

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-225-235

УЧЕТ ТРЕНИЯ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ВНЕДРЕНИЯ ВЫПУКЛОГО УДАРНИКА В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

© 2022 г.

Казаков Ю.С.¹, Тарлаковский Д.В.^{1,2}

¹Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

yurga1980@gmail.com

Поступила в редакцию 27.01.2022

Рассматривается начальный этап внедрения симметричного выпуклого абсолютно твердого ударника в изотропную упругую полуплоскость с учетом трения. Замкнутая система уравнений представлена в прямоугольных декартовых координатах уравнениями движения однородной изотропной упругой среды при отсутствии массовых сил в потенциалах перемещений, соотношениями Коши для деформаций, законом Гука для среды и уравнением поступательного движения ударника. Начальные условия однородные. На свободной поверхности напряжения отсутствуют. Внутри области контакта полагается равенство нормальных перемещений границы полуплоскости и поверхности ударника, а также задается связь касательных и нормальных напряжений законом трения Кулона. В силу малой продолжительности сверхзвукового этапа и малости радиуса области контакта полагается, что направление касательных напряжений постоянно.

Разрешающие функциональные уравнения представлены в виде сверток с функцией влияния. Последняя является решением исходной задачи для полупространства со специальным граничным условием в виде дельта-функции Дирака. Это решение находится в пространстве преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате. Для построения оригинала применяется метод совместного обращения преобразований Фурье – Лапласа.

Решение построено на основе учета особенности начального этапа взаимодействия, а именно сверхзвуковой скорости расширения области контакта (не меньше скорости распространения волн расширения-сжатия). Показано, что в отличие от контактного давления кинематические параметры ударника, результирующая сила и возникающие на границе области контакта разрывы первого рода не зависят от трения. Приведены примеры расчетов для различных коэффициентов трения.

Ключевые слова: нестационарный контакт, выпуклый ударник, упругая полуплоскость, трение, преобразование Лапласа, результирующая сила, контактные напряжения.

Введение

Нестационарные контактные задачи с подвижными границами являются одной из наименее исследованных проблем механики контактного взаимодействия. Один из подходов к исследованию подобных задач, основанный на решении интегральных уравнений с ядрами в виде функций влияния, представлен в статьях [1–3]. Значительное количество публикаций посвящено численным методам решения, таким как метод граничных элементов (МГЭ), метод конечных элементов (МКЭ) и др. [4–6]. Анализ обзорных трудов [7, 8] и ряда других работ [9–16] показывает, что в современных публикациях учет трения проводится преимущественно в стационарных задачах. В предлагаемой статье рассматривается сверхзвуковой этап нестационарного взаимодействия абсолютно твердого выпуклого ударника и упругой полуплоскости с учетом трения.

1. Постановка задачи

В прямоугольной декартовой системе координат Oxz рассматривается взаимодействие однородной изотропной упругой полуплоскости $z \geq 0$ при отсутствии массовых сил и движущегося вдоль оси Oz под действием силы P симметричного выпуклого абсолютно твердого ударника. Задача полагается плоской, то есть все искомые функции зависят только от координат x, z и времени τ .

Движение полуплоскости описывается уравнениями относительно скалярного потенциала φ и ненулевой компоненты ψ векторного потенциала перемещений (точками обозначены производные по времени τ) [17]:

$$\Delta\varphi = \eta_1^2 \ddot{\varphi}, \quad \Delta\psi = \eta_2^2 \ddot{\psi}, \quad (1)$$

η_1, η_2 – безразмерные параметры, характеризующие скорости распространения волн расширения-сжатия и формоизменения.

Перемещения среды u_1 и u_3 вдоль осей Ox и Oz соответственно связаны с потенциалами:

$$u_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad u_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Ненулевые компоненты ε_{ij} и σ_{ij} тензоров деформаций и напряжений определяются по формулам:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_{11} = \varepsilon_{11} + (1 - 2\eta_2^{-2})\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{33} = \varepsilon_{33} + (1 - 2\eta_2^{-2})\varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13} = 2\eta_2^{-2}\varepsilon_{13}. \quad (4)$$

Начальные условия полагаются однородными:

$$\varphi|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = 0, \quad \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Область контакта полагается односвязной с границей $|x| = b(\tau)$.

Как показано в [18], до некоторого момента времени τ_s область контакта расширяется со скоростью, не меньшей скорости волн расширения-сжатия, что соответствует неравенствам

$$\dot{b}(0) > 1, \quad \dot{b}(\tau) \geq 1 \quad (0 < \tau \leq \tau_s). \quad (6)$$

При этом возмущения не выходят за пределы области контакта (сверхзвуковой этап

взаимодействия). Этот факт позволяет записать граничные условия для полуплоскости в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}|_{z=0} = \sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad |x| > b(\tau), \\ u_3|_{z=0} = u_{3b}(x, \tau), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = -\kappa\sigma_{33}|_{z=0}, \quad |x| \leq b(\tau), \end{aligned} \quad (7)$$

где u_{3b} – перемещения границы ударника вдоль оси Oz , κ – коэффициент трения.

Здесь принято, что в силу малой продолжительности этого этапа и малости радиуса области контакта направление касательных напряжений во всей области контакта постоянно. Кроме того, добавляются условия ограниченности компонентов напряженно-деформированного состояния полуплоскости.

Задача внедрения ударника имеет вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{h} = P(\tau) - R(\tau), \quad h(0) = 0, \quad \dot{h}|_{\tau=0} = V_0, \\ R(\tau) = \int_{-b(\tau)}^{b(\tau)} p(x, \tau) dx, \quad p = -\sigma_{33}|_{z=0}, \end{aligned} \quad (8)$$

где m – масса ударника, h – его перемещение вдоль оси Oz (глубина погружения), R – результирующая сила контактного давления p .

Радиус $b(\tau)$ области контакта определяется из условия пересечения поверхности ударника $z = f(x) + h$ с недеформированной границей полуплоскости:

$$f(b) + h = 0. \quad (9)$$

В силу симметрии функция $f(x)$ четная, функция u_{3b} в граничных условиях (7) имеет вид:

$$u_{3b}(x, \tau) = [f(x) + h(\tau)]H[b(\tau) - |x|], \quad (10)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда [19].

Соотношения (1)–(10) представлены в безразмерных величинах (обозначены штрихом, который в формулах опущен). Они связаны с размерными переменными следующим образом:

$$\begin{aligned} x' = \frac{x}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u'_k = \frac{u_k}{L}, \quad \varphi' = \frac{\varphi}{L^2}, \quad b' = \frac{b}{L}, \quad \psi' = \frac{\psi}{L^2}, \quad h' = \frac{h}{L}, \\ f' = \frac{f}{L}, \quad \sigma'_{kl} = \frac{\sigma_{kl}}{\lambda + 2\mu} \quad (k, l = 1, 3), \quad P' = \frac{P}{(\lambda + 2\mu)L}, \quad R' = \frac{R}{(\lambda + 2\mu)L}, \\ \eta_j = \frac{c_1}{c_j} \quad (j = 1, 2), \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad m' = \frac{m}{\rho L^2}, \end{aligned}$$

где L – некоторый линейный размер, t – физическое время, λ и μ – упругие постоянные Ламе, ρ – плотность среды, c_1 и c_2 – скорости распространения волн расширения-сжатия и формоизменения, f – функция, описывающая форму ударника.

2. Определение глубины погружения ударника

Глубина погружения ударника находится из решения задачи (8), для замыкания которой необходимо знать контактное давление. С использованием принципа суперпозиции и граничных условий (7) и обозначения (8) контактное давление запишется так (звездочки обозначают свертки по координате и по времени):

$$p(x, \tau) = -u_{3b}(x, \tau) ** \Gamma_0(x, \tau), \quad \Gamma_0(x, \tau) = \Gamma(x, z, \tau)|_{z=0}. \quad (11)$$

Здесь Γ – поверхностная функция влияния для полуплоскости – напряжение σ_{33} , определяемое как ограниченное решение задачи (1)–(5) с граничными условиями

$$u_3|_{z=0} = \delta(x, \tau), \quad \sigma_{13}|_{z=0} = -\kappa\sigma_{33}|_{z=0} \quad (x \in \mathcal{R}), \quad (12)$$

где δ – дельта-функция Дирака [19].

Для определения функции Γ к начально-краевой задаче (1)–(5), (12) применяем преобразования Фурье по x и Лапласа по τ (F и L указывают на изображения, q и s – параметры этих преобразований):

$$\frac{\partial^2 \varphi^{FL}}{\partial z^2} - k_1^2(q^2, s^2)\varphi^{FL} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^{FL}}{\partial z^2} - k_2^2(q^2, s^2)\psi^{FL} = 0, \quad (13)$$

$$u_3^{FL}|_{z=0} = 1, \quad \sigma_{13}^{FL}|_{z=0} + \kappa\sigma_{33}^{FL}|_{z=0} = 0, \quad k_j(q, s) = \sqrt{\eta_j^2 s^2 + q^2}, \quad \operatorname{Re} k_j > 0;$$

$$u_1^{FL} = iq\varphi^{FL} - \frac{\partial \psi^{FL}}{\partial z}, \quad u_3^{FL} = \frac{\partial \varphi^{FL}}{\partial z} - iq\psi^{FL},$$

$$\sigma_{11}^{FL} = -iqu_1^{FL} + (1 - 2\eta_2^{-2})\frac{\partial u_3^{FL}}{\partial z}, \quad \sigma_{33}^{FL} = \frac{\partial u_3^{FL}}{\partial z} - (1 - 2\eta_2^{-2})iqu_1^{FL}, \quad (14)$$

$$\sigma_{13}^{FL} = \eta_2^{-2} \left(\frac{\partial u_1^{FL}}{\partial z} - iq u_3^{FL} \right).$$

Ограниченные на бесконечности решения представляем в виде:

$$\varphi^{FL} = C_1 \exp(-k_1 z), \quad \psi^{FL} = C_2 \exp(-k_2 z), \quad (15)$$

где C_1 и C_2 – функции, не зависящие от z .

Подставляя (15) в (14), находим изображения перемещений и напряжений:

$$u_1^{FL} = -iqC_1 \exp(-k_1 z) + k_2 C_2 \exp(-k_2 z),$$

$$u_3^{FL} = -k_1 C_1 \exp(-k_1 z) - iq C_2 \exp(-k_2 z),$$

$$\sigma_{11}^{FL} = [(1 - 2\eta_2^{-2})k_1^2 - q^2]C_1 \exp(-k_1 z) - 2\eta_2^{-2}iqk_2 C_2 \exp(-k_2 z), \quad (16)$$

$$\sigma_{33}^{FL} = \eta_2^{-2}k_3 C_1 \exp(-k_1 z) + 2\eta_2^{-2}iqk_2 C_2 \exp(-k_2 z),$$

$$\sigma_{13}^{FL} = \eta_2^{-2}(2iqk_1 C_1 \exp(-k_1 z) - k_3 C_2 \exp(-k_2 z)), \quad k_3 = k_2^2 + q^2.$$

Из граничных условий в (13) с использованием (16) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2 :

$$\begin{pmatrix} -k_1 & -iq \\ \eta_2^{-2}(\kappa k_3 + 2iqk_1) & \eta_2^{-2}(2\kappa iqk_2 - k_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ее решение записывается в виде:

$$C_1 = \frac{2\kappa iqk_2 - k_3}{D}, \quad C_2 = -\frac{\kappa k_3 + 2iqk_1}{D},$$

$$D = D(q, s) = \eta_2^2 s^2 k_1 + \kappa iq(k_3 - 2k_1 k_2).$$

Используя эти равенства, из (16) получаем функцию $\Gamma^{FL} = \sigma_{33}^{FL}$:

$$\eta_2^2 D(q, s) \Gamma^{FL}(q, z, s) = k_3(2\kappa iqk_2 - k_3) \exp(-k_1 z) - 2iqk_2(\kappa k_3 + 2iqk_1) \exp(-k_2 z).$$

На поверхности полуплоскости она имеет вид:

$$\Gamma_0^{FL}(q, s) = \Gamma^{FL}(q, 0, s) = -\frac{k_3^2 - 4q^2 k_1 k_2}{\eta_2^2 D(q, s)}. \quad (17)$$

Отметим, что при $k = 0$ это равенство совпадает с полученным в [18] равенством.

Для результирующей силы $R(\tau)$ аналогично [18], учитывая, что носитель контактного давления совпадает с областью контакта, получаем

$$R(\tau) = \int_{-b(\tau)}^{b(\tau)} p(x, \tau) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, \tau) dx = p^F(0, \tau).$$

Отсюда с использованием (12) и (17) приходим к равенству

$$R^L(s) = p^{FL}(0, \tau) = -u_{3b}^{FL}(0, s) \Gamma_0^{FL}(0, s) = \eta_1^{-1} s u_{3b}^{FL}(0, s),$$

которое в пространстве оригиналов записывается в виде:

$$R(\tau) = \eta_1^{-1} \dot{u}_{3b}^F(0, \tau) = \eta_1^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}_{3b}(x, \tau) dx = \eta_1^{-1} \int_{-b(\tau)}^{b(\tau)} \dot{h}(\tau) dx = 2\eta_1^{-1} b(\tau) \dot{h}(\tau). \quad (18)$$

Здесь учтено, что производная по времени, вычисляемая с помощью аппарата обобщенных функций [20], имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{3b}(x, \tau) &= \dot{h}(\tau) \mathbf{H}[b(\tau) - |x|] + \dot{b}(\tau) [f(x) + h(\tau)] \{ \delta[x + b(\tau)] + \delta[x - b(\tau)] \} = \\ &= \dot{h}(\tau) \mathbf{H}[b(\tau) - |x|] + \dot{b}(\tau) \{ f[b(\tau)] + h(\tau) \} \{ \delta[x + b(\tau)] + \delta[x - b(\tau)] \} = \\ &= \dot{h}(\tau) \mathbf{H}[b(\tau) - |x|]. \end{aligned}$$

При построении этой формулы использовано равенство

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}[b(\tau) - |x|] = \frac{\partial}{\partial \tau} \{ \mathbf{H}[x + b(\tau)] - \mathbf{H}[x - b(\tau)] \} = \dot{b}(\tau) \{ \delta[x + b(\tau)] + \delta[x - b(\tau)] \},$$

а также четность функции $f(x)$ и уравнение (9).

Из (8) и (18) следует, что глубина погружения не зависит от учета трения, и все полученные в [18] результаты для начального этапа взаимодействия в отношении кинематики ударника остаются в силе и в рассматриваемой здесь задаче.

3. Контактное давление на начальном этапе взаимодействия

Как следует из (17), функция Γ_{0*}^{FL} является однородной первой степени, поэтому формулу (11) для контактного давления преобразовываем аналогично [18]:

$$p(x, \tau) = -u_{3b}(x, \tau) * \ddot{\Gamma}_{0*}^{FL}(x, \tau) = -\dot{u}_{3b}(x, \tau) * \dot{\Gamma}_{0*}^{FL}(x, \tau), \quad \Gamma_{0*}^{FL} = s^2 \Gamma_{0*}^{FL}. \quad (19)$$

Здесь Γ_{0*}^{FL} – однородная функция степени -1 . Ее оригинал находим с помощью алгоритма совместного обращения [19, 21], звездочкой обозначена свертка по времени τ . Выполняя с учетом (17) замену $\lambda = q/s$, получаем

$$\Gamma_{0*}^{FL} = \frac{f(\lambda)}{s}, \quad f(\lambda) = -\frac{k_3^2(\lambda^2, 1) - 4\lambda^2 k_1(\lambda^2, 1) k_2(\lambda^2, 1)}{\eta_2^2 D(\lambda, 1)}.$$

Тогда оригинал $\Gamma_{0*}(x, \tau)$ находится из выражения:

$$\Gamma_{0*}(x, \tau) = \lim_{y \rightarrow +0} \hat{\Gamma}_{0*}(z, \tau) - \lim_{y \rightarrow -0} \hat{\Gamma}_{0*}(z, \tau), \quad \hat{\Gamma}_{0*}(z, \tau) = -\frac{1}{2\pi} \varphi(z, \tau),$$

$$z = x + iy \in \mathcal{C}, \quad \varphi(z, \tau) = f[\lambda(z, \tau)]\dot{\lambda}, \quad \lambda = \frac{\tau}{iz}, \quad (20)$$

где $\hat{\Gamma}_{0*}(x, \tau)$ – аналитическое представление функции $\Gamma_{0*}(x, \tau)$.

При вычислении пределов в (20) используем следующие соотношения [18]:

$$\begin{aligned} \lambda_0(x, \tau) &= \lim_{y \rightarrow \pm 0} \lambda(z, \tau) = \frac{\tau}{ix}, \\ \lim_{y \rightarrow \pm 0} k_j[\lambda^2(z, \tau), 1] &= \sqrt{\eta_j^2 + \lambda_0^2} = \sqrt{\eta_j^2 - \tau^2/x^2} \quad (|\tau/x| < \eta_j), \\ \lim_{y \rightarrow \pm 0} k_j[\lambda^2(z, \tau), 1] &= \pm i \sqrt{-(\eta_j^2 + \lambda_0^2)} \operatorname{sign} x = \pm i \frac{1}{x} \sqrt{\tau^2 - \eta_j^2 x^2} \quad (|\tau/x| \geq \eta_j), \\ \lim_{y \rightarrow \pm 0} k_3[\lambda^2(z, \tau), 1] &= \lim_{y \rightarrow \pm 0} k_3[-\tau^2/z^2, 1] = \eta_2^2 - 2\tau^2/x^2. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{0*}(x, \tau) &= \Gamma_{01}(x, \tau)[H(\tau - |x|) - H(\tau - \eta_2|x|)] + \Gamma_{02}(x, \tau)H(\tau - \eta_2|x|), \\ \Gamma_{01}(x, \tau) &= \frac{2\tau^2 - \eta_2^2 x^2 + 2\tau\kappa\sqrt{x^2\eta_2^2 - \tau^2} \operatorname{sign} x}{\pi R_1(x, \tau)} (x^2\eta_2^2 - 2\tau^2)\sqrt{\tau^2 - x^2}, \\ \Gamma_{02}(x, \tau) &= -\frac{(x^2\eta_2^2 - 2\tau^2)^2 - 4\tau^2\sqrt{\tau^2 - x^2}\sqrt{\tau^2 - x^2}\eta_2^2}{\pi R_2(x, \tau)} \sqrt{\tau^2 - x^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} R_1(x, \tau) &= \eta_2^2 x^2 (\tau^2 - x^2) [\eta_2^2 x^2 - 4\kappa\tau\sqrt{x^2\eta_2^2 - \tau^2} \operatorname{sign} x] + \\ &+ \kappa^2 \tau^2 [(x^2\eta_2^2 - 2\tau^2)^2 + 4(\tau^2 - x^2)(x^2\eta_2^2 - \tau^2)], \end{aligned}$$

$$R_2(x, \tau) = x^4 \eta_2^4 (\tau^2 - x^2) + \kappa^2 \tau^2 [(x^2\eta_2^2 - 2\tau^2) + 2\sqrt{\tau^2 - x^2}\sqrt{\tau^2 - x^2}\eta_2^2]^2.$$

Отметим, что полученная функция при $k = 0$ совпадает с функцией, приведенной в [18].

Далее, используя полученные в [18] формулы и (10), равенство (19) приводим к виду:

$$\begin{aligned} p(x, \tau) &= \dot{h}(\tau)H[b(\tau) - |x|] + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_0^\tau \dot{h}(t) \frac{x_k(x, t)}{\tau - t} \Gamma_{0*}[x_k(x, t), \tau - t] dt, \\ x_k(x, t) &= x + (-1)^k b(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Входящие сюда интегралы понимаются в смысле регуляризованных значений [20].

Выясним теперь, как ведет себя контактное давление на границах области контакта $x = \pm b(\tau)$. Вводя соответствующие параметры

$$\varepsilon_{\pm} = b(\tau) \mp x,$$

преобразовываем формулу (22):

$$\begin{aligned} p\{\pm[b(\tau) - \varepsilon], \tau\} &= p_{0\pm}(\tau, \varepsilon) = \\ &= \dot{h}(\tau)H(\varepsilon) + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_0^\tau \dot{h}(t) \frac{b_{k\pm}(\tau, \varepsilon, t)}{\tau - t} \Gamma_{0*}[b_{k\pm}(\tau, \varepsilon, t), \tau - t] dt, \\ b_{k\pm}(\tau, \varepsilon, t) &= \pm[b(\tau) - \varepsilon] + (-1)^k b(t) = \pm b(\tau) + (-1)^k b(t) \mp \varepsilon. \end{aligned}$$

Выполняя предельный переход при $\varepsilon \rightarrow +0$, получаем

$$p_{0\pm}(\tau, 0) = \dot{h}(\tau) + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_0^{\tau} \dot{h}(t) \frac{b_{k\pm}(\tau, 0, t)}{\tau - t} \Gamma_{0*}[b_{k\pm}(\tau, 0, t), \tau - t] dt, \quad (23)$$

$$b_{k\pm}(\tau, 0, t) = \pm b(\tau) + (-1)^k b(t).$$

Отсюда следуют равенства

$$b_{1\pm}(\tau, 0, t) = \pm b(\tau) - b(t), \quad b_{2\pm}(\tau, \varepsilon, t) = \pm b(\tau) - b(t), \quad (24)$$

$$|b_{1-}(\tau, 0, t)| = |b_{1+}(\tau, 0, t)| = b(\tau) + b(t), \quad |b_{1+}(\tau, 0, t)| = |b_{1-}(\tau, 0, t)| = b(\tau) - b(t).$$

Поскольку рассматривается сверхзвуковой этап взаимодействия, которому соответствуют неравенства (6), то $b(\tau) - \tau > 0$ при $0 < \tau < \tau_1$, где $b(\tau_1) = \tau_1$. Учитывая, что в силу (8) и (9) $b(0) = 0$, приходим к выводу, что функция $b(\tau) - \tau$ удовлетворяет теореме Ролля [22], причем $\dot{b}(\tau_s) - 1 = 0$, где $0 < \tau_s < \tau_1$. Таким образом, на рассматриваемом этапе взаимодействия при $0 < \tau \leq \tau_s$ имеет место неравенство $b(\tau) - \tau > 0$. Кроме того, по теореме Лагранжа [22] на интервале (t, τ) существует такая точка ξ , что выполняется равенство $b(\tau) - b(t) = \dot{b}(\xi)(\tau - t)$. Из него следует неравенство $b(\tau) - b(t) \geq \tau - t$. Эти формулы показывают, что для функций в (24) выполняются условия $|b_{k\pm}(\tau, 0, t)| \geq \tau - t$, которые приводят к равенствам $\Gamma_{0*}[b_{k\pm}(\tau, 0, t), \tau - t] = 0$ и, согласно (21), к виду формулы (23):

$$p_{0\pm}(\tau, 0) = \dot{h}(\tau).$$

Таким образом, на обеих границах области контакта давление имеет одинаковые разрывы первого рода, которые не зависят от учета трения.

4. Пример

Полагаем, что материал полуплоскости – алюминиевый сплав с характеристиками: $\mu = 26,3$ МПа, $\lambda = 51,1$ ГПа, $\rho = 2698,9$ кг/м³ [23]. Остальные параметры задачи считаем такими: $m = 4,5$, $V_0 = 0,05$, $P(\tau) = p_0 H(\tau)$, $p_0 = 0,1$.

Для расчета кинематических характеристик применялся метод Рунге – Кутты четвертого порядка. Интегралы в (22) вычислялись методом прямоугольников с шагом 0,001.

На рис. 1 показано изменение давления по времени для различных значений пространственной координаты (для $x = 0$ – сплошная линия, $x = 0,02$ – штриховая линия, $x = 0,04$ – штрихпунктирная линия).

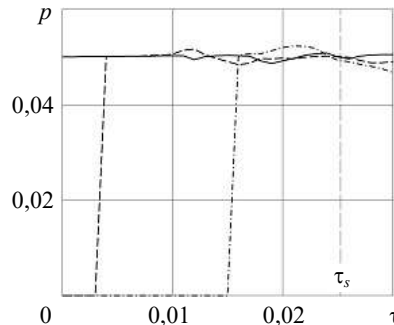


Рис. 1. Изменение давления по времени

На рис. 2 представлено распределение давления по пространственной координате в различные моменты времени (для $\tau = 0,01$ – сплошная линия, $\tau = 0,02$ – штриховая линия). Графики построены при коэффициенте трения $\kappa = 0,2$, что соответствует контакту дюралюминия и конструкционной стали.

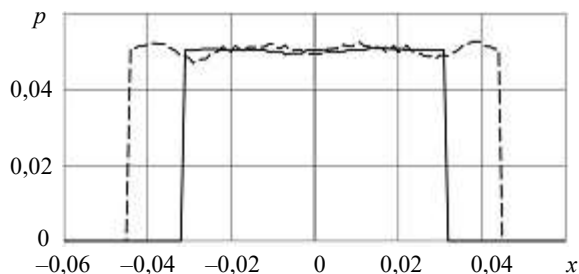


Рис. 2. Распределение давления по пространственной координате

Результаты для давления при отсутствии трения отличаются менее чем на 2% и поэтому на этих рисунках не приводятся.

Для более четкого выявления влияния трения проведены расчеты при гипотетическом коэффициенте $\kappa = 0,8$. Они представлены на рис. 3 и 4 сплошными линиями, точками показано решение при контакте без трения. Здесь отличия от контакта без трения заметны.

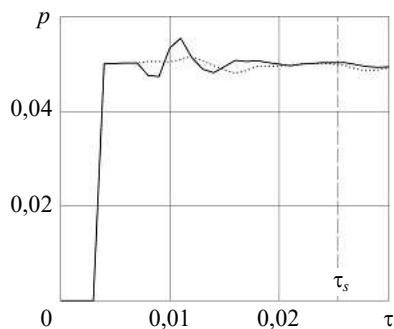


Рис. 3. Изменение давления по времени при $x = 0,02$

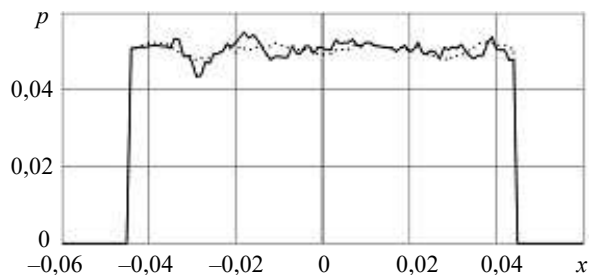


Рис. 4. Распределение давления по пространственной координате при $\tau = 0,02$

Заключение

Представлено решение задачи о внедрении симметричного выпуклого абсолютно твердого ударника в изотропную упругую полуплоскость с учетом трения на сверхзвуковом этапе взаимодействия. Показано, что результирующая сила контактного дав-

ления не зависит от трения. На границах области контакта давление имеет одинаковые разрывы первого рода, также не зависящие от трения.

Решение является приближенным, поскольку не учитывается зависимость силы трения от относительной скорости движения контактирующих поверхностей. Однако оно может быть использовано в качестве начального приближения для общей задачи.

Список литературы

1. Fedotenkov G.V., Mikhailova E.Y., Kuznetsova E.L., Rabinsky L.N. Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016. Vol. 111. Iss. 2. P. 331–342. DOI: 10.12732/ijpam.v111i2.16.
2. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Stress-strain state of a composite plate under the action of a transient movable load. *Mechanics of Composite Materials*. 2021. Vol. 57. Iss. 4. P. 493–502. DOI: 10.1007/s11029-021-09972-z.
3. Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Пространственная нестационарная контактная задача для цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела. *Изв. РАН. МТТ*. 2020. №3. С. 80–91. DOI: 10.31857/S0572329920030137.
4. Li Y., Arutiunian A.M., Kuznetsova E.L., Fedotenkov G.V. Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location. *Incas Bulletin*. 2020. Vol. 12. Special Iss. P. 99–113. DOI: 10.13111/2066-8201.2020.12.S.9.
5. Weidong Lei, Duofa Ji, Guopeng Zhu. Time-domain boundary element method with von Mises model for solving 2-D elastoplastic dynamic problems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2019. Vol. 41. Iss. 6. P. 269-1–269-13. DOI: 10.1007/s40430-019-1770-3.
6. Jiabei S., Zhuyong L., Jiazhen H. Dynamic contact model of shell for multibody system applications. *Multibody System Dynamics*. 2018. Vol. 44. Iss. 4. P. 335–366. DOI: 10.1007/S11044-018-09641-5.
7. *Механика контактных взаимодействий*. Под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
8. Barber J.R. *Contact Mechanics*. Dordrecht: Springer International Publishing, 2018. 585 p.
9. Горячева И.Г., Цуканов И.Ю. Развитие механики дискретного контакта с приложениями к исследованию фрикционного взаимодействия деформируемых тел. *Прикладная математика и механика*. 2020. Т. 84. №6. С. 757–789.
10. Zobova A.A., Goryacheva I.G. Dynamics of a viscoelastic cylinder on a viscoelastic half-space. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Iss. 6. P. 2217–2230. DOI: 10.1007/s00707-020-02643-5.
11. Горячева И.Г., Зобова А.А. Динамика упругого цилиндра на упругом основании. *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83. №1. С. 39–46. DOI: 10.1134/S003282351901003X.
12. Goryacheva I.G., Miftakhova A.R. Modelling of the viscoelastic layer effect in rolling contact. *Wear*. 2019. Vol. 430. P. 256–262. DOI: 10.1016/j.wear.2019.05.021.
13. Суворова Т.В., Беляк О.А. Контактные задачи для пористоупругого композита при наличии сил трения. *Прикладная математика и механика*. 2020. Т. 84. №4. С. 529–539. DOI: 10.31857/S0032823520040104.
14. Adams G.G. Frictional slip of a rigid punch on an elastic half-plane. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2016. Vol. 472. P. 20160352-1–20160352-12. DOI: 10.1098/rspa.2016.0352.
15. Barber J.R., Davies M., Hills D.A. Frictional elastic contact with periodic loading. *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48. Iss. 13. P. 2041–2047. DOI: 10.1016/J.IJSOLSTR.2011.03.008.
16. Brock L.M., Georgiadis H.G. Rapid sliding contact: Elastodynamic steady state. In: *Encyclopedia of Thermal Stresses*. Dordrecht: Springer, 2014. P. 4102–4108. DOI: 10.1007/978-94-007-2739-7_689.
17. Амензаде Ю.А. *Теория упругости*. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.

18. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. *Динамические контактные задачи с подвижными границами*. М.: Наука. Физматлит, 1995. 352 с.
19. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
20. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции. Вып. 1: Обобщенные функции и действия над ними*. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
21. Слепян Л.П., Яковлев Ю.С. *Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики*. Л.: Судостроение, 1980. 344 с.
22. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа*. В 2 т. Т. 1. М.: Высшая школа, 1981. 687 с.
23. *Физические величины: Справочник*. Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

References

1. Fedotenkov G.V., Mikhailova E.Y., Kuznetsova E.L., Rabinsky L.N. Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp. *Int. J. Pure Appl. Math.* 2016. Vol. 111. Iss. 2. P. 331–342. DOI: 10.12732/ijpam.v111i2.16.
2. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. Stress-strain state of a composite plate under the action of a transient movable load. *Mech. Compos Mater.* 2021. Vol. 57. Iss. 4. P. 493–502. DOI: 10.1007/s11029-021-09972-z.
3. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. Spatial non-stationary contact problem for a cylindrical shell and absolutely rigid body. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 3. P. 366–376. DOI: 10.3103/S0025654420030127.
4. Li Y., Arutiunian A.M., Kuznetsova E.L., Fedotenkov G.V. Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location. *Incas Bull.* 2020. Vol. 12. Special Iss. P. 99–113. DOI: 10.13111/2066-8201.2020.12.S.9.
5. Weidong Lei, Duofa Ji, Guopeng Zhu. Time-domain boundary element method with von Mises model for solving 2-D elastoplastic dynamic problems. *J. Braz. Soc. Mech. Sci.* 2019. Vol. 41. Iss. 6. P. 269-1–269-13. DOI: 10.1007/s40430-019-1770-3.
6. Jiabei S., Zhuyong L., Jiazhen H. Dynamic contact model of shell for multibody system applications. *Multibody System Dynamics*. 2018. Vol. 44. Iss. 4. P. 335–366. DOI: 10.1007/S11044-018-09641-5.
7. *Mekhanika kontaknykh vzaimodeystviy [Mechanics of Contact Interactions]*. Eds. I.I. Vorovich, V.M. Aleksandrov. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 672 p. (In Russian).
8. Barber J.R. *Contact Mechanics*. Dordrecht. Springer International Publishing. 2018. 585 p.
9. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Yu. Razvitie mekhaniki diskretnogo kontakta s prilozheniyami k issledovaniyu friktsionnogo vzaimodeystviya deformiruyemykh tel [Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 2020. Vol. 84. No 6. P. 757–789 (In Russian).
10. Zobova A.A., Goryacheva I.G. Dynamics of a viscoelastic cylinder on a viscoelastic half-space. *Acta Mech.* 2020. Vol. 231. Iss. 6. P. 2217–2230. DOI: 10.1007/s00707-020-02643-5.
11. Goryacheva I.G., Zobova A.A. Dynamics of the motion of an elastic cylinder along an elastic foundation. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. No 2. P. 271–277. DOI: 10.3103/S0025654419030117.
12. Goryacheva I.G., Miftakhova A.R. Modelling of the viscoelastic layer effect in rolling contact. *Wear*. 2019. Vol. 430. P. 256–262. DOI: 10.1016/j.wear.2019.05.021.
13. Suvorova T.V., Belyak O.A. Kontaknyye zadachi dlya poristoupругogo kompozita pri nalichii sil treniya [Contact problems for porous composite in the presence of friction forces]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 2020. Vol. 84. No 4. P. 529–539 (In Russian).
14. Adams G.G. Frictional slip of a rigid punch on an elastic half-plane. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2016. Vol. 472. P. 20160352-1–20160352-12. DOI: 10.1098/rspa.2016.0352.

15. Barber J.R., Davies M., Hills D.A. Frictional elastic contact with periodic loading. *Int. J. Solids and Struct.* 2011. Vol. 48. Iss. 13. P. 2041–2047. DOI: 10.1016/J.IJSOLSTR.2011.03.008.
16. Brock L.M., Georgiadis H.G. Rapid sliding contact: Elastodynamic steady state. In: *Encyclopedia of Thermal Stresses*. Dordrecht. Springer. 2014. P. 4102–4108. DOI: 10.1007/978-94-007-2739-7_689.
17. Amenzade Yu.A. *Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]*. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 1976. 272 p. (In Russian).
18. Gorshkov A.G., Tarlakovskiy D.V. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi s podvizhnymi granitsami [Dynamic Contact Problems with Moving Boundaries]*. Moscow. Nauka Publ. Fizmatlit Publ. 1995. 352 p. (In Russian).
19. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskiy D.V. *Volny v sploshnykh sredakh [Waves in Continuous Media]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).
20. Gelfand I.M., Shilov G.E. *Obobshchennye funktsii. Vyp. 1: Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi [Generalized Functions. Vol. 1: Properties and Operations]*. Moscow. Fizmatgiz Publ. 1959. 470 p. (In Russian).
21. Slepyan L.P., Yakovlev Yu.S. *Integralnye preobrazovaniya v nestatsionarnykh zadachakh mekhaniki [Transforms in Non-steady-state Problems of Mechanics]*. Leningrad. Sudostroenie Publ. 1980. 344 p. (In Russian).
22. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza. V 2 tomakh. T. 1'. [Mathematical Analysis Course. Vol. 1]*. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 1981. 687 p. (In Russian).
23. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik [Handbook of Physical Quantities]*. Eds. I.S. Grigoryev, E.Z. Meylikhov. Moscow. Energoatomizdat Publ. 1991. 1232 p. (In Russian).

TAKING ACCOUNT OF FRICTION AT THE INITIAL STAGE OF INDENTATION OF CONVEX PUNCH INTO ELASTIC HALF-PLANE

Kazakov Yu.S.¹, Tarlakovskii D.V.^{1,2}

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

²*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

The initial stage of indentation of a convex rigid punch into isotropic elastic half-plane with friction is considered. A closed mathematical formulation in Cartesian coordinates is presented by equations of motion in the absence of a body force for homogeneous isotropic elastic medium in terms of displacement potentials, Cauchy equations for deformations, Hooke law and translational equation for the punch. Initial conditions are homogeneous. Outside of contact region surface is free from stresses. Inside contact region normal displacements of the surface of a half-space and the surface of a punch are taken to be equal and the relation between tangential and normal stresses in a form of Coulomb friction law is given. Due to the short duration of the supersonic stage and smallness of the contact region radius the tangential stress direction is considered to be point independent. Resolving functional equations are given in a form of convolutions with influence functions. The latter is the solution the original problem for half-plane with a special boundary condition in a form of the Dirac delta function. This solution is obtained in the domain of Laplace transform by time and Fourier transform by spatial coordinate. The original is constructed with the combined Fourier–Laplace inversion method.

Solution is given with consideration to the initial stage characteristic property of supersonic velocity of contact region expansion (no smaller than propagation velocity of expansion-compression waves). It is shown that kinematic parameters of the punch, resulting force and discontinuities of the first kind on boundaries of the contact region are independent of friction unlike contact pressure. Calculation examples for different values of friction coefficient are presented.

Keywords: transient contact, convex punch, elastic half-plane, friction, Laplace transform, resulting force, contact stresses.