

УДК 534.16

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-207-224

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВИБРАЦИЙ  
В ТОНКОСТЕННЫХ КАРКАСИРОВАННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ.  
1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ  
И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ХАРАКТЕРНЫХ ЗАДАЧ\***

© 2022 г. **Паймушин В.Н.<sup>1,2</sup>, Фирсов В.А.<sup>1</sup>, Шишкин В.М.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А.Н. Туполева, Казань, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Казанский (Приволжский) федеральный университет,  
Казань, Российская Федерация*

<sup>3</sup>*Вятский государственный университет, Киров, Российская Федерация*

vrajmushin@mail.ru

*Поступила в редакцию 01.04.2022*

Обсуждаются особенности конструктивного исполнения тонкостенных каркасированных конструкций изделий авиастроения, судостроения и пр. в виде силового каркаса, соединенного с тонкостенными панелями обшивки, стенок, переборок и т.п. Рассматриваются варианты конструктивного соединения указанных тонкостенных панелей с опорными элементами силового каркаса и способы их математического описания в классической механике деформируемого твердого тела. Предложено, не искажая физической картины динамического поведения тонкостенных панелей, представить их в виде многопролетных тонких полос, опирающихся на жесткие элементы силового каркаса по части их лицевой поверхности. На примере плоской динамической задачи механики полосы, имеющей на одной из лицевых поверхностей закрепленный участок конечной длины, показано, что при исследовании процессов деформирования с учетом податливости закрепленного участка требуется введение понятия трансформации параметров напряженно-деформированного состояния и применяемых для их описания математических моделей. Такая трансформация имеет место при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному (от закрепленного к незакрепленному) участку. В рамках классической модели Кирхгофа – Лява учет податливости закрепленного участка стержня невозможен, а при использовании простейшей уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко такой учет возможен при закреплении участка только на одной из лицевых поверхностей. В частности, обнаруженное ранее и не описанное в научной литературе явление прохождения вибраций через опорные соединения независимо от их конструктивного исполнения осуществляется за счет трансформации напряженно-деформированного состояния дина-

---

\*Выполнено за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030», раздел 1) и Российского научного фонда (проект №22-79-10033, раздел 2-4).

мически нагруженного участка полосы в продольно-сдвиговые формы колебаний полосы на участке закрепления с последующей их ретрансформацией в изгибные колебания соседнего пролета. В рамках используемой модели С.П. Тимошенко построены основные разрешающие уравнения, сформулированы кинематические и силовые условия сопряжения закрепленных и незакрепленных участков полосы. На основе разработанной математической модели найдены точные аналитические решения характерных задач, подтверждающие прохождение вибрации через закрепленные участки полосы за счет деформируемости отмеченных участков. Выявлено существенное увеличение уровня поперечных касательных напряжений на закрепленном участке полосы в окрестности сопряжения незакрепленного участка с закрепленным.

*Ключевые слова:* тонкостенная каркасированная конструкция, многопролетная полоса, распространение вибраций, трансформация параметров напряженно-деформированного состояния полосы, уточненная сдвиговая модель С.П. Тимошенко.

## **Введение**

Вибрации оказывают негативное комбинированное воздействие на конструкцию изделий и окружающую среду. С одной стороны, вибрации нарушают нормальное функционирование аппаратуры, оборудования и систем изделия, а также являются причиной снижения усталостной прочности и ресурса силовой конструкции [1–3]. С другой стороны, колебания элементов конструкции в звуковом диапазоне частот вызывают излучение акустических колебаний (шума) в окружающую среду, что нарушает нормальные условия жизнедеятельности человека. Особую значимость и актуальность эти проблемы имеют для тонкостенных каркасированных конструкций авиа- и судостроения, так как их сложная архитектура внутреннего конструктивного исполнения, ограниченность и замкнутость объема являются благоприятной средой распространения вибраций и излученных звуковых полей [4–7].

Рассматриваемые конструкции представляют собой жесткие силовые каркасы, соединенные с тонкостенными панелями (обшивкой, внутренними панелями, переборками и др.) с помощью заклепочных, болтовых, сварных или клеевых швов. С целью упрощения дальнейшего изложения и проводимых исследований, не влияющего на физическую картину исследуемых процессов, тонкостенную панель представим в виде тонкой неразрезной многопролетной полосы, опирающейся на участках конечной длины лицевой поверхности на жесткие элементы силового каркаса.

Расчетные схемы для исследования статического и динамического поведения таких конструкций в классической механике деформируемого твердого тела зависят от вида соединения полосы с опорными элементами: шарнирное опирание в случае одинарного заклепочного, болтового или сварного соединения (рис. 1а); жесткое защемление в случае двойного соединения или сплошного клеевого шва (рис. 1б). Ясно, что в случае шарнирного опирания многопролетной полосы (см. рис. 1а) статическое или динамическое воздействие на какой-либо пролет вызовет статическое нагружение или, соответственно, изгибные колебания соседних пролетов, так как шарнирные опоры не препятствуют повороту сечений полосы [8, 9 и др.].

В механике тонкостенных элементов конструкций предполагается, что соединение полосы с жесткими опорными элементами в виде двойного заклепочного, болтового или сварного соединения, а также сплошного клеевого шва исключает статическое и динамическое нагружение соседних пролетов (см. рис. 1б), поэтому

допустимо исследование статического и динамического поведения только отдельного нагруженного пролета в виде стержня-полосы с жестко закрепленными концами (рис. 2, 3).

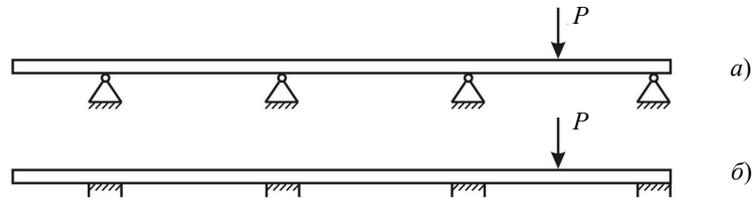


Рис. 1. Виды соединения многопролетной полосы с опорными элементами:  
 а – шарнирное опирание; б – жесткое защемление

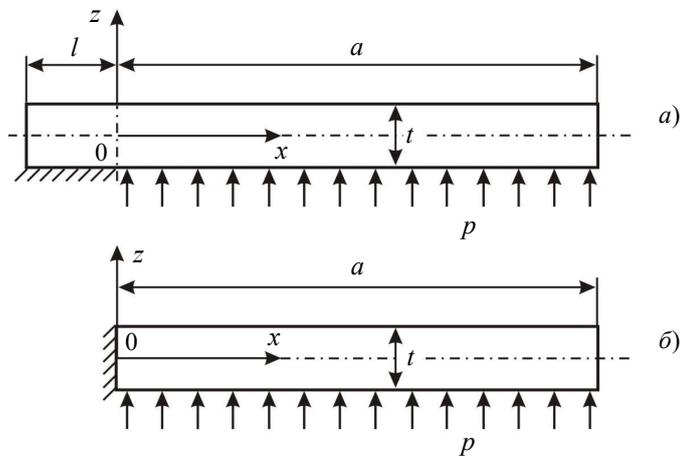


Рис. 2. Схемы консольного закрепления стержня при плоском изгибе:  
 а – закрепление конечного участка граничной плоскости  $z = -t/2$ ; б – защемление

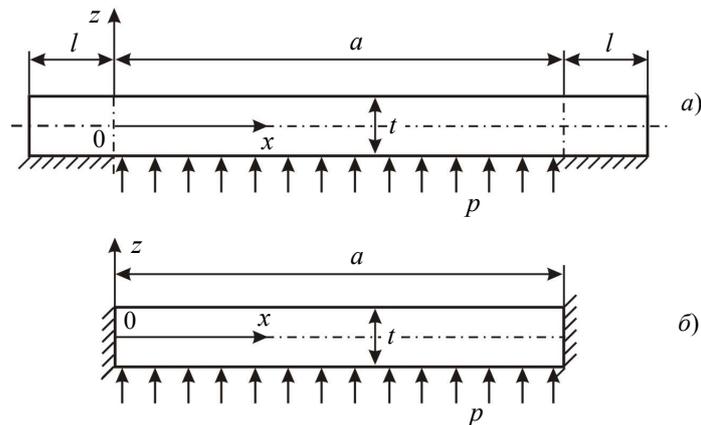


Рис. 3. Схемы закрепления стержня при плоском изгибе:  
 а – закрепление конечных участков граничной плоскости  $z = -t/2$ ; б – защемление

Подобное упрощение расчетной схемы многопролетных конструкций в известной мере допустимо в случае статического нагружения пролетов, но неприемлемо для случаев динамического воздействия. Поводом для указанного заключения явилось обнаруженное авторами настоящей статьи и не описанное ранее в научной

литературе [10, 11 и др.] явление прохождения вибрации через опорные участки закрепления независимо от их конструктивного исполнения, что требует необходимого теоретического обоснования. Обобщая вышесказанное, можно констатировать, что обнаруженное явление может привести при динамическом нагружении одного из пролетов многоопорной конструкции (см. рис. 1б) к вибрации соседних от нагруженного участков конструкции, причем динамически более нагруженных (в случае резонанса), чем исходный. Выявленные особенности распространения вибраций в многопролетных конструкциях требуют разработки новых подходов к проблемам их динамического поведения и создания эффективных средств звуко- и виброизоляции.

Предполагается, что прохождение изгибных колебаний через участок закрепления осуществляется за счет трансформации изгибного напряженно-деформированного состояния (НДС) динамически нагруженного участка полосы в продольно-поперечно-сдвиговые формы колебаний полосы на участке закрепления с последующей их ретрансформацией в изгибные колебания соседнего участка.

Для выявления истинной картины динамического поведения многопролетной конструкции необходимо построение специальных математических моделей для описания механики деформирования тонкостенной конструкции на участках закрепления. Для построения основных соотношений, описывающих процесс деформирования полосы на свободных и закрепленных участках, используем простейшую уточненную теорию типа Рейсснера – Миндлина [12–14], называемую в русскоязычной литературе простейшей уточненной теорией типа С.П. Тимошенко.

Следует отметить, что закрепление полосы, показанное на рис. 3а, является характерным для тонкостенных элементов конструкций из композитных материалов. Если ее закрепление в пределах участка  $-l \leq x \leq 0$  осуществляется на обеих лицевых поверхностях  $z = \pm t/2$ , то учет податливости закрепленного участка на основе простейшей уточненной теории типа С.П. Тимошенко невозможен. Для этого требуется привлечение моделей деформирования с более высоким порядком точности. Разработке таких моделей деформирования в настоящее время посвящена обширная научная литература [15–23 и др.], критический анализ которой проведен, в частности, в статьях [24, 25].

## 1. Основные соотношения

Рассмотрим стержень-полосу с участком закрепления конечной длины  $l$  на поверхности  $z = -t/2$  (см. рис. 2а), для описания процесса деформирования которого используем уточненную сдвиговую модель С.П. Тимошенко:

$$U = u + z\gamma, \quad W = w, \quad 0 \leq x \leq a, \quad U_0 = u_0 + z\gamma_0, \quad W_0 = w_0 = 0, \quad -l \leq x \leq 0. \quad (1)$$

Здесь  $U, W, U_0, W_0$  – перемещения точек, расположенных на расстоянии  $z$  от оси  $Ox$ , а  $\gamma, \gamma_0$  – углы поворота поперечных сечений соответственно незакрепленного и закрепленного участков стержня;  $u, w, u_0, w_0$  – перемещения точек оси  $Ox$  отмеченных участков. На функции  $u_0, \gamma_0$  наложено кинематическое ограничение

$$\gamma_0 = \frac{2u_0}{t}, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (2)$$

следующее из условия  $U_0|_{z=-t/2} = 0$  на участке закрепления длиной  $l$ . При этом из условия равенства перемещений  $U$  и  $U_0$  в сечении  $x = 0$  ( $U|_{x=0} = U_0|_{x=0}$ ) получим равенства

$$\gamma = 2u_0/t, \quad u = u_0 \quad \text{при } x = 0. \quad (3)$$

Заметим, что при замене модели (1) на классическую модель Кирхгофа – Лява  $U = u - zw'$ ,  $W = w$  при закреплении любой из поверхностей  $z = \pm t/2$  на участке  $-l \leq x \leq 0$  в сечении  $x = 0$  имеется возможность формулировки только условия заземления  $w|_{x=0} = 0$ ,  $w'|_{x=0} = 0$ , что не позволяет учесть податливость закрепленного участка стержня (штрих здесь и далее означает дифференцирование соответствующей величины по координате  $x$ ).

В соответствии с (1) и (2) в случае малых перемещений имеют место геометрические зависимости:

$$\varepsilon_x = u' + z\gamma', \quad \gamma_{xz} = w' + \gamma, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (4)$$

$$\varepsilon_x^0 = U_{0,x} = \left(1 + \frac{2z}{t}\right)u'_0, \quad \gamma_{xz}^0 = U_{0,z} + W_{0,x} = \frac{2u_0}{t}, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_x^0$  – деформации,  $\gamma_{xz}, \gamma_{xz}^0$  – углы поперечного сдвига соответственно незакрепленной и закрепленной частей стержня, нижние индексы после запятой – частные производные по  $x$  и  $z$ . Для формирующихся в указанных частях стержня нормальных и касательных напряжений составим физические соотношения:

$$\sigma_x = E_1(u' + z\gamma'), \quad \sigma_{xz} = G_{13}(w' + \gamma), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (6)$$

$$\sigma_x^0 = E_1\left(1 + \frac{2z}{t}\right)u'_0, \quad \sigma_{xz}^0 = \frac{G_{13}2u_0}{t}, \quad -l \leq x \leq 0. \quad (7)$$

Здесь  $E_1, G_{13}$  – соответственно модули упругости материала при деформировании его вдоль оси стержня и при поперечном сдвиге.

## 2. Построение уравнений движения стержня

При действии на стержень динамической поперечной нагрузки  $p(x, \tau)$  можно записать вариационное уравнение Гамильтона – Остроградского

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ \delta\Pi_0 + \delta\Pi - \delta K_0 - \delta K - \int_0^a p(x, \tau) \delta w dx \right] dt = 0, \quad (8)$$

где  $\delta\Pi_0, \delta\Pi$  – вариации потенциальной энергии деформации,  $\delta K_0, \delta K$  – вариации кинетической энергии соответственно закрепленного и незакрепленного участков стержня:

$$\delta\Pi_0 = \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^0 \delta\varepsilon_x^0 + \sigma_{xz}^0 \delta\gamma_{xz}^0) dz dx, \quad \delta\Pi = \int_0^a \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_{xz} \delta\gamma_{xz}) dz dx; \quad (9)$$

$$\delta K_0 = \rho \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} (\ddot{U}_0 \delta U_0 + \ddot{W}_0 \delta W_0) dz dx, \quad \delta K = \rho \int_0^a \int_{-t/2}^{t/2} (\ddot{U} \delta U + \ddot{W} \delta W) dz dx. \quad (10)$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала стержня. С учетом соотношений (1), (2) и (4)–(7) выражения (9), (10) после интегрирования по переменной  $z$  можно представить в виде

$$\delta\Pi_0 = \int_{-l}^0 (T_{11}^0 \delta u'_0 + T_{13}^0 \delta u_0) dx, \quad \delta\Pi = \int_0^a [T_{11} \delta u' + M_{11} \delta\gamma' + T_{13} (\delta w' + \delta\gamma)] dx, \quad (11)$$

$$\delta K_0 = \frac{4\rho t}{3} \int_{-l}^0 \ddot{u}_0 \delta u_0 dx, \quad \delta K = \rho t \int_0^a \left( \ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w + \frac{t^2}{12} \ddot{\gamma} \delta\gamma \right) dx, \quad (12)$$

где

$$T_{11}^0 = \frac{4}{3} B u_0', \quad T_{13}^0 = 4 G_{13} \frac{u_0}{t}, \quad B = E_1 t, \quad (13)$$

$$T_{11} = B u', \quad M_{11} = D \gamma', \quad T_{13} = B_{13} (w' + \gamma), \quad B_{13} = G_{13} t, \quad D = \frac{E_1 t^3}{12}. \quad (14)$$

Подставляя в (8) выражения (11), (12) и учитывая при этом условия (3), получаем вариационное уравнение

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{-l}^0 \left( T_{13}^0 - T_{11,x}^0 + \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}_0 \right) \delta u_0 dx + \int_0^a (\rho t \ddot{u} - T_{11,x}) \delta u dx + \int_0^a \left( T_{13} - M_{11,x} + \frac{\rho t^3}{12} \ddot{\gamma} \right) \delta \gamma dx +$$

$$+ \int_0^a \left( -T_{13,x} - p(x, \tau) + \rho t \ddot{w} \right) \delta w dx \Bigg] d\tau + \left( T_{11}^0 - T_{11} - \frac{2M_{11}}{t} \right) \delta u_0 \Bigg|_{x=0} -$$

$$- T_{11}^0 \delta u_0 \Bigg|_{x=-l} + T_{11} \delta u \Bigg|_{x=a} + T_{13} \delta w \Bigg|_{x=a} + M_{11} \delta \gamma \Bigg|_{x=a} = 0,$$

из которого с условием независимости величин  $\delta u_0$ ,  $\delta u$ ,  $\delta w$ ,  $\delta \gamma$  и отличия их от нуля следуют уравнения движения стержня:

$$T_{11,x}^0 - T_{13}^0 - \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}_0 = 0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (15)$$

$$T_{11,x} - \rho t \ddot{u} = 0, \quad M_{11,x} - T_{13} - \frac{\rho t^3}{12} \ddot{\gamma} = 0, \quad T_{13,x} + p(x, \tau) - \rho t \ddot{w} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (16)$$

граничные условия

$$T_{11}^0 \Bigg|_{x=-l} = 0 \quad \text{при} \quad \delta u_0 \Bigg|_{x=-l} \neq 0, \quad (17)$$

$$T_{11} \Bigg|_{x=a} = 0 \quad \text{при} \quad \delta u \Bigg|_{x=a} \neq 0, \quad M_{11} \Bigg|_{x=a} = 0 \quad \text{при} \quad \delta \gamma \Bigg|_{x=a} \neq 0, \quad T_{13} \Bigg|_{x=a} = 0 \quad \text{при} \quad \delta w \Bigg|_{x=a} \neq 0, \quad (18)$$

а в сечении  $x = 0$  в дополнение к условиям (3) в силу  $\delta u_0 \Bigg|_{x=0} \neq 0$  формулируется статическое условие сопряжения участков стержня

$$\left( T_{11}^0 - T_{11} - \frac{2M_{11}}{t} \right) \Bigg|_{x=0} = 0. \quad (19)$$

### 3. Аналитические решения характерных задач

**Задача 1.** Определяется динамическая реакция стержня-полосы, закрепленного на участке  $-l \leq x \leq 0$  по поверхности  $z = -t/2$ , при действии вибрационной нагрузки в виде осевой силы  $P = \tilde{P} \exp(i\omega\tau)$  (рис. 4) с амплитудой  $\tilde{P}$  и круговой частотой  $\omega$  ( $i$  – мнимая единица).

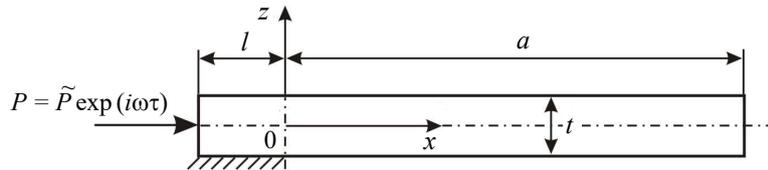


Рис. 4. Схема закрепления и нагружения стержня

В силу (15) и (16) на участках стержня  $-l \leq x \leq 0$  и  $0 \leq x \leq a$  имеют место уравнения движения

$$T_{11,x}^0 - T_{13}^0 - \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}_0 = 0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (20)$$

$$T_{11,x} - \rho t \ddot{u} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (21)$$

$$M_{11,x} - T_{13} - \frac{\rho t^3}{12} \ddot{\gamma} = 0, \quad T_{13,x} - \rho t \ddot{w} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (22)$$

которые при пренебрежении во втором уравнении системы (22) силами инерции, обусловленными поворотом поперечных сечений стержня, то есть при  $\ddot{\gamma} = 0$ , и использовании соотношений (13), (14) принимают вид:

$$u_0'' - k^2 u_0 - \frac{\rho}{E_1} \ddot{u}_0 = 0, \quad k^2 = \frac{3G_{13}}{E_1 t^2}, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (23)$$

$$B u'' - \rho t \ddot{u} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (24)$$

$$D \gamma'' - B_{13} (w' + \gamma) = 0, \quad B_{13} (w'' + \gamma') - \rho t \dot{w} = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (25)$$

Введем в рассмотрение функцию перемещений  $\varphi$  в соответствии с представлениями

$$w = \left( -1 + \frac{D}{B_{13}} \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi, \quad \gamma = \varphi'. \quad (26)$$

Тогда первое уравнение системы (25) при подстановке в него (26) удовлетворяется тождественно, а второе преобразуется к виду

$$D \varphi^{IV} - \frac{\rho t D}{B_{13}} \ddot{\varphi}'' + \rho t \dot{\varphi} = 0. \quad (27)$$

Его решение будем искать в виде

$$\varphi = \tilde{\varphi} \exp(i\omega\tau). \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), получим уравнение

$$\tilde{\varphi}^{IV} - \Omega_w^2 \tilde{\varphi} + \Omega_w^2 r \tilde{\varphi}'' = 0, \quad (29)$$

где

$$r = \frac{D}{B_{13}}, \quad \Omega_w^2 = \frac{\rho t \omega^2}{D}. \quad (30)$$

Решение уравнения (29) имеет вид

$$\tilde{\varphi} = g_1 \exp(r_1 x) + g_2 \exp(r_2 x) + g_3 \exp(r_3 x) + g_4 \exp(r_4 x). \quad (31)$$

Здесь  $g_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) – постоянные интегрирования, а

$$\begin{aligned} r_1 &= \left( -\frac{\Omega_w^2 r}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_w^4 r^2}{4} + \Omega_w^2} \right)^{1/2}, & r_2 &= \left( -\frac{\Omega_w^2 r}{2} + \sqrt{\frac{\Omega_w^4 r^2}{4} + \Omega_w^2} \right)^{1/2}, \\ r_3 &= \left( -\frac{\Omega_w^2 r}{2} - \sqrt{\frac{\Omega_w^4 r^2}{4} + \Omega_w^2} \right)^{1/2}, & r_4 &= \left( -\frac{\Omega_w^2 r}{2} - \sqrt{\frac{\Omega_w^4 r^2}{4} + \Omega_w^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (32)$$

В соответствии с (26) и (28) найдем функции

$$\begin{aligned}\gamma &= \tilde{\gamma} \exp(i\omega\tau) = \sum_{j=1}^4 g_j r_j \exp(r_j x + i\omega\tau), \\ w &= \tilde{w} \exp(i\omega\tau) = \sum_{j=1}^4 g_j (-1 + r r_j^2) \exp(r_j x + i\omega\tau).\end{aligned}\quad (33)$$

Для уравнения (29) имеют место граничные условия  $T_{13}|_{x=a} = 0$ ,  $M_{11}|_{x=a} = 0$ , которые с использованием (14) и (33) приводят к двум алгебраическим уравнениям, содержащим постоянные  $g_j$ :

$$\sum_{j=1}^4 g_j r_j^3 \exp(r_j a) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 g_j r_j^2 \exp(r_j a) = 0. \quad (34)$$

Решение уравнения (24) будем искать в виде

$$u = \tilde{u} \exp(i\omega\tau). \quad (35)$$

Тогда, используя первое соотношение в (14), вместо (24) получим уравнение

$$\tilde{u}'' + \Omega_u^2 \tilde{u} = 0, \quad (36)$$

где

$$\Omega_u^2 = \frac{\rho\omega^2}{E_1}. \quad (37)$$

В силу того, что  $\Omega_u^2 > 0$ , решение уравнения (36) будет иметь вид

$$\tilde{u} = g_5 \cos(\Omega_u x) + g_6 \sin(\Omega_u x), \quad (38)$$

где  $g_5, g_6$  – постоянные интегрирования. Полученное решение подчиним граничному условию  $T_{11}|_{x=a} = 0$ , что с использованием первого соотношения в (14) позволяет получить зависимость  $g_5 = g_6 \operatorname{ctg}(\Omega_u a)$  и преобразовать функцию (38) к виду

$$\tilde{u} = g_6 [\operatorname{ctg}(\Omega_u a) \cos(\Omega_u x) + \sin(\Omega_u x)]. \quad (39)$$

Представим продольную силу  $T_{11}$  и изгибающий момент  $M_{11}$  в виде

$$T_{11} = \tilde{T}_{11} \exp(i\omega\tau), \quad M_{11} = \tilde{M}_{11} \exp(i\omega\tau). \quad (40)$$

Тогда в соответствии с (13), (33) и (39) будут иметь место зависимости

$$\tilde{T}_{11} = B\Omega_u (-\operatorname{ctg}(\Omega_u a) \sin(\Omega_u x) + \cos(\Omega_u x)) g_6, \quad \tilde{M}_{11} = D \sum_{j=1}^4 g_j r_j^2 \exp(r_j x), \quad (41)$$

а при  $x = 0$  выполняются условия

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{11}|_{x=0} &= B\Omega_u g_6, \quad \tilde{M}_{11}|_{x=0} = D \sum_{j=1}^4 g_j r_j^2, \\ \tilde{u}|_{x=0} &= g_5 = g_6 \operatorname{ctg}(\Omega_u a), \quad \tilde{\gamma}|_{x=0} = \sum_{j=1}^4 g_j r_j.\end{aligned}\quad (42)$$

При представлении функции  $u_0$  в виде  $u_0 = \tilde{u}_0 \exp(i\omega\tau)$  вместо (23) приходим к уравнению

$$\tilde{u}_0'' - k_*^2 \tilde{u}_0 = 0, \quad (43)$$

где

$$k_*^2 = k^2 - \frac{\rho\omega^2}{E_1}, \quad k^2 = \frac{3G_{13}}{E_1 t^2}. \quad (44)$$

Вычисления показали, что первое слагаемое в  $k_*^2$  для реальных конструкционных материалов и значений  $\omega^2$  и  $t$  примерно на четыре порядка превышает второе. Поэтому величина  $k_*^2$  практически всегда получается положительной. В этом случае общее решение уравнения (43) имеет вид

$$\tilde{u}_0 = c_1 \exp(k_* x) + c_2 \exp(-k_* x), \quad (45)$$

где  $c_1, c_2$  – постоянные интегрирования. При действии в сечении  $x = -l$  внешней осевой силы  $P = \tilde{P} \exp(i\omega t)$  вместо (17) необходимо сформулировать граничное условие  $\tilde{T}_{11}^0|_{x=-l} = -\tilde{P}_0$ , которое при использовании (13) преобразуется к виду

$$\tilde{u}'|_{x=-l} = \tilde{T}_0, \quad \tilde{T}_0 = -\frac{3\tilde{P}_0}{4E_1 t}. \quad (46)$$

После подчинения решения (45) условию (46) можно получить

$$c_1 = \frac{\exp(k_* l)}{k_*} \tilde{T}_0 + c_2 \exp(2k_* l), \quad (47)$$

$$\tilde{u}_0 = c_2 (\exp(k_*(x+2l)) + \exp(-k_* l)) + \frac{\exp(k_*(x+l))}{k_*} \tilde{T}_0, \quad (48)$$

$$\tilde{u}_0|_{x=0} = c_2 (1 + \exp(2k_* l)) + \frac{\exp(k_* l)}{k_*} \tilde{T}_0, \quad (49)$$

$$\tilde{T}_{11}^0|_{x=0} = \frac{4B \exp(k_* l)}{3} \tilde{T}_0 + \frac{4Bk_*}{3} (\exp(2k_* l) - 1) c_2. \quad (50)$$

В построенных решениях задачи неизвестными являются постоянные интегрирования  $g_1, g_2, g_3, g_4$ , входящие в (33),  $g_6$ , входящая в (39), а также  $c_2$ , входящая в (48). Для их определения имеются два алгебраических уравнения (34), а недостающие четыре уравнения могут быть получены из граничного условия  $w|_{x=0} = 0$  и условий сопряжения

$$\left( \gamma - \frac{2u_0}{t} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (u - u_0) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left( T_{11}^0 - T_{11} - \frac{2M_{11}}{t} \right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (51)$$

Граничное условие  $w|_{x=0} = 0$  при использовании (33) приводит к уравнению

$$\sum_{j=1}^4 g_j (-1 + r r_j^2) = 0, \quad (52)$$

а условия сопряжения (51) при использовании (33), (42), (49) и (50) приводят к трем алгебраическим уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 g_j r_j - \frac{2}{t} (1 + \exp(2k_* l)) c_2 &= \frac{2 \exp(k_* l)}{k_* t} \tilde{T}_0, \\ \text{ctg}(\Omega_u a) g_6 - (1 + \exp(2k_* l)) c_2 &= \frac{\exp(k_* l)}{k_*} \tilde{T}_0, \\ \frac{4Bk_*}{3} (\exp(2k_* l) - 1) c_2 - B\Omega_u g_6 - \frac{2D}{t} \sum_{j=1}^4 g_j r_j^2 &= -\frac{4B \exp(k_* l)}{3} \tilde{T}_0. \end{aligned}$$

Задача 2. Рассматриваются вынужденные изгибные колебания плоского стержня с двумя консольными частями, закрепленного на участке  $-l \leq x \leq 0$  по поверхности  $z = -t/2$  (рис. 5), при действии гармонической нагрузки на одной из этих частей в виде сосредоточенной силы  $P = \tilde{P} \exp(i\omega\tau)$  с амплитудой  $\tilde{P}$  и круговой частотой  $\omega$ . На рисунке обозначено:  $l$  – нагружаемая консольная часть;  $2$  – свободная консольная часть,  $0$  – закрепленный участок.

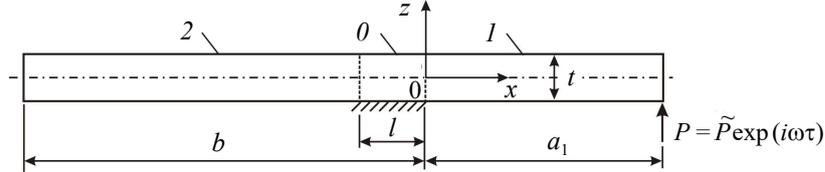


Рис. 5. Схема закрепления и нагружения стержня

Для описания динамического поведения консольных частей  $l, 2$  стержня воспользуемся уравнениями

$$T_{11,x}^{(k)} - \rho t \ddot{u}_{(k)} = 0, \quad M_{11,x}^{(k)} - T_{13}^{(k)} = 0, \quad T_{13,x}^{(k)} - \rho t \ddot{w}_{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (53)$$

которые получаются из (16) при  $p(x, \tau) = 0$  и  $\ddot{\gamma} = 0$ . Для них в сечениях  $x = a_1$  и  $x = -b$  формулируются силовые граничные условия:

$$\begin{aligned} T_{11}^{(1)}|_{x=a_1} = 0, \quad M_{11}^{(1)}|_{x=a_1} = 0, \quad T_{13}^{(1)}|_{x=a_1} = P, \\ T_{11}^{(2)}|_{x=-b} = 0, \quad M_{11}^{(2)}|_{x=-b} = 0, \quad T_{13}^{(2)}|_{x=-b} = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

а в сечениях  $x = 0$  и  $x = -l$  должны быть выполнены условия сопряжения:

$$\begin{aligned} \left( \gamma_{(1)} - \frac{2u_0}{t} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (u_{(1)} - u_0) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left( T_{11}^0 - T_{11}^{(1)} - \frac{2M_{11}^{(1)}}{t} \right) \Big|_{x=0} = 0, \\ \left( \gamma_{(2)} - \frac{2u_0}{t} \right) \Big|_{x=-l} = 0, \quad (u_{(2)} - u_0) \Big|_{x=-l} = 0, \quad \left( T_{11}^0 - T_{11}^{(2)} - \frac{2M_{11}^{(2)}}{t} \right) \Big|_{x=-l} = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

С учетом (14) уравнения (53) можно преобразовать к виду

$$B u_{(k)}'' - \rho t \ddot{u}_{(k)} = 0, \quad (56)$$

$$D \gamma_{(k)}'' - B_{13} (w_{(k)}' + \gamma_{(k)}) = 0, \quad B_{13} (w_{(k)}'' + \gamma_{(k)}') - \rho t \ddot{w}_{(k)} = 0. \quad (57)$$

Путем введения функций перемещений  $\varphi_{(k)}$  в соответствии с зависимостями

$$w_{(k)} = \left( -1 + \frac{D}{B_{13}} \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi_{(k)}, \quad \gamma_{(k)} = \varphi_{(k)}' \quad (58)$$

первое уравнение в (57) удовлетворяется тождественно, а второе принимает вид

$$D \varphi_{(k)}^{IV} - \frac{\rho t D}{B_{13}} \ddot{\varphi}_{(k)}'' + \rho t \ddot{\varphi}_{(k)} = 0. \quad (59)$$

Решения уравнений (56), (59) ищутся в виде

$$u_{(k)} = \tilde{u}_{(k)} \exp(i\omega\tau), \quad \varphi_{(k)} = \tilde{\varphi}_{(k)} \exp(i\omega\tau), \quad (60)$$

из чего следуют уравнения

$$\tilde{u}_{(k)}'' + \Omega_u^2 \tilde{u}_{(k)} = 0, \quad \tilde{\varphi}_{(k)}^{IV} + \Omega_w^2 r \tilde{\varphi}_{(k)}'' - \Omega_w^2 \tilde{\varphi}_{(k)} = 0 \quad (61)$$

с параметрами  $\Omega_u^2, \Omega_w^2, r$ , определяемыми выражениями (30), (37). Общие решения уравнений (60) имеют вид

$$\tilde{\varphi}_{(k)} = g_1^{(k)} \exp(r_1 x) + g_2^{(k)} \exp(r_2 x) + g_3^{(k)} \exp(r_3 x) + g_4^{(k)} \exp(r_4 x), \quad (62)$$

$$\tilde{u}_{(k)} = g_5^{(k)} \exp(i\Omega_u x) + g_6^{(k)} \exp(-i\Omega_u x) \quad (63)$$

с величинами  $r_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ ), определяемыми соотношениями (32). При использовании (62) в соответствии с (58) и (60) получим выражения

$$\tilde{\gamma}_{(k)} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(k)} r_j \exp(r_j x), \quad \tilde{w}_{(k)} = \sum_{j=1}^4 g_j^{(k)} (-1 + r r_j^2) \exp(r_j x). \quad (64)$$

С учетом (14) и (64) вместо (54) получаем граничные условия

$$\begin{aligned} \tilde{u}'_{(1)}|_{x=a_1} = 0, \quad \tilde{\gamma}'_{(1)}|_{x=a_1} = 0, \quad (\tilde{w}'_{(1)} + \tilde{\gamma}_{(1)})|_{x=a_1} = \tilde{P}/B_{13}, \\ \tilde{u}'_{(2)}|_{x=-b} = 0, \quad \tilde{\gamma}'_{(2)}|_{x=-b} = 0, \quad (\tilde{w}'_{(2)} + \tilde{\gamma}_{(2)})|_{x=-b} = 0, \end{aligned} \quad (65)$$

дающие при подстановке в них выражений (63) и (64) шесть алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} g_5^{(1)} \exp(i\Omega_u a_1) - g_6^{(1)} \exp(-i\Omega_u a_1) = 0, \\ \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r_j^2 \exp(r_j a_1) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r r_j^3 \exp(r_j a_1) = \frac{\tilde{P}}{B_{13}}, \\ g_5^{(2)} \exp(-i\Omega_u b) - g_6^{(2)} \exp(i\Omega_u b) = 0, \\ \sum_{j=1}^4 g_j^{(2)} r_j^2 \exp(-r_j b) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 g_j^{(2)} r_j^3 \exp(-r_j b) = 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Для описания динамического поведения закрепленного участка стержня можно по-прежнему использовать уравнение (23) и его решение (45), приведенные при решении задачи 1. В соответствии с (13), (14), (63) и (45) амплитуды продольных усилий в закрепленной и незакрепленных частях стержня будут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{11}^0 = \frac{4E_1 t k_*}{3} (c_1 \exp(k_* x) - c_2 \exp(-k_* x)), \\ \tilde{T}_{11}^{(k)} = iE_1 t \Omega_u (g_5^{(k)} \exp(i\Omega_u x) - g_6^{(k)} \exp(-i\Omega_u x)). \end{aligned} \quad (67)$$

Используя условия сопряжения (55), в дополнение к (66) получим еще шесть уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r_j - \frac{2}{t} (c_1 + c_2) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 g_j^{(2)} r_j \exp(-r_j l) - \frac{2}{t} (c_1 \exp(-k_* l) + c_2 \exp(k_* l)) = 0, \\ g_5^{(1)} + g_6^{(1)} - c_1 - c_2 = 0, \\ g_5^{(2)} \exp(-i\Omega_u l) + g_6^{(2)} \exp(i\Omega_u l) - c_1 \exp(-k_* l) - c_2 \exp(k_* l) = 0, \\ \frac{4}{3} k (c_1 - c_2) - i\Omega_u (g_5^{(1)} - g_6^{(1)}) - \frac{t}{6} \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r_j^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3}k_*(c_1 \exp(-k_*l) - c_2 \exp(k_*l)) - i\Omega_u(g_5^{(2)} \exp(-i\Omega_u l) - g_6^{(2)} \exp(i\Omega_u l)) - \frac{t}{6} \sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} r_j^2 \exp(-r_j l) = 0. \quad (68)$$

Полученные системы (66) и (68) содержат двенадцать уравнений и четырнадцать постоянных интегрирования  $c_1, c_2, g_j^{(k)}$  ( $j = \overline{1, 6}; k = 1, 2$ ). Недостающие два уравнения следуют из условий

$$\tilde{w}_{(1)}|_{x=0} = 0, \quad \tilde{w}_{(2)}|_{x=l} = 0,$$

которые с учетом второго выражения в (64) принимают вид

$$\sum_{j=1}^4 g_j^{(1)} (-1 + r r_j^2) = 0, \quad \sum_{j=1}^4 g_j^{(2)} (-1 + r r_j^2) \exp(-r_j l) = 0. \quad (69)$$

#### 4. Численные эксперименты и анализ полученных результатов

**Эксперимент 1.** Определялась динамическая реакция плоского стержня (см. рис. 4) на основе аналитического решения задачи 1, полученного в п. 3, при действии гармонической осевой силы  $P = \tilde{P} \exp(i\omega t)$  с амплитудой  $\tilde{P} = 50$  кН/м (на единицу ширины стержня) и круговой частотой  $\omega = 2\pi f$  при  $f = 60$  Гц, близкой к низшей собственной частоте  $f_1 = 60,932$  Гц. Материал стержня – однонаправленный волокнистый композит на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с модулями упругости  $E_1 = 100$  ГПа,  $G_{13} = 1$  ГПа и плотностью  $\rho = 1500$  кг/м<sup>3</sup>. Геометрические параметры стержня:  $l = 30$  мм,  $a = 250$  мм,  $t = 3$  мм.

На рис. 6 приведены амплитуды прогибов  $\tilde{w}$  стержня при частоте  $f = 60$  Гц, свидетельствующие о прохождении колебаний в его незакрепленную часть за счет деформируемости участка закрепления конечной длины  $l$ .

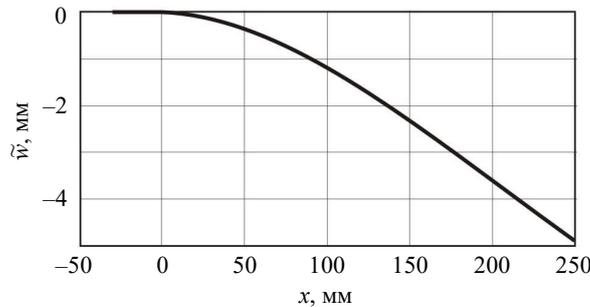


Рис. 6. Амплитуды прогибов  $\tilde{w}$  стержня

На рис. 7 приведены амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$  на поверхности  $z = t/2$  и амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0, \tilde{\sigma}_{xz}$  в поперечных сечениях стержня, показывающие наличие существенной трансформации параметров НДС при переходе через границу от незакрепленной части к участку закрепления конечной длины  $l$  (верхний индекс 0 в напряжениях соответствует закрепленной части стержня). На рисунке пунктирные линии соответствуют  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_{xz}^0$ , а сплошные линии –  $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_{xz}$ .

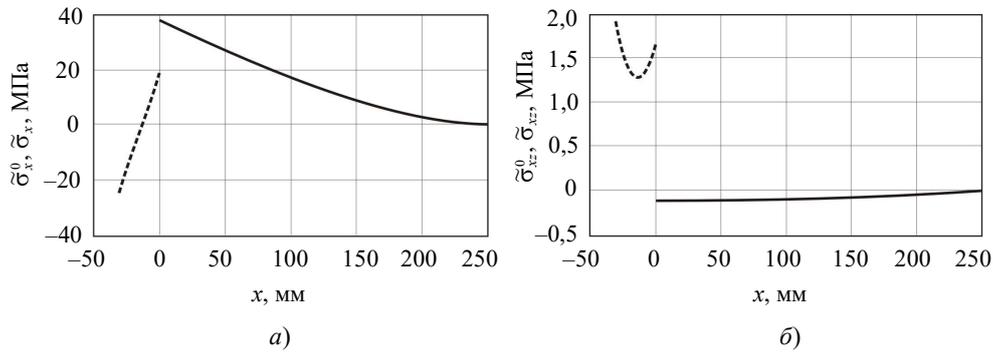


Рис. 7. Амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$  на поверхности  $z = t/2$  (а) и амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0, \tilde{\sigma}_{xz}$  (б)

Эксперимент 2. Определялась динамическая реакция плоского стержня (см. рис. 5) с двумя консольными частями при действии гармонической вынуждающей силы  $P = \tilde{P} \exp(i\omega t)$  с амплитудой  $\tilde{P} = 240$  Н/м (на единицу ширины стержня) и круговой частотой  $\omega = 2\pi f$  при  $f = 60$  Гц, близкой к низшей собственной частоте  $f_1 = 61,046$  Гц, с использованием соотношений, полученных в п. 3 при аналитическом решении задачи 2. Материал стержня – однонаправленный волокнистый композит на основе углеродного волокна марки ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с характеристиками  $E_1 = 100$  ГПа,  $G_{13} = 1$  ГПа,  $\rho = 1500$  кг/м<sup>3</sup>. Геометрические параметры стержня:  $l = 50$  мм,  $b = 300$  мм,  $a_1 = 200$  мм,  $t = 3$  мм.

На рис. 8 приведены амплитуды прогибов  $\tilde{w}$  стержня при частоте  $f = 60$  Гц, которые наблюдаются не только в его нагруженной части, но также и в ненагруженной части, что объясняется деформируемостью участка закрепления конечной длины  $l$ .

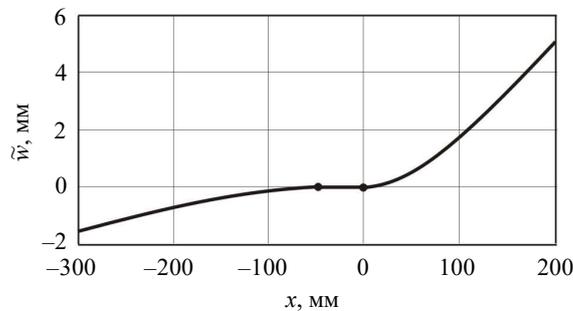


Рис. 8. Амплитуды прогибов  $\tilde{w}$  (точки соответствуют границам закрепленной части стержня)

На рис. 9 приведены амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$  на поверхности  $z = t/2$  и амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0, \tilde{\sigma}_{xz}$  в поперечных сечениях стержня, показывающие наличие трансформации параметров НДС при переходе через границы от незакрепленных частей стержня к его закрепленной части. Пунктирные линии на рисунке соответствуют  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_{xz}^0$ , сплошные линии –  $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_{xz}$ .

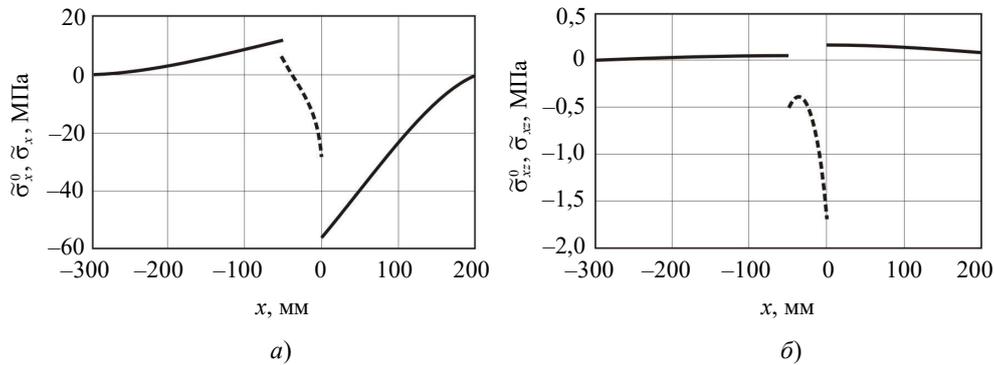


Рис. 9. Амплитуды нормальных напряжений  $\tilde{\sigma}_x^0, \tilde{\sigma}_x$  на поверхности  $z = t/2$  (а) и амплитуды касательных напряжений  $\tilde{\sigma}_{xz}^0, \tilde{\sigma}_{xz}$  (б)

### Заключение

Построены основные соотношения механики плоских стержней с участками закрепления конечной длины  $l$  на одной из лицевых поверхностей на основе сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Получены уравнения движения незакрепленной и закрепленной частей стержня, а также граничные условия к ним на основе вариационного уравнения Гамильтона – Остроградского. Сформулированы условия сопряжения закрепленного и незакрепленного участков стержня. На основе выведенных соотношений найдены точные аналитические решения двух характерных линейных задач о поперечных изгибных колебаниях консольно закрепленного плоского стержня в условиях вибрационного нагружения периодической осевой силой, приложенной к торцевому сечению закрепленного участка конечной длины, а также задачи о поперечных изгибных колебаниях плоского стержня с двумя незакрепленными концами и участком закрепления конечной длины между ними при вибрационном нагружении поперечной силой на одном из незакрепленных концов. Проведены численные эксперименты по определению динамической реакции рассмотренных стержней в рамках отмеченной сдвиговой модели С.П. Тимошенко, показывающие наличие трансформации параметров НДС при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному.

Полученные результаты, связанные с исследованием процесса деформирования стержня-полосы, имеющего участки закрепления конечной длины и находящегося в условиях вибрационного нагружения, следует рассматривать как методологию постановки соответствующих задач механики с учетом податливости закрепленного участка стержня. В рамках использования классической модели Кирхгофа – Лява на закрепленном участке возможна формулировка только общепринятых граничных условий в сечении перехода от незакрепленного участка к закрепленному, а при использовании известной уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко имеется возможность учета закрепления стержня с абсолютно жестким опорным элементом только на одной из лицевых поверхностей.

### Список литературы

1. Шнайдер А.Д., Кузина А.В., Калашников В.С. Влияние внешних вибрационных воздействий на конструкцию РЭС. *Современные информационные технологии*. 2018. №28. С. 52–56.
2. Рыбаков И.М., Гришко А.К., Кочегаров И.И. Выбор и обоснование способов защиты сложных изделий РЭА от виброперегрузок. *Современные информационные технологии*. 2018. №28. С. 56–60.
3. Футин В.А., Евгеньев С.С. К расчету резонансных режимов работы рабочих колес центробежного компрессора. *Изв. вузов. Авиационная техника*. 2020. №1. С. 121–125.
4. Вербицкий А.Б., Родионов Г.Л., Сидоренко А.С. Математическое моделирование вибродинамического состояния конструкций авиационных изделий в условиях их применения. *Вестник Московского авиационного института*. 2012. Т. 19. №1. С. 35–43.
5. Чухлебов Р.В., Лошкарев А.Н., Сидоренко А.С., Дмитриев В.Г. Экспериментальное исследование вибрации конструкции авиационного изделия при действии полетных нагрузок. *Вестник Московского авиационного института*. 2017. Т. 24. №3. С. 51–59.
6. Бабаев Н.Н., Ленгеков В.Г. *Некоторые вопросы общей вибрации судов*. Л.: Судпромгиз, 1961. 308 с.
7. Александров А.В., Крыжевич А.Б., Норьков Е.С., Шапошников В.М. Применение современных программных комплексов численной гидродинамики при решении задач прочности и вибрации конструкции корабля. *Судостроение*. 2012. №2(801). С. 23–27.
8. Сергеев А.А., Андронов А.А. Методы учета динамических воздействий подвижной нагрузки на пролетные строения мостов. *Научные труды ОАО ЦНИИС*. 2006. Вып. 230. С. 21–25.
9. Доев В.С. *Поперечные колебания балок*. М.: КНОРУС, 2016. 412 с.
10. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. Идентификация динамических характеристик упругости и демпфирующих свойств титанового сплава ОТ-4 на основе исследования затухающих колебаний тест-образцов. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2019. №2. С. 27–39. DOI: 10.1134/S0235711919020111.
11. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishikin V.M. An integral method of surface damping of bending vibrations for thin-walled structures. *Russian Aeronautics*. 2019. Vol. 62. No 4. P. 564–570. DOI: 10.3103/S1068799819040056.
12. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. *Journal of Mathematics and Physics*. 1944. Vol. 23. Iss. 4. P. 184–191. <https://doi.org/10.1002/sapm1944231184>.
13. Mindlin R.D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *Journal of Applied Physics*. 1951. Vol. 23. No 3. P. 316–323. <https://doi.org/10.1063/1.1699948>.
14. Reissner E. A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates. *AIAA Journal*. 1972. Vol. 10. No 5. P. 716–718. DOI:10.2514/3.50194.
15. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. DOI: 10.1115/1.3167719.
16. Librescu L. Refined geometrically nonlinear theories of anisotropic laminated shells. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1987. Vol. 45. No 1. P. 1–22. DOI: 10.1090/QAM/885164.
17. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. DOI: 10.1115/1.3125837.
18. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. DOI: 10.1016/0020-7462(88)90013-3.
19. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. DOI: 10.1016/0020-7462(90)90006-U.
20. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *International Journal of Engineering Science*. 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. DOI: 10.1016/0020-7225(91)90097-M.
21. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates

with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90102-D.

22. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. Iss. 39-41. P. 4279–4300. DOI: 10.1016/J.CMA.2004.11.005.

23. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Computational Mechanics*. 2006. Vol. 37. Iss. 6. P. 479–497. DOI: 10.1007/S00466-005-0730-1.

24. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. DOI: 10.1007/s11029-020-09880-8.

25. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. DOI: 10.1007/s11029-020-09895-1.

### References

1. Shnayder A.D., Kuzina A.V., Kalashnikov V.S. Vliyanie vneshnikh vibratsionnykh vozdeystviy na konstruktsiyu radioelektronnykh sredstv [The impact of external vibration effects on the radioelectronic means design]. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii [Modern Information Technologies]*. 2018. No 28. P. 52–56 (In Russian).

2. Rybakov I.M., Grishko A.K., Kochegarov I.I. Vybor i obosnovanie sposobov zashchity slozhnykh izdeliy radioelektronnoy apparatury ot vibroperegruzok [Selection and justification of ways to protect complex products of electronic equipment from vibration overloads]. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii [Modern Information Technologies]*. 2018. No 28. P. 56–60 (In Russian).

3. Futin V.A., Evgen'ev S.S. Calculation of the resonant operating modes of centrifugal compressor impellers. *Russian Aeronautics*. 2020. Vol. 63. No 1. P. 131–136. DOI: 10.3103/S1068799820010195.

4. Verbickij A.B., Rodionov G.L., Sidorenko A.S. Matematicheskoe modelirovanie vibrodinamicheskogo sostoyaniya konstruktsiy aviatsionnykh izdeliy v usloviyakh ikh primeneniya [Mathematical simulation vibration and dynamic states of an aircraft equipment structure in the conditions of their application]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Aerospace MAI Journal]*. 2012. Vol. 19. No 1. P. 35–42 (In Russian).

5. Chukhlebov R.V., Loshkarev A.N., Sidorenko A.S., Dmitriev V.G. Eksperimentalnoe issledovanie vibratsii konstruktsii aviatsionnogo izdeliya pri deystvii poletnykh nagruzok [Experimental study of an aircraft products structure vibrations under flight loads action]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Aerospace MAI Journal]*. 2017. Vol. 24. No 3. P. 51–59 (In Russian).

6. Babaev N.N., Lentekov V.G. *Nekotorye voprosy obshchey vibratsii sudov [Some Issues of General Ship Vibration]*. Leningrad. Sudpromgiz Publ. 1961. 308 p. (In Russian).

7. Alexandrov A.V., Kryzhevich G.B., Norkov E.S., Shaposhnikov V.M. Primenenie sovremennykh programmnykh kompleksov chislennoy gidrodinamiki pri reshenii zadach prochnosti i vibratsii konstruktsii korablya [Application of modern computational fluid dynamics programmed complexes when estimating structural strength and vibrations of the ship]. *Sudostroenie*. 2012. No 2(801). P. 23–27 (In Russian).

8. Sergeev A.A., Andronov A.A. Metody ucheta dinamicheskikh vozdeystviy podvizhnoy nagruzki na proletnye stroeniya mostov [Methods for taking into account the dynamic effects of a moving load on bridge spans]. *Nauchnye trudy OAO TsNIIS [Scientific Works of JSC TsNIIS]*. 2006. Iss. 230. P. 21–25 (In Russian).

9. Doev V.S. *Poperechnye kolebaniya balok [Transverse Vibrations of Beams]*. Moscow. KNORUS Publ. 2016. 412 p. (In Russian).

10. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Identification of the dynamic elasticity characteristics and damping properties of the OT-4 titanium alloy based on study of damping

- flexural vibrations of the test specimens. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2019. Vol. 48. No 2. P. 119–129. DOI: 10.3103/S1052618819020110.
11. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishikin V.M. An integral method of surface damping of bending vibrations for thin-walled structures. *Russian Aeronautics*. 2019. Vol. 62. No 4. P. 564–570. DOI: 10.3103/S1068799819040056.
  12. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. *Journal of Mathematics and Physics*. 1944. Vol. 23. Iss. 4. P. 184–191. <https://doi.org/10.1002/sapm1944231184>.
  13. Mindlin R.D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *J. Appl. Phys.* 1951. Vol. 23. No 3. P. 316–323. <https://doi.org/10.1063/1.1699948>.
  14. Reissner E. A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates. *AIAA J.* 1972. Vol. 10. No 5. P. 716–718. DOI: 10.2514/3.50194.
  15. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.* 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. DOI: 10.1115/1.3167719.
  16. Librescu L. Refined geometrically nonlinear theories of anisotropic laminated shells. *Quart. Appl. Math.* 1987. Vol. 45. No 1. P. 1–22. DOI: 10.1090/QAM/885164.
  17. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. DOI: 10.1115/1.3125837.
  18. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *Int. J. Non Linear Mech.* 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 217–229. DOI: 10.1016/0020-7462(88)90013-3.
  19. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *Int. J. Non Linear Mech.* 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. DOI: 10.1016/0020-7462(90)90006-U.
  20. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *Int. J. Eng. Sci.* 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. DOI: 10.1016/0020-7225(91)90097-M.
  21. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *Int. J. Solids Struct.* 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90102-D.
  22. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2005. Vol. 194. Iss. 39-41. P. 4279–4300. DOI: 10.1016/J.CMA.2004.11.005.
  23. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Comput. Mech.* 2006. Vol. 37. Iss. 6. P. 479–497. DOI: 10.1007/S00466-005-0730-1.
  24. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order. *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. DOI: 10.1007/s11029-020-09880-8.
  25. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories. *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. DOI: 10.1007/s11029-020-09895-1.

**MATHEMATICAL MODELING OF THE VIBRATIONS PROPAGATION  
IN THIN-WALL FRAMEWORK STRUCTURES. 1. BASIC RELATIONS  
AND ANALYTICAL SOLUTIONS OF TYPICAL PROBLEMS\***

**Paimushin V.N.<sup>1,2</sup>, Firsov V.A.<sup>1</sup>, Shishkin V.M.<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev,  
Kazan, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russian Federation*

<sup>3</sup>*Vyatka State University, Kirov, Russian Federation*

The design features of the of thin-walled aerospace, shipbuilding, etc. structures in the form of a load-bearing frame sheathed with thin-walled panels, walls, bulkheads, etc. are discussed. Variants of constructive coupling of the specified thin-walled panels with supporting elements of the load-bearing frame and methods for their mathematical description in the classical mechanics of a deformable solid body are considered. It is proposed, without distorting the physical picture of the dynamic behavior of thin-walled panels, to present them in the form of multisupport thin bars resting on rigid elements of the load-bearing frame along part of their front surface. By the example of a plane dynamic problem of the mechanics of a bar with a fixed section of finite length on one of the front surfaces, it is shown that in the study of deformation processes, taking into account the compliance of the fixed section, it is necessary to introduce the concept of transformation of the stress-strain state parameters and the mathematical models used to describe them. Such a transformation takes place when crossing the border from an unfixed section to a fixed one (from a fixed to an unfixed one). Within the framework of the classical Kirchhoff–Love model, it is impossible to take into account the compliance of the fixed section of the bar, and when using the simplest refined shear model of S.P. Timoshenko, such accounting is possible when fixing the length only on one of the front surfaces. In particular, previously discovered and not described in the scientific literature phenomenon of the vibrations transmission through the support joints, regardless of their design, is carried out due to the transformation of the stress-strain state of the dynamically loaded section of the bar into longitudinal-shear vibration modes of the bar in the clamped area, followed by their retransformation into bending vibrations of the adjacent span. Within the framework of S.P. Timoshenko model, the main resolving equations are constructed, and the kinematic and force conditions for conjugation of fixed and non-fixed sections of the bar are formulated. On the basis of the developed mathematical model, exact analytical solutions of typical problems are constructed, confirming the transmission of vibration through the clamped sections of the bar due to the deformability of the marked sections. A significant increase of transverse shear stresses level in the clamped section of the bar in the vicinity of the junction of the unfixed section with the fixed one is revealed.

*Keywords:* thin-walled framed structure, multisupported bar, vibration propagation, transformation of parameters of the stress-strain state of the bar, refined shear model of S.P. Timoshenko.

\*This paper has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (“PRIORITY-2030”, section 1) and the Russian Science Foundation (project No 22-79-10033, section 2-4).