-l/2}^{l/2} [\dot{w}^2 + (\dot{u} + z\dot{\gamma})^2] dz dx. \quad (29)$$

Подчиняя (29) аппроксимациям (20), (21) и интегрируя по переменной z , получаем

$$T^{(e)} = \frac{1}{2} \rho b t \{\dot{r}^{(e)}\}^T \int_0^L \left(\{H\} \{H\}^T + \{N\} \{N\}^T + \frac{t^2}{12} \{S\} \{S\}^T \right) dx \{\dot{r}^{(e)}\}. \quad (30)$$

Выражение (30) можно представить в виде

$$T^{(e)} = \frac{1}{2} \{\dot{r}^{(e)}\}^T [M^{(e)}] \{\dot{r}^{(e)}\}, \quad (31)$$

где

$$[M^{(e)}] = [M_1^{(e)}] + [M_2^{(e)}] + [M_3^{(e)}]$$

– матрица масс конечного элемента, состоящая из матриц

$$\begin{aligned} [M_1^{(e)}] &= \rho b t \int_0^L \{H\} \{H\}^T dx, & [M_2^{(e)}] &= \rho b t \int_0^L \{N\} \{N\}^T dx, \\ [M_3^{(e)}] &= \rho b \frac{t^3}{12} \int_0^L \{S\} \{S\}^T dx. \end{aligned} \quad (32)$$

После нахождения в (32) произведений $\{H\} \{H\}^T$, $\{N\} \{N\}^T$, $\{S\} \{S\}^T$ и вычисления определенных интегралов получаем:

$$\begin{aligned} [M_1^{(e)}] &= \frac{\rho b t L}{840} \times \\ &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\mu^2 + 28\mu + 280 & -L(2\mu^2 + 7\mu + 35) & 0 & -4\mu^2 - 28\mu + 140 & -L(2\mu^2 + 7\mu - 35) \\ 0 & -L(2\mu^2 + 7\mu + 35) & L^2(\mu^2 + 7) & 0 & L(2\mu^2 + 7\mu - 35) & L^2(\mu^2 - 7) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\mu^2 - 28\mu + 140 & L(2\mu^2 + 7\mu - 35) & 0 & 4\mu^2 + 28\mu + 280 & L(2\mu^2 + 7\mu + 35) \\ 0 & -L(2\mu^2 + 7\mu - 35) & L^2(\mu^2 - 7) & 0 & L(2\mu^2 + 7\mu + 35) & L^2(\mu^2 + 7) \end{bmatrix}, \\ [M_2^{(e)}] &= \frac{\rho b t L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$[M_3^{(e)}] = \frac{\rho b t^3 L}{360} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36\mu^2/L^2 & -3\mu(6\mu-5)/L & 0 & -36\mu^2/L^2 & -3\mu(6\mu-5)/L \\ 0 & -3\mu(6\mu-5)/L & 9\mu^2-15\mu+10 & 0 & 3\mu(6\mu-5)/L & 9\mu^2-15\mu+5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36\mu^2/L^2 & 3\mu(6\mu-5)/L & 0 & 36\mu^2/L^2 & 3\mu(6\mu-5)/L \\ 0 & -3\mu(6\mu-5)/L & 9\mu^2-15\mu+5 & 0 & 3\mu(6\mu-5)/L & 9\mu^2-15\mu+10 \end{bmatrix}.$$

Потенциальная энергия деформации конечного элемента имеет вид

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} E_1 b \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} \varepsilon_x^2 dz dx + \frac{1}{2} G_{13} b \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} \gamma_{xz}^2 dz dx.$$

Принимая во внимание зависимости (25), получаем

$$\begin{aligned} \Pi^{(e)} = & \frac{1}{2} \{r^{(e)}\}^T \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} E_1 b (\{N'\} + z\{S'\}) (\{N'\}^T + z\{S'\}^T) dz dx \{r^{(e)}\}^T + \\ & + \frac{1}{2} \{r^{(e)}\}^T \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} G_{13} b (\{H'\} + \{S'\}) (\{H'\}^T + \{S'\}^T) dz dx \{r^{(e)}\}. \end{aligned} \quad (33)$$

После нахождения в (33) определенных интегралов по переменной z выражение для $\Pi^{(e)}$ можно записать в виде

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{2} \{r^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{r^{(e)}\}, \quad (34)$$

где

$$[K^{(e)}] = [K_1^{(e)}] + [K_2^{(e)}] + [K_3^{(e)}]$$

– матрица жесткости конечного элемента, состоящая из матриц

$$\begin{aligned} [K_1^{(e)}] &= E_1 b t \int_0^L \{N'\} \{N'\}^T dx, \quad [K_2^{(e)}] = D b \int_0^L \{S'\} \{S'\}^T dx, \\ [K_3^{(e)}] &= G_{13} b t \int_0^L (\{H'\} \{H'\}^T + \{S'\} \{S'\}^T + \{H'\} \{S'\}^T + \{S'\} \{H'\}^T) dx. \end{aligned} \quad (35)$$

Находя в (35) производные $\{N'\}$, $\{S'\}$, $\{H'\}$ и вычисляя после этого определенные интегралы, получаем

$$[K_1^{(e)}] = \frac{E_1 b t}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[K_2^{(e)}] = \frac{Db\mu^2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/L^2 & -6/L & 0 & -12/L^2 & -6/L \\ 0 & -6/L & 3+1/\mu^2 & 0 & 6/L & 3-1/\mu^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12/L^2 & 6/L & 0 & 12/L^3 & 6/L \\ 0 & -6/L & 3-1/\mu^2 & 0 & 6/L & 3+1/\mu^2 \end{bmatrix},$$

$$[K_3^{(e)}] = \frac{G_{13}bt}{4L}(1-\mu)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2L & 0 & -4 & -2L \\ 0 & -2L & L^2 & 0 & 2L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2L & 0 & 4 & 2L \\ 0 & -2L & L^2 & 0 & 2L & L^2 \end{bmatrix}.$$

Интересно отметить, что при $G_{13} \rightarrow \infty$ угол сдвига $\gamma_{xz} \rightarrow 0$, а параметр μ в матрице $[K_3^{(e)}]$, как следует из (22), стремится к единице. При этом матрица $[K_3^{(e)}]$, как и должно быть, становится практически нулевой, а матрица $[K_2^{(e)}]$ соответствует классической модели Кирхгофа – Лява. Матрица демпфирования $[C^{(e)}]$ конечного элемента для моделирования незакрепленных частей стержня получается, как и прежде, из матрицы жесткости $[K^{(e)}]$ путем замены в ней модулей упругости E_1, G_{13} величинами $E_1\delta_1/(\pi\omega)$ и $E_{13}\delta_{13}/(\pi\omega)$, что дает демпфирующие узловые силы

$$\{Q^{(e)}\} = -[C^{(e)}]\{\dot{r}^{(e)}\}. \quad (36)$$

После подстановки в (28) соотношений (31), (34), (36) получаем систему уравнений движения конечного элемента для моделирования незакрепленных частей стержня

$$[M^{(e)}]\{\ddot{r}^{(e)}\} + [C^{(e)}]\{\dot{r}^{(e)}\} + [K^{(e)}]\{r^{(e)}\} = \{P^{(e)}\}. \quad (37)$$

Будем считать, что на элемент действует постоянная по его длине поверхностная нагрузка $p(\tau)$. Для определения внешних узловых сил $\{P^{(e)}\}$ можно воспользоваться условием равенства работ этих сил и нагрузки $p(\tau)$ в пределах конечного элемента:

$$\{P^{(e)}\}^T \{r^{(e)}\} = bp(\tau) \int_0^L w dx = bp(\tau) \int_0^L \{H\}^T dx \{r^{(e)}\}.$$

Отсюда следует

$$\{P^{(e)}\} = \{P^{(e)}(\tau)\} = bp(\tau) \int_0^L \{H\} dx = bp(\tau)L \int_0^1 \{H\} d\xi.$$

После нахождения определенного интеграла получаем

$$\{P^{(e)}\} = \{P^{(e)}(\tau)\} = \frac{p(\tau)bL}{12} \{0, 6, L, 0, 6, -L\}.$$

2. Методы обеспечения кинематических условий сопряжения закрепленных и незакрепленных участков стержня при формировании системы разрешающих уравнений

Рассмотрим стержень с закрепленным концевым участком длиной l по поверхности $z = -l/2$ при действии поверхностной нагрузки $p(\tau)$ (рис. 2).

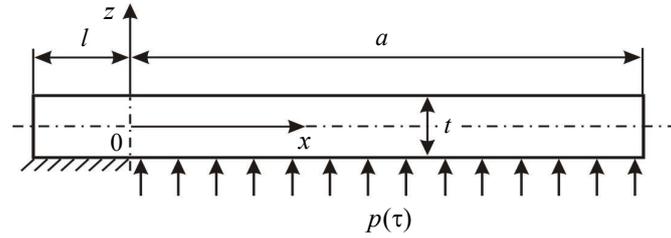


Рис. 2. Схема закрепления и нагружения стержня

Система уравнений движения конечно-элементной модели стержня строится путем объединения матричных уравнений динамического равновесия конечных элементов по направлениям их общих узловых перемещений:

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{P\}. \quad (38)$$

Здесь $[M]$, $[C]$, $[K]$, $\{r\}$, $\{P\}$ – соответственно матрица масс, матрица демпфирования, матрица жесткости, вектор узловых перемещений и вектор внешних узловых сил (вектор нагрузки) представленной модели.

Будем считать, что узловые силы $\{P\}$ меняются по гармоническому закону

$$\{P\} = \{\tilde{P}\} e^{i\omega\tau} \quad (39)$$

с амплитудой $\{\tilde{P}\}$ и круговой частотой ω (i – мнимая единица). Стационарное решение системы (38) отыскиваем в виде

$$\{r\} = e^{i\omega\tau} [D_\varphi] \{\tilde{r}\}, \quad (40)$$

где $[D_\varphi]$ – диагональная матрица с элементами $e^{-i\varphi_k}$; φ_k – сдвиг фаз компонент вектора $\{\tilde{r}\}$, содержащего амплитуды узловых перемещений стержня, по отношению к соответствующим компонентам вектора $\{\tilde{P}\}$. Подставляя (39) и (40) в уравнения (38) и сокращая после этого общий множитель $e^{i\omega\tau}$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно вектора комплексных узловых перемещений $\{r^*\}$ конечно-элементной модели стержня

$$[K^*]\{r^*\} = \{P^*\}, \quad (41)$$

где

$$[K^*] = [K] - \omega^2[M] - i\omega[C], \quad \{P^*\} = \{\tilde{P}\}. \quad (42)$$

Систему (41) можно решить с использованием любого пакета компьютерной математики, позволяющего работать с комплексными числами (например, популярного пакета MATLAB [21–23]), в результате чего находится вектор $\{r^*\} = \{r_a\} + i\{r_b\}$, что дает возможность определить амплитуды узловых перемещений \tilde{r}_k и сдвиги фаз φ_k :

$$\tilde{r}_k = \sqrt{r_{a,k}^2 + r_{b,k}^2}, \quad \text{tg } \varphi_k = \frac{r_{b,k}}{r_{a,k}}.$$

Здесь $r_{a,k} = \tilde{r}_k \cos \varphi_k$, $r_{b,k} = \tilde{r}_k \sin \varphi_k$ – элементы векторов $\{r_a\}$ и $\{r_b\}$, представляющих соответственно вещественную и мнимую части комплексного вектора $\{r^*\}$. Однако вследствие того, что для моделирования закрепленной и незакрепленной частей стержня используются конечные элементы с различным набором узловых параметров (см. рис. 1), для получения адекватного решения системы (41) в сечении

$x = 0$ необходимо удовлетворить кинематическим условиям сопряжения отмеченных частей стержня, записанным в комплексной форме:

$$u_0^*|_{x=0} = u^*|_{x=0}, \quad w^*|_{x=0} = 0, \quad \frac{2u_0^*|_{x=0}}{t} = \gamma^*|_{x=0}. \quad (43)$$

Первое из этих условий при формировании системы (41) выполняется автоматически, поскольку для элементов, расположенных непосредственно слева и справа от сечения $x = 0$, комплексные узловые перемещения $u_0^*|_{x=0}$ и $u^*|_{x=0}$ являются общими. Второе условие можно обеспечить, обнуляя строки и столбцы комплексной матрицы $[K^*]$ с номером i , соответствующим прогибу $w^*|_{x=0}$ незакрепленной части стержня, за исключением элемента k_{ii}^* . В векторе $\{P^*\}$ соответственно обнуляется элемент P_i^* . Тогда уравнение с номером i системы (41) будет таким: $k_{ii}^* r_i^* = 0$, что дает $r_i^* = w^*|_{x=0} = 0$.

Второй способ выполнения условия $w^*|_{x=0} = 0$ может состоять в умножении элемента k_{ii}^* на параметр штрафа $\alpha = 10^8 - 10^{10}$ [12, 13]. В результате уравнение с номером i системы (41) получается следующим:

$$k_{i1}^* r_1^* + k_{i2}^* r_2^* + \dots + k_{ii}^* \alpha r_i^* + \dots + k_{in}^* r_n^* = P_i^*.$$

Пренебрегая в этом уравнении всеми слагаемыми, кроме $k_{ii}^* \alpha r_i^*$, получаем $r_i^* = w^*|_{x=0} = P_i^* / (k_{ii}^* \alpha) \approx 0$ с точностью до $10^{-8} - 10^{-10}$.

Третье условие в (43) необходимо для исключения поворота незакрепленной части стержня как абсолютно твердого тела относительно сечения $x = 0$. Для обеспечения этого условия систему (41), следуя методу неопределенных множителей Лагранжа [14], необходимо дополнить уравнением связи

$$2u_0^*|_{x=0} - t\gamma^*|_{x=0} = 0, \quad (44)$$

что реализуется добавлением к матрице $[K^*]$ строки и столбца с элементами 2 и $-t$ в ячейках с номерами, соответствующими номерам узловых параметров $u_0^*|_{x=0}$ и $\gamma^*|_{x=0}$ в конечно-элементной модели стержня. Вектор $\{r^*\}$ дополняется неопределенным множителем Лагранжа λ , а вектор нагрузки $\{P^*\}$ дополняется нулем. Таким образом, получаем расширенную систему уравнений $[K^*]_+ \{r^*\}_+ = \{P^*\}_+$, порядок которой на единицу превышает порядок исходной системы (41). При этом матрица $[K^*]_+$ получается симметричной, но не имеет характерной при расчете протяженных конструкций ленточной структуры, что не позволяет использовать эффективные экономичные методы формирования и решения систем линейных алгебраических уравнений, ориентированные на такую структуру матрицы [15, 24, 25].

Второй способ кинематического сопряжения закрепленных и незакрепленных участков стержня может состоять во введении между ними специального переходного конечного элемента (рис. 3а), расположенного непосредственно справа от сечения $x = 0$ (см. рис. 2), с вектором узловых перемещений $\{r_p^{(e)}\} = \{u_{1p}, u_{2p}, w_{2p}, \gamma_{2p}\}$. При этом первое условие в (43) обеспечивается непосредственно при автоматизированной сборке системы (41), поскольку, как уже отмечалось выше, осевые перемещения в сечении $x = 0$ для сопрягаемых элементов являются общими.

Второе условие в (43) обеспечивается за счет отсутствия прогибов w в закрепленной части стержня (в том числе и в сечении $x = 0$). Третьему условию в (43) можно удовлетворить с помощью преобразования

$$\{r^{(e)}\} = [F] \{r_p^{(e)}\}, \quad (45)$$

где $\{r^{(e)}\} = \{u_1, w_1, \gamma_1, u_2, w_2, \gamma_2\}$ – вектор узловых перемещений элемента незакрепленной части стержня (см. рис. 1б), $[F]$ – матрица преобразования:

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставляя преобразование (45) в уравнения (37) и применяя после этого процедуру метода Бубнова – Галеркина, приходим к системе уравнений

$$[M_p^{(e)}] \{\dot{r}_p^{(e)}\} + [C_p^{(e)}] \{\dot{r}_p^{(e)}\} + [K_p^{(e)}] \{r_p^{(e)}\} = \{P_p^{(e)}\}, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} [M_p^{(e)}] &= [F]^T [M^{(e)}] [F], & [C_p^{(e)}] &= [F]^T [C^{(e)}] [F], \\ [K_p^{(e)}] &= [F]^T [K^{(e)}] [F], & \{P_p^{(e)}\} &= [F]^T \{P^{(e)}\} \end{aligned}$$

– соответственно матрица масс, матрица демпфирования, матрица жесткости и вектор нагрузки переходного конечного элемента. Описанный способ кинематического сопряжения закрепленных и незакрепленных частей стержня с введением переходного конечного элемента сохраняет симметрию и ленточную структуру системы разрешающих уравнений (41), но приводит к значительным трудностям при разработке вычислительной программы в случае нескольких закрепленных участков.

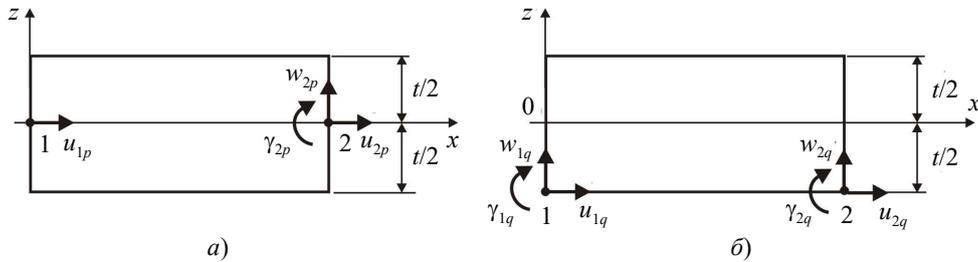


Рис. 3. Переходной (а) и модифицированный (б) конечные элементы

Отмеченные недостатки обоих способов кинематического сопряжения участков стержня можно обойти, если для моделирования закрепленных участков использовать в качестве исходного тот же элемент, который использовался для моделирования незакрепленных участков стержня (см. рис. 1б). Но при этом возникает проблема учета условий $u^*|_{z=-t/2} = 0$ и $w^*|_{z=-t/2} = 0$ в закрепленной части стержня, обусловленная тем, что узловые перемещения $\{r^{(e)}\}$ исходного (незакрепленного) элемента находятся не на линии $z = -t/2$, а на его продольной оси, где $z = 0$. Однако эта проблема легко решается с использованием линейного преобразования

$$\{r^{(e)}\} = [G] \{q^{(e)}\}, \quad (47)$$

где $\{q^{(e)}\} = \{u_{1q}, w_{1q}, \gamma_{1q}, u_{2q}, w_{2q}, \gamma_{2q}\}$ – вектор узловых перемещений модифицированного конечного элемента с узлами, расположенными на поверхности $z = -t/2$ (рис. 3б). Матрица $[G]$ имеет вид

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

С учетом (47) вместо (37) получаем систему уравнений

$$[M_q^{(e)}] \{\ddot{q}^{(e)}\} + [C_q^{(e)}] \{\dot{q}^{(e)}\} + [K_q^{(e)}] \{q^{(e)}\} = \{P_q^{(e)}\}, \quad (48)$$

где

$$[M_q^{(e)}] = [G]^T [M^{(e)}] [G], \quad [C_q^{(e)}] = [G]^T [C^{(e)}] [G], \\ [K_q^{(e)}] = [G]^T [K^{(e)}] [G], \quad \{P_q^{(e)}\} = [G]^T \{P^{(e)}\}.$$

Предлагаемый модифицированный конечный элемент можно использовать и для моделирования незакрепленных участков стержня, оставляя все узлы конечно-элементной модели стержня на поверхности $z = -t/2$ и считая данный элемент единым для всего стержня. Это дает возможность вместо (41) сформировать систему разрешающих уравнений относительно вектора комплексных узловых перемещений $\{q^*\}$ конечно-элементной модели стержня

$$[K_q^*] \{q^*\} = \{P_q^*\}. \quad (49)$$

Матрица $[K_q^*]$ имеет полуширину ленты $s = 6$ и может быть сформирована в виде прямоугольной матрицы $[A_q^*]$: первый столбец такой матрицы содержит элементы главной диагонали матрицы $[K_q^*]$, остальные столбцы матрицы $[A_q^*]$ содержат верхние диагонали ленты. Это позволяет использовать эффективные алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений, ориентированные на указанную структуру матрицы. Учет условий $u|_{z=-t/2}^* = 0$ и $w|_{z=-t/2}^* = 0$ в закрепленных частях стержня реализуется умножением элементов первого столбца матрицы $[A_q^*]$ с номерами i , соответствующими номерам нулевых перемещений, на параметр штрафа $\alpha = 10^8 - 10^{10}$. Узловые перемещения конечных элементов $\{q^{(e)*}\}$ извлекаются из вектора $\{q^*\}$ в соответствии с их порядковыми номерами в конечно-элементной модели стержня. Для перехода к комплексным узловым перемещениям $\{r^{(e)*}\}$, необходимым при определении комплексных напряжений в конечных элементах, можно использовать преобразование (47) с заменой в нем узловых параметров $\{r^{(e)}\}$ и $\{q^{(e)}\}$ их комплексными аналогами:

$$\{r^{(e)*}\} = [G] \{q^{(e)*}\}. \quad (50)$$

3. Численные эксперименты и анализ полученных результатов

Эксперимент 1. Определялась динамическая реакция плоского стержня (рис. 4) при действии вибрационной нагрузки в виде гармонической осевой силы $P = \tilde{P} e^{i\omega t}$ с амплитудой $\tilde{P} = 50$ кН/м (на единицу ширины стержня) и круговой час-

тотой $\omega = 2\pi f$ при $f = 60$ Гц, близкой к низшей собственной частоте $f_1 = 60,932$ Гц. Материал стержня – однонаправленный волокнистый композит на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с характеристиками: $E_1 = 100$ ГПа, $G_{13} = 1$ ГПа, $\delta_1 = 0,05$, $\delta_{13} = 0,1$, $\rho = 1500$ кг/м³. Геометрические параметры стержня: $l = 30$ мм, $a = 250$ мм, $b = 20$ мм, $t = 3$ мм. Закрепленная часть стержня моделировалась 50 элементами одинаковой длины. Незакрепленная часть стержня разбивалась на 100 конечных элементов.

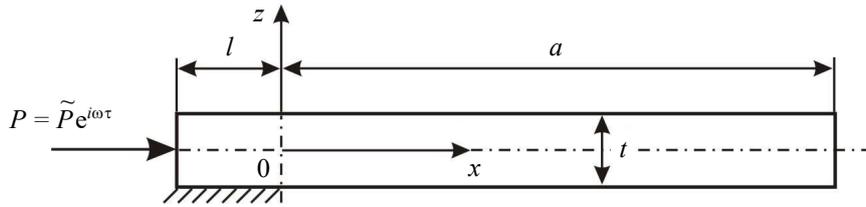


Рис. 4. Схема закрепления и нагружения стержня

Для проведения вычислительных экспериментов использовались три конечно-элементные модели. В модели 1 закрепленная и незакрепленная части стержня представлялись различными конечными элементами, показанными соответственно на рис. 1а, б. Для учета условий кинематического сопряжения (43) указанных частей стержня использовался параметр штрафа $\alpha = 10^8$ и уравнение связи (44). В модели 2 закрепленная и незакрепленная части стержня представлялись теми же элементами, что и в модели 1, а условия кинематического сопряжения (43) учитывались использованием переходного конечного элемента (см. рис. 3а). В модели 3 для представления закрепленной и незакрепленной частей стержня использовался единый модифицированный конечный элемент (см. рис. 3б) с узловыми перемещениями $\{q^{(e)}\} = \{u_{1q}, w_{1q}, \gamma_{1q}, u_{2q}, w_{2q}, \gamma_{2q}\}$, расположенными на поверхности $z = -t/2$. Учет нулевых узловых перемещений на поверхности закрепленной части стержня осуществлялся с использованием прежнего параметра штрафа $\alpha = 10^8$.

Вычисления показали, что все три модели дают практически одинаковые параметры НДС стержня. При этом для практической реализации наиболее удобной является модель 3, в которой для представления закрепленной и незакрепленной частей стержня используется единый модифицированный элемент. На рис. 5 приведены амплитуды прогибов \tilde{w} стержня, полученные на основе модели 3, свидетельствующие о прохождении колебаний в его незакрепленную часть за счет деформируемости участка закрепления конечной длины l . На рисунке точками обозначено решение по МКЭ.

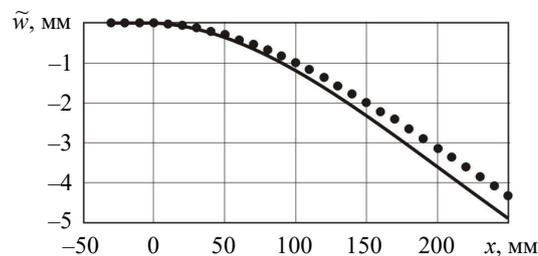


Рис. 5. Амплитуды прогибов \tilde{w} стержня

Сплошной линией показаны для сравнения значения \tilde{w} , полученные в [6] на основе сдвиговой модели С.П. Тимошенко при точном аналитическом решении

задачи, которые оказались по модулю несколько большими по сравнению с конечно-элементным решением, что обусловлено неучетом демпфирующих свойств материала при аналитическом решении.

На рис. 6а приведены амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$ на поверхности $z = t/2$, а на рис. 6б – амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^0, \tilde{\sigma}_{xz}$ в поперечных сечениях стержня, показывающие наличие существенной трансформации параметров НДС при переходе через границу от незакрепленной части к участку закрепления конечной длины l (верхний индекс 0 в напряжениях соответствует закрепленной части стержня). Для сравнения приведены напряжения σ_x^0, σ_x и $\sigma_{xz}^0, \sigma_{xz}$ из статьи [6] как результат аналитического решения без учета демпфирующих свойств материала, которые по модулю получились, как и следовало ожидать, несколько большими по сравнению с тем, что получено на основе МКЭ. При этом в обоих случаях наблюдается ярко выраженная трансформация параметров НДС стержня при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному. На рис. 6 квадраты – $\sigma_x^0, \sigma_{xz}^0$ (МКЭ); точки – σ_x, σ_{xz} (МКЭ); пунктирные линии – $\sigma_x^0, \sigma_{xz}^0$ (аналитическое решение); сплошные линии – σ_x, σ_{xz} (аналитическое решение).

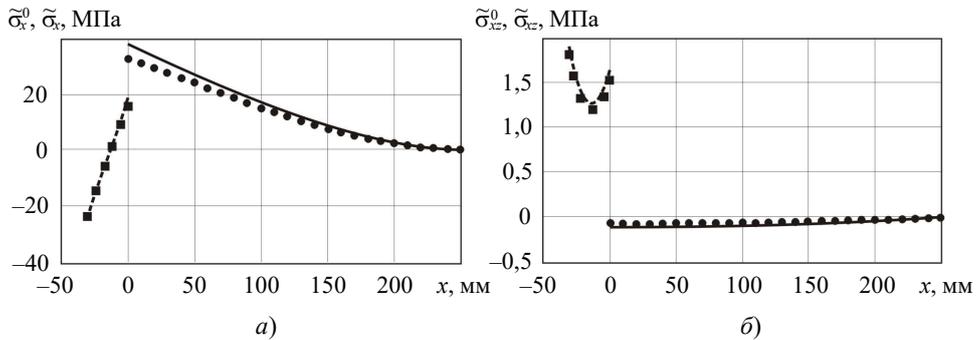


Рис. 6. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$ на поверхности $z = t/2$ (а) и амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^0, \tilde{\sigma}_{xz}$ (б)

Эксперимент 2. Определялась динамическая реакция плоского стержня-полосы (рис. 7) при действии гармонической вынуждающей силы $P = \tilde{P}e^{i\omega\tau}$ с амплитудой $\tilde{P} = 240$ Н/м (на единицу ширины стержня) и круговой частотой $\omega = 2\pi f$ при $f = 60$ Гц, близкой к низшей собственной частоте $f_1 = 61,046$ Гц.

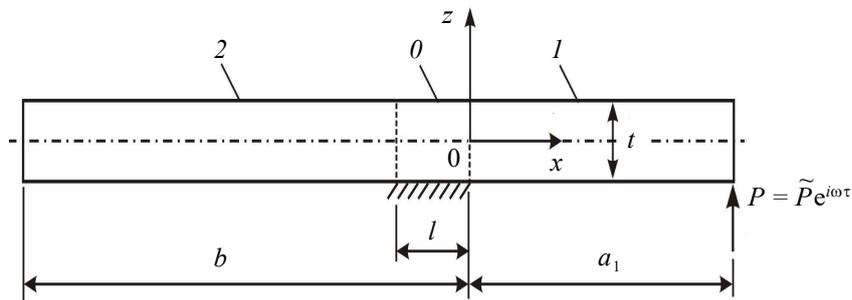


Рис. 7. Схема закрепления и нагружения стержня-полосы

Материал стержня – однонаправленный волокнистый композит на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с характеристиками: $E_1 = 100$ ГПа, $G_{13} = 1$ ГПа, $\delta_1 = 0,05$, $\delta_{13} = 0,1$, $\rho = 1500$ кг/м³. Геометрические параметры

стержня: $l = 50$ мм, $b = 300$ мм, $a_1 = 200$ мм, $t = 3$ мм. Закрепленная часть стержня представлялась 50 элементами одинаковой длины. Каждая незакрепленная часть стержня разбивалась на 100 конечных элементов. На рис. 7 обозначено: 1 – нагружаемая консольная часть; 2 – свободная консольная часть, 0 – закрепленный участок.

На рис. 8 приведены амплитуды прогибов \tilde{w} стержня, полученные на основе МКЭ (точки), которые наблюдаются не только в его нагруженной части, но также и в ненагруженной части, что можно объяснить деформируемостью закрепленного участка конечной длины l . Для сравнения приведены точные значения \tilde{w} , полученные в статье [6] на основе сдвиговой модели С.П. Тимошенко при аналитическом решении задачи без учета демпфирующих свойств материала (сплошная линия); квадратами обозначены границы закрепленного участка. В нагруженной части стержня оба решения дают практически одинаковые результаты, так как собственная частота этой части намного превышает заданную частоту $f = 60$ Гц (примерно в 1,6 раза). В ненагруженной части стержня значения \tilde{w} в МКЭ получились по модулю несколько меньшими, чем при аналитическом решении, что объясняется влиянием на \tilde{w} демпфирующих свойств материала при частоте $f = 60$ Гц, близкой к собственной частоте колебаний этой части.

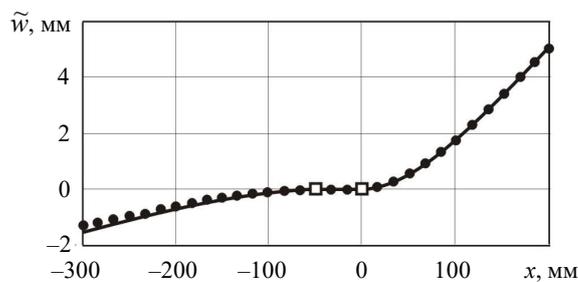


Рис. 8. Амплитуды прогибов \tilde{w} стержня

На рис. 9 приведены амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$ на поверхности $z = t/2$ и амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^0, \tilde{\sigma}_{xz}$ в поперечных сечениях стержня, полученные на основе МКЭ, которые оказались достаточно близкими к результатам, полученным в [6] при аналитическом решении задачи.

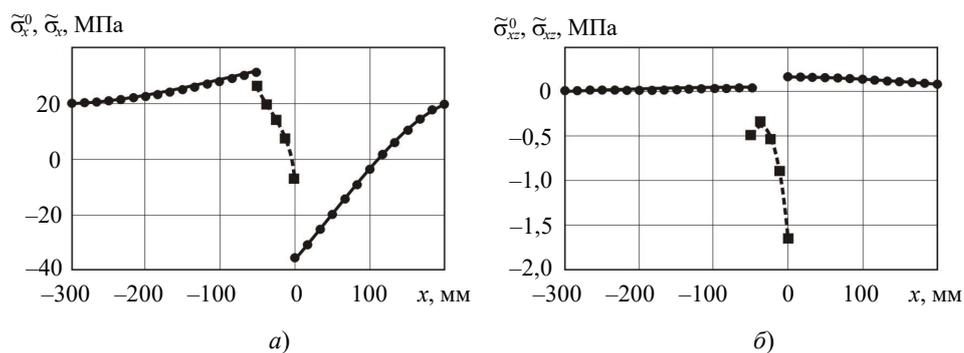


Рис. 9. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$ на поверхности $z = t/2$ (а) и амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^0, \tilde{\sigma}_{xz}$ (б)

На рисунке пунктирные линии – $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_{xz}^0$ (аналитическое решение), сплошные линии – $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_{xz}$ (аналитическое решение), квадраты – $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_{xz}^0$ (МКЭ), точки – $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_{xz}$

(МКЭ). Приведенные рисунки иллюстрируют наличие существенной трансформации параметров НДС при переходе через границы от незакрепленных частей стержня к его закрепленной части конечной длины l .

Заключение

Получены уравнения движения одномерных конечных элементов закрепленных на одной из лицевых поверхностей и незакрепленных участков плоских стержней на основе уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко и уравнений Лагранжа второго рода. Сформирована система разрешающих уравнений в комплексной форме для определения динамической реакции при вынужденных гармонических колебаниях плоского стержня с участками закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей. Разработаны три модели обеспечения кинематических условий сопряжения закрепленных и незакрепленных участков стержня: 1 – с наложением на узловых параметрах уравнений связи; 2 – с использованием переходного конечного элемента; 3 – на основе концепции единого конечного элемента. Отмечено, что для практической реализации наиболее удобной является модель 3 с узловыми перемещениями, расположенными на поверхности $z = -t/2$.

Проведены численные эксперименты по определению динамической реакции двух плоских стержней: консольно закрепленного на поверхности $z = -t/2$ стержня при вибрационном нагружении периодической осевой силой, приложенной к торцевому сечению закрепленного участка, а также стержня с двумя незакрепленными концами и участком закрепления конечной длины между ними при вибрационном нагружении поперечной силой на одном из незакрепленных концов. Показано распространение вибраций в ненагруженные части рассмотренных стержней через участки закрепления конечной длины, обусловленное деформируемостью указанных участков. Дано сравнение полученных конечно-элементных решений с результатами из [6] при точном аналитическом решении на основе сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Отмечено наличие существенной трансформации параметров НДС при переходе через границы от незакрепленных частей стержня к его закрепленной части конечной длины l .

Список литературы

1. Беляев А.К. Широкополосная вибрация тонкостенных элементов сложных систем. *Механика и процессы управления: Труды ЛПИ*. 1991. Т. 442. С. 128–137.
2. Jones R.T., Pretlove A.J. Vibration absorbers and bridges. *Journal of the Institution of Highway Engineers*. 1979. Vol. 26. No 1. P. 2–9. <http://worldcat.org/issn/03066452>.
3. Nair P.S., Rao M.S. On vibration of plates with varying stiffener length. *Journal of Sound and Vibration*. 1984. Vol. 95. Iss. 1. P. 19–29. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90255-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90255-4).
4. Davis B., Murray T.M. Slender monumental stair vibration serviceability. *Journal of Architectural Engineering*. 2009. Vol. 15. Iss. 4. P. 111–121. DOI: 10.1061/(ASCE)1076-0431(2009)15:4(111).
5. Ellis B.R. Serviceability evaluation of floor vibration induced by walking loads. *The Structural Engineer*. 2001. Vol. 79. Iss. 21. P. 30–36.
6. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 1. Основные соотношения и аналитические решения характерных задач. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №2. С. 207–224. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-207-224.
7. Басов К.А. *ANSYS в примерах и задачах*. Под общ. ред. Д.Г. Красковского. М.: Компьютер пресс, 2002. 224 с.

8. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. *ANSYS для инженеров: Справ. пособие*. М.: Машиностроение, 2004. 512 с.
9. Burnett D.S. *Finite Element Analysis: From Concepts to Applications*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Pub. Co., 1987. 844 p.
10. Rades M. *Finite Element Analysis*. Bucuresti: Printech, 2006. 266 p.
11. Стренг Г., Фикс Дж. *Теория метода конечных элементов*. М.: Мир, 1977. 351 с.
12. Норри Д., де Фриз Ж. *Введение в метод конечных элементов*. М.: Мир, 1981. 304 с.
13. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. М.: Мир, 1975. 541 с.
14. Галлагер Р. *Метод конечных элементов. Основы*. М.: Мир, 1984. 428 с.
15. Сегерлинд Л. *Применение метода конечных элементов*. М.: Мир, 1979. 392 с.
16. Постников В.С. *Внутреннее трение в металлах*. М.: Металлургия, 1969. 330 с.
17. Пановко Я.Г. *Внутреннее трение при колебаниях упругих систем*. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
18. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Numerical modeling of resonant vibrations of an elongate plate with an integral damping coating. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 2. P. 149–168. DOI: 10.1007/s11029-020-09869-3.
19. Bazoune A., Knulief Y.A. Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element. *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 259. Iss. 2. P. 473–480. DOI: 10.1006/jsvi.2002.5122.
20. Przemieniecki J.S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York: Dover Publications, 1985. 468 p.
21. Мэтьюз Д.Г., Финк К.Д. *Численные методы. Использование MATLAB*. М.: ИД Вильямс, 2001. 720 с.
22. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. *MATLAB 7: Программирование, численные методы*. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 737 с.
23. Кривилев А.В. *Основы компьютерной математики с использованием системы MATLAB*. М.: Лекс-Книга, 2005. 497 с.
24. Gibbs N.E., Poole Jr. W.G., Stockmeyer P.K. An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1976. Vol. 13. Iss. 2. P. 236–250. DOI: 10.1137/0713023.
25. George A., Liu J.W.H. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1981. 324 p.

References

1. Belyaev A.K. Shirokopolosnaya vibratsiya tonkostennykh elementov slozhnykh system [Broadband vibration of thin-walled elements of complex systems]. *Mekhanika i protsessy upravleniya: Trudy Leningradskogo politekhnicheskogo instituta [Mechanics and Control Processes: Proceedings of LPI]*. 1991. Vol. 442. P. 128–137 (In Russian).
2. Jones R.T., Pretlove A.J. Vibration absorbers and bridges. *Journal of the Institution of Highway Engineers*. 1979. Vol. 26. No 1. P. 2–9. <http://worldcat.org/issn/03066452>.
3. Nair P.S., Rao M.S. On vibration of plates with varying stiffener length. *J. Sound Vib.* 1984. Vol. 95. Iss. 1. P. 19–29. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90255-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90255-4).
4. Davis B., Murray T.M. Slender monumental stair vibration serviceability. *J. Archit. Eng.* 2009. Vol. 15. Iss. 4. P. 111–121. DOI: 10.1061/(ASCE)1076-0431(2009)15:4(111).
5. Ellis B.R. Serviceability evaluation of floor vibration induced by walking loads. *Struct. Eng.* 2001. Vol. 79. Iss. 21. P. 30–36.
6. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vibratsiy v tonkostennykh karkasirovannykh konstruktsiyakh. 1. Osnovnye sootnosheniya i analiticheskie resheniya kharakternykh zadach [Mathematical modeling of the vibrations propagation in thin-wall framework structures. 1. Basic relations and analytical solutions of typical problems]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2022. Vol. 84. No 2. P. 207–224 (In Russian).
7. Basov K.A. *ANSYS v primerakh i zadachakh [ANSYS in Examples and Problems]*. Ed. D.G. Kraskovskiy. Moscow. Kompyuter press. 2002. 224 p. (In Russian).
8. Chigarev A.V., Kravchuk A.S., Smalyuk A.F. *ANSYS dlya inzhenerov: Spravochnoe posobie*

- [*ANSYS for Engineers: Reference Manual*]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 2004. 512 p. (In Russian).
9. Burnett D.S. *Finite Element Analysis: from Concepts to Applications*. Reading, Massachusetts. Addison-Wesley Pub. Co. 1987. 844 p.
 10. Rades M. *Finite Element Analysis*. Bucuresti. Printech. 2006. 266 p.
 11. Strang G., Fix G.J. *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice-Hall. 1973. 318 p.
 12. Norrie D.H., de Vries G. *An Introduction to Finite Element Analysis*. New York. San Francisco. London. Academic Press. 1978. 301 p.
 13. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London. McGraw-Hill. 1971. 521 p.
 14. Gallagher R.H. *Finite Element Analysis. Fundamentals*. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice-Hall. 1975. 420 p.
 15. Sederlind L.J. *Applied Finite Element Analysis*. New York. London. Sydney. Toronto. John Wiley and Sons. 1976. 422 p.
 16. Postnikov V.S. *Vnutrennee trenie v metallakh [Internal Friction in Metals]*. Moscow. Metallurgiya Publ. 1969. 330 p. (In Russian).
 17. Panovko Ya.G. *Vnutrennee trenie pri kolebaniyakh uprugikh system [Internal Friction during Vibrations of Elastic Systems]*. Moscow. Fizmatgiz Publ. 1960. 193 p. (In Russian).
 18. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Numerical modeling of resonant vibrations of an elongate plate with an integral damping coating. *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56. Iss. 2. P. 149–168. DOI: 10.1007/s11029-020-09869-3.
 19. Bazoune A., Knulief Y.A. Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element. *J. Sound Vib.* 2003. Vol. 259. Iss. 2. P. 473–480. DOI: 10.1006/jsvi. 2002.5122.
 20. Przemieniecki J.S. *Theory of Matrix Structural Analysis*. New York. Dover Publications. 1985. 468 p.
 21. Mathews J.H., Fink K.D. *Numerical Methods Using MATLAB*. Pearson, New Jersey. Prentice Hall. 2004. 680 p.
 22. Ketkov Yu.L., Ketkov A.Yu., Shults M.M. *MATLAB 7: Programirovanie, chislennyye metody [MATLAB 7: Programming, Numerical Methods]*. Saint Petersburg. BKhV-Peterburg Publ. 2005. 737 p. (In Russian).
 23. Krivilev A.V. *Osnovy kompyuternoy matematiki s ispolzovaniem sistemy MATLAB [Fundamentals of Computer Mathematics using the MATLAB System]*. Moscow. Leks-Kniga Publ. 2005. 497 p. (In Russian).
 24. Gibbs N.E., Poole Jr. W.G., Stockmeyer P.K. An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix. *SIAM J. Numer. Anal.* 1976. Vol. 13. Iss. 2. P. 236–250. DOI: 10.1137/0713023.
 25. George A., Liu J.W.H. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice-Hall. 1981. 324 p.

**MATHEMATICAL MODELING OF THE VIBRATIONS PROPAGATION
IN THIN-WALL FRAMEWORK STRUCTURES. 2. FINITE ELEMENT MODELS
AND NUMERICAL EXPERIMENTS***

Paimushin V.N.^{1,2}, Firsov V.A.¹, Shishkin V.M.³

¹*Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev,
Kazan, Russian Federation*

²*Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russian Federation*

³*Vyatka State University, Kirov, Russian Federation*

Based on the refined S.P. Timoshenko shear model, one-dimensional finite elements for modeling the dynamic response of flat rods with clamped section of finite length on one of the front faces have been constructed. To analyze their stationary dynamic response under harmonic external action, a system of resolving equations in a complex form is formed. Three models of kinematic conjugation of clamped and free sections of rods are developed using the equation of connection between the rotation angle of the cross section and axial displacement at the boundary between the marked parts of the rod, the transitional finite element, and the concept of a single finite element with nodes located on one of its front faces. It is noted that for practical implementation, the most convenient model is one that uses a single finite element to represent fixed and free sections of the rod. On the basis of the noted model, a finite element solution of the problem of transverse bending vibrations of a cantilevered flat rod under vibration loading conditions by a periodic axial force applied to the end section of a clamped section of finite length, as well as the problem of transverse bending vibrations of a flat rod with two free ends and clamped length section between them under vibration loading by a transverse force on one of the free ends of the rod was found. The results of the finite element solution of the noted two problems are in good agreement with the previously obtained exact analytical solutions found on the basis of the S.P. Timoshenko shear model. The presence of a significant transformation of the parameters of the stress-strain state of the considered rods during the transition through the boundary from free to the clamped length areas on one of the face surfaces is noted.

Keywords: finite element, vibration propagation, flat rod, finite length fixing section, refined model of S.P. Timoshenko, transformation of stress-strain state parameters.

*This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (“PRIORITY-2030”).