

УДК 539.37

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-168-191

**ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ
В ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ
ИЗ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА,
ПОДЧИНЯЮЩЕГОСЯ СООТНОШЕНИЮ РАБОТНОВА***

© 2022 г.

Хохлов А.В.

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация
Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,
Якутск, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 26.03.2022

Построено точное решение квазистатической задачи об определении напряженно-деформированного состояния полого цилиндра (толстостенной трубы) из физически нелинейно вязкоупругого материала в случае задания радиального перемещения внутренней поверхности трубы и давления на внешней поверхности, медленно меняющихся во времени, в частности задачи о релаксации напряжений в трубе. Предполагается, что материал однороден, изотропен, несжимаем и подчиняется определяющему соотношению вязкоупругости Работнова с двумя произвольными материальными функциями (функцией сдвиговой релаксации и функцией нелинейности), а краевые условия на торцах трубы обеспечивают состояние плоской деформации. Полученные формулы для напряжений содержат отношение радиусов трубы, заданное давление и интегральные операторы от композиции материальных функций и истории изменения перемещения внутренней поверхности трубы.

В случае задания постоянного радиального перемещения внутренней поверхности трубы (в условиях релаксации) вычислены все интегральные операторы, входящие в общее решение, и выведены простые алгебраические формулы для деформаций и напряжений в любой точке трубы через материальные функции определяющих соотношений, отношение радиусов трубы и заданное граничное перемещение, аналитически исследованы свойства кривых релаксации в произвольной точке трубы, распределение напряжений по радиальной координате и свойства средних по сечению окружных и осевых напряжений. Установлено, что одна материальная функция управляет только зависимостью напряжений от времени, а вторая – только зависимостью от радиальной координаты, что окружное и осевое напряжения могут убывать, возрастать и быть немонотонными по радиусу (в задаче о релаксации происходит разделение переменных и сфер влияния материальных функций). Доказано, что в случае нулевого внешнего давления кривые релаксации модулей всех напряжений во всех точках трубы подобны друг другу, убывают по времени

* Выполнено при поддержке Министерством науки и высшего образования РФ (грант №FSRG-2021-0016).

и не имеют точек перегиба, отношение любых напряжений в любых двух точках трубы не зависит от времени, а отношение средних по сечению окружных и осевых напряжений зависит лишь от отношения радиусов трубы и не зависит от времени, материальных функций и граничного перемещения (в отличие от самих средних напряжений).

Ключевые слова: нелинейная вязкоупругость, упругопластичность, краевая задача, свойства поля напряжений, релаксация напряжений, семейство кривых релаксации, функция релаксации, функция нелинейности, несжимаемый материал, продольная сила.

Введение

Статические и динамические задачи о напряженно-деформированном состоянии (НДС) однородных полых цилиндров и многослойных толстостенных труб, нагруженных давлением на внутренней и внешней поверхностях, в рамках теории упругости (задача Ламе, задача Гадолина и др.) и разных вариантов упругопластичности являются классическими из-за обилия приложений их результатов (расчет артиллерийских стволов, газопроводов, шлангов, обделок туннелей, скважин, шахт, процессов запрессовки; проектирование труб и баллонов из функционально градиентных материалов; расчет на ползучесть поверхностно упрочненных труб и труб, подвергающихся агрессивным воздействиям среды; моделирование поведения кровеносных сосудов и т.п.) и благодаря возможности построить точное решение при тех или иных упрощающих предположениях или хотя бы достаточно простой и эффективный аналитически проработанный алгоритм вычисления приближенного решения. Эти задачи хорошо исследованы (и продолжают исследоваться) в случае упругих и упругопластических изотропных и трансверсально-изотропных материалов без упрочнения и с линейным упрочнением [1–19] и в теории установившейся ползучести, как правило, для степенной зависимости скорости ползучести от напряжения [7, 17, 20–22]. Строились решения в рамках линейной вязкоупругости, но, как правило, не для произвольных функций сдвиговой и объемной ползучести, а только для их конкретных классов, задаваемых конечным набором параметров (например, задаваемых конечными суммами экспонент, то есть рядами Прони) и в пространстве преобразований Фурье или Лапласа (Лапласа – Карсона) [23–27], нередко – без восстановления оригиналов (из-за сложности или невозможности точного восстановления). При этом в большинстве случаев используется одно из трех дополнительных упрощающих допущений, позволяющих, в частности, уменьшить количество независимых материальных функций: 1) о несжимаемости материала, 2) о линейно упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения (то есть об отсутствии объемной ползучести), 3) о независимости от времени коэффициента Пуассона. Свойства построенных полей деформаций и напряжений не подвергались системному аналитическому исследованию в общем виде при произвольных материальных функциях (МФ), а, как правило, рассчитывались на компьютерах для конкретных функций релаксации с несколькими параметрами. В случае нелинейной вязкоупругости построение решений резко усложняется из-за несправедливости принципа соответствия Вольтерры и неприменимости классических интегральных преобразований.

В настоящей статье задача об определении и анализе НДС толстостенной трубы исследуется для физически нелинейного изотропного несжимаемого материала,

подчиняющегося определяющему соотношению (ОС) вязкоупругости Ю.Н. Работнова:

$$\sigma_{ij}(t) = s_{ij}(t) + \sigma_0(t) \delta_{ij}, \quad \sigma_0 = \mathbf{R}_0 \varphi_0(\theta), \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \sigma(t) \varepsilon(t)^{-1} e_{ij}(t), \quad \sigma = \mathbf{R} \varphi(\varepsilon), \quad (1)$$

$$\mathbf{R}y = \int_0^t R(t-\tau) dy(\tau), \quad \mathbf{R}_0 y = \int_0^t R_0(t-\tau) dy(\tau), \quad (2)$$

с четырьмя произвольными МФ $R(t)$, $\varphi(x)$, $R_0(t)$, $\varphi_0(x)$ (R и R_0 – функции сдвиговой и объемной релаксации, φ и φ_0 – функции нелинейности). ОС описывает изотермические процессы деформирования нестареющих вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ в произвольной точке тела. В ОС (1) $\sigma_0 = \sigma_u/3$ – среднее напряжение (первый инвариант $\boldsymbol{\sigma}(t)$), $\theta(t) = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}$ – объемная деформация, $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$ и $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$ – девиаторы тензоров, $\sigma = ((3/2)s_{ij}s_{ij})^{0.5}$ и $\varepsilon = ((3/2)e_{ij}e_{ij})^{0.5}$ – интенсивности напряжений и деформаций (вторые инварианты девиаторов \mathbf{s} и \mathbf{e}); время и напряжение предполагаются приведенными к безразмерному виду.

ОС (1) – один из естественных вариантов обобщения на сложное напряженное состояние одноосного соотношения Работнова [21, 25, 27–33] с двумя МФ φ , Π (или R):

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t > 0, \quad (3)$$

получающийся в предположении изотропности и тензорной линейности материала, отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров (независимости объемной деформации $\theta(t)$ от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций – от среднего напряжения $\sigma_0(t)$) и пренебрежения влиянием их третьих инвариантов.

Предлагаемая статья продолжает цикл работ [34–40] по системному исследованию ОС (1) с целью выявления комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его материальных функций и феноменологических ограничений на них, разработки способов идентификации, верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (3) приведены в статьях [35–37]. Основные задачи статьи:

1) построить точное решение квазистатической задачи об определении НДС толстостенной трубы из физически нелинейного вязкоупругого материала, подчиняющегося ОС (1) и постулату несжимаемости, в случае задания радиального перемещения внутренней поверхности трубы и внешнего давления, медленно меняющихся во времени;

2) получить общее выражение для полей деформаций и напряжений в трубе при задании постоянного перемещения (деформации) на внутренней поверхности трубы и уравнения кривых релаксации напряжений в произвольной точке трубы, аналитически изучить их общие качественные свойства при произвольных материальных функциях ОС (1);

3) подготовить фундамент для анализа и расчета НДС многослойных труб.

Родственные задачи об исследовании НДС трубы из материала, описываемого ОС (1), в условиях ползучести (при задании внутреннего давления, а не перемеще-

ния) и свойств кривой длительной прочности рассматривались автором в статьях [38–40].

1. Определяющее соотношение Работнова, ограничения на материальные функции, частные случаи

Одномерное ОС (3) предложено Ю.Н. Работновым [21, 25, 27–30] для описания нелинейной ползучести как обобщение одноосного линейного ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) = \mathbf{P}\sigma, \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = \mathbf{R}\varepsilon, \quad t > 0, \quad (4)$$

посредством введения дополнительной МФ $\varphi(u)$. В (4) и (3) функции релаксации (ФР) $R(t)$ и ползучести $\Pi(t)$ связаны интегральным уравнением [23]:

$$\mathbf{R}\mathbf{P} = h(t) \text{ или } \mathbf{P}\mathbf{R} = h(t), \quad t > 0 \quad (5)$$

($h(t)$ – функция Хевисайда), выражающим условие взаимной обратности операторов \mathbf{P} и \mathbf{R} в (4). В англоязычных публикациях ОС (3) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости (QLV), а его автором считается Y.C. Fung [41–50]. В [21, 25, 27–33 и др.] ОС (3) применялось к описанию одномерного поведения графита, металлов и сплавов, композитов, а в [41–50] – связок, сухожилий и других биологических тканей.

В одномерном случае (3) обратное ОС имеет вид $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ (композиция оператора действия функции φ и линейного оператора \mathbf{R} из (4)). Обращение трехмерного ОС (1) для любых возрастающих МФ φ и φ_0 записывается в виде:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где $\Phi = \varphi^{-1}$, $\Phi_0 = \varphi_0^{-1}$, $L(t) = \mathbf{P}\sigma$, $L_0(t) = \mathbf{P}_0\sigma_0$, а функции ползучести $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$ связаны с ФР $R(t)$, $R_0(t)$ уравнениями вида (5). Из трех МФ φ , Π , R в ОС (3) лишь две независимы, а в ОС (1) – четыре независимые МФ.

На функции релаксации и ползучести в ОС (1) и (6) наложим те же минимальные ограничения, что и в линейной теории вязкоупругости: пусть $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$, $R(t)$, $R_0(t)$ положительны и дифференцируемы на $(0, \infty)$, функции Π и Π_0 возрастают и выпуклы вверх [51, 52], а R и R_0 убывают и выпуклы вниз на $(0, \infty)$; $R(t)$ и $R_0(t)$ могут иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в точке $t = 0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$, $\delta(t)$ – дельта-функция). Из этих условий следует, в частности, существование пределов $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$, $R(0) = \text{sub } R(t) > 0$ ($y(0) = y(0+)$ – обозначение для предела функции $y(t)$ справа в точке $t = 0$; $R(0) = +\infty$, если $R(t)$ не ограничена) и $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$.

На МФ φ и φ_0 в ОС (3) и (1) (и на МФ $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$) наложим следующие минимальные требования [35–37]: функция $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(0, \omega)$, $\omega > 0$, а $\varphi_0(u)$ – на множестве $(\omega_-, 0) \cup (0, \omega_+)$, где $\omega_- \omega_+ < 0$, причем $\varphi(0+) = 0$ и $\varphi_0(0+) = \varphi_0(0-) = 0$ (иначе входному процессу $\varepsilon(t) = 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Из возрастания $\varphi(u)$ и $\varphi_0(u)$ следует существование и возрастание обратных функций $\Phi(x) = \varphi^{-1}$, $x \in (0, X)$, $X = \sup \varphi(u)$ и $\Phi_0(x) = \varphi_0^{-1}$, $x \in (\underline{x}, \bar{x})$, где $\underline{x} \in \varphi_0(\omega_- + 0)$, $\bar{x} = \varphi_0(\omega_+ - 0)$, и обратимость ОС (1).

Примеры семейств функций, которые можно (и удобно) применять для задания МФ Φ , Φ_0 или φ , φ_0 , приведены в [35–37]. В частности, для иллюстрации обнару-

женных ниже свойств полей напряжений и деформаций трубы и кривых релаксации и ползучести будут использованы модели с трехпараметрическими функциями ползучести и релаксации (как у модели «стандартного линейного тела»):

$$R(t) = (E - E_\infty)e^{-\mu t} + E_\infty, \quad \mu > 0, \quad E > E_\infty \geq 0; \quad \Pi(t) = \beta - \gamma e^{-\lambda t},$$

$$\lambda, \beta > 0, \quad \gamma \in (0, \beta). \quad (7)$$

Между параметрами функций (7) есть связь, вытекающая из (5):

$$\beta = \frac{1}{E_\infty}, \quad 1 - \gamma\beta^{-1} = \frac{E_\infty}{E}, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{E_\infty}{E} = \frac{\tau}{\tau_c}, \quad (8)$$

где E и E_∞ – мгновенный и длительный модули модели, $\tau = 1/\mu$ – время релаксации, $\tau_c = 1/\lambda = \tau E/E_\infty$ – время ретардации. Из $E_\infty/E < 1$ следует, что всегда $\tau_c > \tau$ и $\lambda < \mu$.

Для задания МФ φ и φ_0 в ОС (6) (или Φ , Φ_0) удобно семейство функций [36]:

$$f(x) = A[\vartheta(x/C)^m + (1 - \vartheta)(x/C)^n], \quad x \geq 0, \quad m, n > 0, \quad \vartheta \in [0, 1], \quad A, C > 0. \quad (9)$$

При $\vartheta = 0$ и $\vartheta = 1$ получаются степенные функции, а при $\vartheta \in (0, 1)$ и $n > 1$, $m \in (0, 1)$ функция (9) имеет точку перегиба

$$\tilde{x} = Cg(n, m, \vartheta)^{1/(n-m)}, \quad g = m(1 - m)\vartheta[n(n-1)(1 - \vartheta)]^{-1}. \quad (10)$$

Меняя ϑ , можно совместить \tilde{x} с любой точкой $x > 0$. МФ (9) позволяют моделировать кривые ползучести со всеми тремя стадиями, включая стадию разупрочнения [36, 52], и диаграммы деформирования с выпуклым вниз начальным участком и точкой перегиба, что невозможно при использовании линейного ОС (4) [37]. В случае $m = 1/n$ (10) принимает вид $\tilde{x} = C[\vartheta(1 - \vartheta)^{-1}n^{-3}]^{n/(n^2-1)}$, а семейство (9) при $n \rightarrow \rightarrow 1+0$ стремится к линейной функции $y = AC^{-1}x$, то есть МФ φ или Φ в ОС (3) «исчезает» и одноосное нелинейное ОС (3) превращается в линейное ОС вязкоупругости (4).

Отметим, что ОС (1) с $\varphi(x) = x$, $\varphi_0(x) = x$ в трехмерном случае не совпадает с линейным ОС вязкоупругости для изотропных сред

$$s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\mathbf{R}e_{ij}, \quad \sigma_0 = \mathbf{R}_0\theta, \quad (11)$$

так как (11) не обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров деформаций и напряжений в случае сложных нагружений. Эти два ОС совпадают только на множестве процессов простых нагружений $\sigma_{ij} = \lambda(t)\bar{\sigma}_{ij}$ при любых i, j (или простых деформирований $\varepsilon_{ij} = \lambda(t)\bar{\varepsilon}_{ij}$), где $\lambda > 0$, а $\bar{\sigma}$ – некоторый постоянный тензор, на которых линейное ОС (11) обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров. Из построенного ниже решения задачи об НДС трубы следует, что в любой точке трубы реализуется процесс простого деформирования, и потому решение задачи для ОС (1) с МФ $\varphi(x) = Ax$ действительно совпадает с решением для линейно вязкоупругого несжимаемого материала.

Если задать ФР постоянной (пренебречь сдвиговой релаксацией и ползучестью), то ОС (1) для несжимаемого материала вырождается в ОС для нелинейно упругого материала, или ОС для упрочняющегося упругопластического несжимаемого материала (без наследственности) с произвольной МФ $\varphi(x)$, связывающей интенсивности напряжений и деформаций в точности так, как в деформационной теории пластичности (при активном нагружении). Тогда построенное ниже решение задачи о НДС

трубы из материала, подчиняющегося ОС (1), превращается в классическое решение [1–9].

2. Постановка и построение решения краевой задачи о нагружении трубы

Определим поля напряжений и деформаций в полном цилиндре из несжимаемого однородного изотропного материала, подчиняющегося нелинейному ОС (1), когда на внутренней поверхности цилиндра задано радиальное перемещение $u_1(t)$, $t > 0$ (или деформация), на внешней поверхности задано давление $p_2(t) \geq 0$ и нулевые касательные напряжения на обеих поверхностях (r_1 и r_2 – их радиусы при $t = 0$). Используя цилиндрическую систему координат, эти краевые условия можно записать в виде

$$u_r|_{r=r_1} = u_1(t), \quad \sigma_{r\theta}|_{r=r_1} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=r_1} = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_r|_{r=r_2} = -p_2(t), \quad \sigma_{r\theta}|_{r=r_2} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=r_2} = 0, \quad t > 0. \quad (13)$$

Считаем, что функции $u_1(t)$ и $p_2(t)$ не зависят от координат θ, z и меняются медленно (или постоянны, как в задаче о релаксации напряжений), чтобы влиянием инерционных членов в уравнениях движения можно было пренебречь (квазистатическая постановка). В частности, интересен случай $u_1(t) = at$, так как он приводит (как будет показано) к нагружению трубы с постоянной скоростью деформации в каждой точке и позволяет вывести уравнения семейства квазистатических диаграмм деформирования.

Задача осесимметрична, и потому в любой точке (r, θ, z) в любой момент времени все перемещения, деформации и напряжения не зависят от угла θ и

$$\sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0, \quad u_\theta(t) = 0, \quad (14)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = r^{-1}(u_{\theta, \theta} + u_r) = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_r(r, t) = u_{r, r} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_z(r, t) = u_{z, z}, \quad (15)$$

для радиального перемещения введено обозначение $u = u_r(r, t)$.

Будем считать трубу закрепленной на торцах так, что осевое перемещение и касательные напряжения на торцах ($z = \pm L$) отсутствуют:

$$u_z|_{z=\pm L} = 0, \quad \sigma_{z\theta}|_{z=\pm L} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{z=\pm L} = 0. \quad (16)$$

Тогда труба находится в состоянии плоской деформации, u_r и σ_z не зависят от z и, помимо (14), справедливы равенства

$$\sigma_{rz} = 0, \quad \varepsilon_{z\theta} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \varepsilon_z = 0, \quad u_z = 0, \quad \varepsilon_{rz} = 0, \quad \varepsilon_{\theta z} = 0. \quad (17)$$

В силу (14), (17) в любой точке трубы тензоры деформаций и напряжений диагональны: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{diag}\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z\}$, зависимости ненулевых компонент от координат имеют вид: $u_r = u_r(r, t)$, $\varepsilon_r = \varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(r, t)$, $\sigma_r = \sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta(r, t)$, $\sigma_z = \sigma_z(t)$, а система уравнений равновесия среды эквивалентна лишь одному уравнению в проекции на радиус:

$$\sigma_{r, r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (18)$$

Будем считать материал несжимаемым: $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0$, поскольку $\varepsilon_z = 0$. Из (15) получим уравнение $\partial u / \partial r + u / r = 0$ для $u(r, t)$, откуда

$$u = C(t)r^{-1}, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad t > 0. \quad (19)$$

Из граничного условия (12) найдем $C(t) = r_1 u_1(t)$. Поэтому $u = r_1 r^{-1} u_1(t)$, а из (19) и (15) все ненулевые деформации выражаются через заданную функцию $u_1(t)$:

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \frac{u}{r} = C(t)r^{-2}, \quad \varepsilon_r(r, t) = \frac{\partial u}{\partial r} = -C(t)r^{-2}, \quad C(t) = r_1 u_1(t). \quad (20)$$

Чтобы найти напряжения, воспользуемся ОС Работнова (1). В силу несжимаемости материала ОС (1) редуцируется к одномерному ОС $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ с двумя произвольными МФ φ и R , связывающему интенсивности напряжений и деформаций, и условию пропорциональности девиаторов из (1):

$$s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \sigma(t) \varepsilon(t)^{-1} e_{ij}(t), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon). \quad (21)$$

Уравнение $\sigma_0 = \mathbf{R}_0 \varphi_0(\varepsilon)$ не используется, и среднее напряжение будет найдено из решения задачи, как обычно при использовании условия несжимаемости.

Поскольку $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{diag} \{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$ и $\varepsilon_0 = 0$, то девиатор деформаций имеет вид $\mathbf{e} = \mathbf{diag} \{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$, а интенсивность деформаций с учетом (20) запишется в виде:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2]^{0,5} = \frac{2}{3} [\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 - \varepsilon_r \varepsilon_\theta]^{0,5} = \frac{2}{\sqrt{3}} |C(t)| r^{-2}. \quad (22)$$

Девиатор тензора напряжений в любой точке тоже диагонален:

$$\mathbf{s} = \mathbf{diag} \{\sigma_r - \sigma_0, \sigma_\theta - \sigma_0, \sigma_z - \sigma_0, \}, \quad \sigma_0(r, t) = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}.$$

Согласно (21) девиаторы пропорциональны, тогда из $\varepsilon_z = 0$ следует $\sigma_z - \sigma_0 = 0$ (при тех t , когда $\varepsilon(t) \neq 0$, то есть $C(t) \neq 0$), таким образом

$$\sigma_z = \sigma_0 \quad \text{или} \quad \sigma_z = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}. \quad (23)$$

Тогда $|\sigma_r - \sigma_0| = |\sigma_\theta - \sigma_0|$, $|\sigma_r - \sigma_z| = |\sigma_\theta - \sigma_z| = 0,5|\sigma_r - \sigma_\theta|$ и потому

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]^{0,5} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta|.$$

Из условия (21)

$$\sigma_r - \sigma_0 = \frac{2}{3} \varepsilon_r \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{2}{3} \varepsilon_\theta \frac{\sigma}{\varepsilon},$$

а из (20) и (22) находим:

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{C(t)}{|C(t)|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sgn} C(t), \quad \frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{C(t)}{|C(t)|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sgn} C(t), \quad (24)$$

$$\sigma_r - \sigma_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sgn} C(t) \sigma, \quad \sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sgn} C(t) \sigma,$$

в силу (21) и (22) интенсивность напряжений равна

$$\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon) = \mathbf{R}\varphi\left(\frac{2}{\sqrt{3}} |C(t)| r^{-2}\right), \quad C(t) = r_1 u_1(t). \quad (25)$$

Вычитая формулы (24) друг из друга, найдем

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \sigma$$

и подставим это выражение в уравнение равновесия (18):

$$\sigma_{r,r} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \sigma r^{-1},$$

то есть

$$\sigma_{r,r} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \mathbf{R} \left[r^{-1} \varphi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} |C(t)| r^{-2} \right) \right]. \quad (26)$$

Проинтегрируем (26) от r_1 до r , пользуясь перестановочностью операторов интегрирования по r и по τ , и сделаем замену переменной $x = 2/\sqrt{3} |C(t)| \rho^{-2}$:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r) - \sigma_r(r_1) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \mathbf{R} \left[\int_{r_1}^r \rho^{-1} \varphi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} |C| \rho^{-2} \right) d\rho \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \mathbf{R} \left[\int_{-2/\sqrt{3}|C|r_1^{-2}}^{2/\sqrt{3}|C|r^{-2}} \varphi(x) x^{-1} dx \right]. \end{aligned}$$

Введем обозначения $\bar{r} = r/r_1$, $q = (r_1/r_2)^2 \in (0, 1)$; $z(t) = \operatorname{sgn} y(t)$,

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} C(t) r_1^{-2} = \frac{2}{\sqrt{3}} u_1(t) r_1^{-1}, \quad F(s) = \int_0^s \varphi(x) x^{-1} dx, \quad s > 0. \quad (27)$$

Из (22):

$$y(t) = \varepsilon(r_1, t) \quad \text{и} \quad |y(t)| = \frac{\varepsilon(r_2, t)}{q} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\varepsilon_\theta(r_2, t)}{q}.$$

Тогда

$$C(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1^2$$

и

$$\sigma_r(\bar{r}, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} \left[F(|y(t)|) - \frac{F(|y(t)|)}{\bar{r}^2} \right], \quad \bar{r} \in [1, r_2/r_1], \quad t \geq 0. \quad (28)$$

Полагая $r = r_2$ в (28), из краевого условия (13) можем определить неизвестное нормальное напряжение (давление) $\sigma_r(r_1, t) = -p_1(t)$ на поверхности $r = r_1$:

$$p_1 = p_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} [F(|y(t)|) - F(q|y(t)|)], \quad t \geq 0. \quad (29)$$

Из возрастания $\varphi(x)$ и условия $\varphi(0) = 0$ (тогда $\varphi(x) > 0$) следует возрастание $F(s)$ (27) при $s > 0$. Поэтому всегда справедливо неравенство $F(|y(t)|) - F(q|y(t)|) > 0$, так как $q \in (0, 1)$, и из положительности функции релаксации следует, что функция $f(t) = \mathbf{R} [F(|y(t)|) - F(q|y(t)|)]$ положительна и потому $\operatorname{sgn} (p_1(t) - p_2(t)) = \operatorname{sgn} y(t)$.

Подставив (29) в (28), получим выражение σ_r через заданные функции $u_1(t)$ и $p_2(t)$:

$$\sigma_r(r, t) = -p_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} [F(q|y(t)|) - F(|y(t)| \bar{r}^{-2})], \quad y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{u_1(t)}{r_1}. \quad (30)$$

Напряжения σ_θ , $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ и $\sigma_0 = \sigma_z$ можно выразить из (24), (25):

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} [F(q|y(t)|) - F(|y(t)| \bar{r}^{-2}) + 2\varphi(|y(t)| \bar{r}^{-2})], \quad (31)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} [F(q|y(t)|) - F(|y(t)| \bar{r}^{-2}) + \varphi(|y(t)| \bar{r}^{-2})]. \quad (32)$$

Интенсивности деформаций и напряжений вычисляются по формулам (22) и (25):

$$\varepsilon(r, t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 = |y(t)| \bar{r}^{-2}, \quad \sigma(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta| = \mathbf{R} \varphi(|y(t)| \bar{r}^{-2}). \quad (33)$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max}(r, t) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{|\sigma_\theta - \sigma_r|}{2} = \frac{\sigma(r, t)}{\sqrt{3}}.$$

Формулы (19), (20) для перемещения и деформаций в обозначениях (27) запишутся в виде

$$u_r(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} r_1 y(t) \bar{r}^{-2}, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0; \quad (34)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) \bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_r(r, t) = -\varepsilon_\theta(r, t), \quad \varepsilon_z = 0. \quad (35)$$

Отметим важную особенность поля напряжений, вытекающую из линейности оператора \mathbf{R} (точнее, из структуры ОС и допущений, принятых при постановке задачи): отношения разностей напряжений (отношения главных касательных напряжений) не зависят от времени, радиальной координаты и от материальных функций:

$$\frac{\sigma_\theta(r, t) - \sigma_r(r, t)}{\sigma_\theta(r, t) - \sigma_z(r, t)} = 2, \quad \frac{\sigma_\theta(r, t) - \sigma_r(r, t)}{\sigma(r, t)} = \frac{2}{\sqrt{3}} z(t), \quad (36)$$

так как

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r, t) - \sigma_r(r, t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} [2\varphi(|y(t)| \bar{r}^{-2})], \\ \sigma_\theta(r, t) - \sigma_z(r, t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} [\varphi(|y(t)| \bar{r}^{-2})]. \end{aligned}$$

Вычислив интеграл от напряжения (31) по отрезку $[r_1, r_2]$, можно убедиться, что он равен $p_1(t)r_1 - p_2(t)r_2$, то есть выполнено условие равновесия половины трубы в проекции на ось, ортогональную z . Среднее значение окружного напряжения (31)

$$\bar{\sigma}_\theta(t) = \frac{p_1 r_1 - p_2 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{q^{1/2} p_1(t) - p_2(t)}{1 - q^{1/2}}. \quad (37)$$

Продольная сила $N(t)$ и среднее осевое напряжение

$$\bar{\sigma}_z(t) = \frac{N}{S} = \frac{N}{\pi r_2^2 (1 - q)}$$

вычисляются интегрированием напряжения (32) по поперечному сечению трубы:

$$N = \pi r_2^2 [q p_1(t) - p_2(t)], \quad \bar{\sigma}_z(t) = (1 - q)^{-1} [q p_1(t) - p_2(t)] \quad (38)$$

(трудоемкие преобразования интегралов опущены). Знак силы (38) совпадает со знаком разности $qp_1(t) - p_2(t)$. Если $p_2(t) = 0$, то отношение средних напряжений (37) и (38) не зависит от нагрузки и от времени и $\bar{\sigma}_0/\bar{\sigma}_z > 2$:

$$\frac{\bar{\sigma}_0(t)}{\bar{\sigma}_z(t)} = q^{-1/2} \frac{1-q}{1-q^{1/2}} = q^{-1/2}(1+q^{1/2}) = 1+q^{-1/2} = 1+r_2/r_1. \quad (39)$$

В случае ОС (1) с ФР $R(t) = E = \text{const}$ и произвольной МФ φ общее решение (30)–(35) превращается в решение для случая нелинейной упругости материала (или упругопластичности при активном нагружении), поскольку МФ φ связывает интенсивности деформаций и напряжений в точности так, как в деформационной теории пластичности, и задает упрочнение материала. Действие оператора \mathbf{R} на произвольную функцию (см. (2)) сводится к умножению на E , и формулы (29)–(32) упрощаются и совпадут с классическими решениями [1–9]. Если дополнительно $\varphi(x) = x$, то $F(s) = s$ и поле напряжений совпадет с решением квазистатической задачи в рамках линейной теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} E(q - \bar{r}^{-2})y(t), & \sigma_\theta &= -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} E(q + \bar{r}^{-2})y(t), \\ \sigma_z &= -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} E q y(t). \end{aligned}$$

3. Задача о релаксации напряжений в трубе. Общие свойства кривых релаксации

Рассмотрим задачу о релаксации напряжений в трубе, когда на внутренней поверхности трубы задано постоянное радиальное перемещение (или деформация) и нулевые касательные напряжения, то есть граничные условия имеют вид (12), (13), (16) и $u_1(t) = \text{const}$ в (12), $u_1 > 0$. Эта модельная задача возникает с той или иной степенью идеализации, например, в следующих практических ситуациях: труба была нагрета, посажена на жесткий стержень (штифт) радиусом r_1 и охлаждена, или вставленный в трубку упругий штифт нагружен сжимающей силой и распирает трубку за счет поперечной деформации, или жидкость замерзла в трубе или цилиндрической скважине и т.п. В этом случае $y(t) = y_0 = \text{const}$, где $y_0 = 2/\sqrt{3}u_1/r_1$, и все перемещения и деформации (35) не зависят от времени:

$$u_r = \frac{\sqrt{3}}{2} y_0 r_1 \bar{r}^{-1}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} y_0 \bar{r}^{-2} = u_1 r_1^{-1} \bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon = y_0 \bar{r}^{-2}. \quad (40)$$

Интегральный оператор в (29) можно вычислить, учитывая, что $\mathbf{R}h(t) = cR(t)$:

$$p_1(t) = p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} [F(y_0) - F(qy_0)]R(t), \quad t > 0. \quad (41)$$

Здесь учтено, что $y_0 > 0$ и $z(t) = \text{sgn } y_0 = +1$. Зная $p_1(t)$, все напряжения можно вычислить по формулам (30)–(32), учитывая, что в них оператор \mathbf{R} действует на функции, не зависящие от времени при $t > 0$, и потому образы пропорциональны функции релаксации:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) &= -p_1(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} R(t) [F(y_0) - F(y_0 \bar{r}^{-2})], \\ \sigma_z(r, t) &= -p_1(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} R(t) [F(y_0) - F(y_0 \bar{r}^{-2}) + \varphi(y_0 \bar{r}^{-2})], \end{aligned}$$

$$\sigma_{\theta}(r, t) = -p_1(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} R(t) [F(y_0) - F(y_0 \bar{r}^{-2}) + 2\varphi(y_0 \bar{r}^{-2})].$$

Подставив (41) и вводя обозначения

$$\begin{aligned} S(\bar{r}) &= \varphi(y_0 \bar{r}^{-2}), \quad S_r(\bar{r}) = F(qy_0) - F(y_0 \bar{r}^{-2}), \\ S_z(\bar{r}) &= S_r(\bar{r}) + S(\bar{r}), \quad S_{\theta}(\bar{r}) = S_r(\bar{r}) + 2S(\bar{r}) \end{aligned} \quad (42)$$

(эти функции зависят и от параметра трубы q , и от величины заданной при $r = r_1$ окружной деформации u_1/r_1), получим

$$\sigma_r(r, t) = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} R(t) S_r(\bar{r}), \quad (43)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} R(t) S_z(\bar{r}), \quad (44)$$

$$\sigma_{\theta}(r, t) = -p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} R(t) S_{\theta}(\bar{r}), \quad (45)$$

$$\sigma(r, t) = \sqrt{3} \tau_{\max}(r, t) = S(\bar{r}) R(t). \quad (46)$$

Таким образом, все напряжения (43)–(46) (точнее, их отклонения от заданной величины $-p_2(t)$) во всех точках трубы меняются со временем (релаксируют) по одному и тому же закону, задаваемому функцией релаксации, а скорость релаксации зависит от радиальной координаты. Если $p_2(t) = 0$, то все кривые релаксации подобны, все они пропорциональны $R(t)$, $|\sigma_{\theta}(t)|$, $|\sigma_z(t)|$, $|\sigma_r(t)|$; $\sigma(t)$ в любой точке трубы убывают и выпуклы вниз (поскольку $R(t)$ убывает и выпукла вниз) и отношение любых напряжений в любых двух точках не зависит от времени: $\sigma_i(r', t)/\sigma_i(r'', t) = S_i(r')/S_i(r'')$. Конечно, в процессе релаксации в любой точке выполняется общее свойство (36). Возрастание или убывание напряжений (43)–(45) по времени зависит от знаков множителей $S_r(\bar{r})$, $S_{\theta}(\bar{r})$ и $S_z(\bar{r})$, даже в случае $p_2(t) = 0$ знаки $S_{\theta}(\bar{r})$ и $S_z(\bar{r})$ могут быть разными.

Функция $S(\bar{r})$ положительна и убывает, так как $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$, $\varphi(x)$ возрастает и $y_0 > 0$. Из (42) следует, что при любом $\bar{r} \in [1, r_2/r_1]$ $S_{\theta}(\bar{r}) > S_z(\bar{r}) > S_r(\bar{r})$, $\sigma_{\theta}(\bar{r}) > \sigma_z(\bar{r}) > \sigma_r(\bar{r})$. Поскольку $q \in (0, 1)$, $q \leq \bar{r}^{-2} \leq 1$, а функция $F(x)$ возрастает ($F'(x) = \varphi(x)/x > 0$), то в силу (42) $S_r(\bar{r}) < 0$ при $\bar{r} < r_2/r_1$ и $S_r(r_2/r_1) = 0$ (то есть при $r = r_2$), и потому $\sigma_r(r, t) < -p_2(t) \leq 0$ во всех точках с $r < r_2$, а $\sigma_r(r_2, t) = 0$ возможно лишь в моменты времени, когда $p_2(t) = 0$. В точках внешней границы трубы $S_z(r_2/r_1) = 0 + S(\bar{r}) > 0$ и $S_{\theta}(r_2/r_1) > 0$ для любых МФ, и потому кривые релаксации (44) и (45) убывают и выпуклы вниз, а в случае $p_2(t) = 0$ $\sigma_{\theta}(r_2, t) > 0$ и $\sigma_z(r_2, t) > 0$. Однако на внутренней границе (при $\bar{r} = 1$) значения $S_z(1)$, $S_{\theta}(1)$, $\sigma_{\theta}(r_1, t)$ и $\sigma_z(r_1, t)$ могут быть отрицательными даже в случае $p_2(t) = 0$ (см. ниже).

Если $p_2(t) = \text{const}$, все напряжения монотонны по времени, так как ФР монотонна. Если $p_2(t) = 0$, то кривые релаксации напряжений $|\sigma_{\theta}(t)|$, $|\sigma_z(t)|$ и $|\sigma_r(t)|$ в любой точке трубы убывают и выпуклы вниз, поскольку ФР убывает и выпукла вниз; $\sigma_z(t)$ и $\sigma_{\theta}(t)$ убывают и выпуклы вниз лишь в тех точках, где $S_z(\bar{r}) > 0$ и $S_{\theta}(\bar{r}) > 0$, а $\sigma_r(t)$ всегда возрастает и выпукла вверх, так как $S_r(\bar{r}) < 0$.

Из (38) и (41) следует, что продольная сила, среднее осевое напряжение и среднее окружное напряжение при релаксации выражаются формулами

$$\begin{aligned}
N(t) &= \pi r_2^2 \left[\frac{1}{\sqrt{3}} q (F(y_0) - F(qy_0)) R(t) - (1-q) p_2(t) \right], \\
\bar{\sigma}_z(t, q, \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{3}} q (1-q)^{-1} [(F(y_0) - F(qy_0)) R(t) - p_2(t)], \\
\bar{\sigma}_0(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (q^{-1/2} - 1)^{-1} [F(y_0) - F(qy_0)] R(t) - p_2(t), \quad q^{-1/2} = \frac{r_2}{r_1}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Если $p_2(t) = 0$, то $N > 0$ и $N(t)$ убывает, ибо $F(y_0) - F(qy_0) > 0$ в силу возрастания $F(x)$, и при $t \rightarrow \infty$ существует предел

$$\bar{\sigma}_z(\infty, q, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} q (1-q)^{-1} [F(y_0) - F(qy_0)] R(\infty),$$

где $R(\infty) \geq 0$. Среднее окружное напряжение в силу (39) выражается формулой $\bar{\sigma}_0(t, q, \alpha) = (1 + q^{-1/2}) \bar{\sigma}_z(t, q, \alpha)$, положительно и убывает по времени. Если $p_2(t) = \text{const} > 0$, то продольная сила может поменять знак (стать отрицательной) с течением времени вследствие убывания ФР. В частности, если предел $R(\infty)$ равен нулю (например, для модели с произвольным α и ФР (7) с $E_\infty = 0$, когда (7) вырождается в ФР модели Максвелла), то $\bar{\sigma}_z(\infty, q, \alpha) = -p_2$, то есть все кривые релаксации $\bar{\sigma}_z(t, q, \alpha)$ имеют общую горизонтальную асимптоту $\bar{\sigma}_z = -p_2$, не зависящую от q и α .

С ростом параметра q (с убыванием относительной толщины трубы $(r_2 - r_1)/r_2 = 1 - q^{1/2}$ при фиксированной величине u_1/r_1 , то есть фиксированном y_0) интенсивность напряжений (46) не меняется, функции $S_r(\bar{r}, q)$, $S_0(\bar{r}, q)$ и $S_z(\bar{r}, q)$ возрастают при любом \bar{r} , так как слагаемое $F(qy_0)$ возрастает, и потому возрастают напряжения (43), (44), но не их модули.

П р и м е р 1. Рассмотрим ОС (1) со степенной функцией нелинейности

$$\varphi(x) = Ax^\alpha, \quad \alpha > 0, \tag{48}$$

и произвольной функцией релаксации (при $\alpha = 1$ получим НДС трубы для линейно вязкоупругого несжимаемого материала). Эта модель обеспечивает классическую степенную зависимость кривых ползучести и скорости ползучести от уровня напряжения (от его интенсивности при трехосном нагружении) [35, 36] и степенную аппроксимацию диаграммы деформирования [37]. Для МФ (48) из (27) следует $F(s) = A\alpha^{-1}s^\alpha$ и из (42)

$$\begin{aligned}
S(\bar{r}) = \varphi(y_0 \bar{r}^{-2}) &= Ay_0^\alpha \bar{r}^{-2\alpha}, \quad F(qy_0) = A\alpha^{-1} q^\alpha y_0^\alpha, \quad F(y_0 \bar{r}^{-2}) = A\alpha^{-1} y_0^\alpha \bar{r}^{-2\alpha}, \\
S_r &= A\alpha^{-1} y_0^\alpha [q^\alpha - \bar{r}^{-2\alpha}], \quad S_z = A\alpha^{-1} y_0^\alpha [q^\alpha + (\alpha-1)\bar{r}^{-2\alpha}], \\
S_0 &= A\alpha^{-1} y_0^\alpha [q^\alpha + (2\alpha-1)\bar{r}^{-2\alpha}],
\end{aligned} \tag{49}$$

где

$$q^\alpha \in (0, 1), \quad \bar{r}^{-2\alpha} \in [q^\alpha, 1] \subset (0, 1), \quad A\alpha^{-1} y_0^\alpha [q^\alpha - 1] \leq S_r(\bar{r}) \leq 0 \text{ и } S_0(\bar{r}) > S_z(\bar{r}) > S_r(\bar{r}).$$

Продольная сила и среднее осевое напряжение вычисляются по формуле (47):

$$\bar{\sigma}_z(t, q, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} A\alpha^{-1} q (1-q^\alpha) (1-q)^{-1} y_0^\alpha R(t) - p_2(t), \quad N(t, q, \alpha) = \pi r_2^2 (1-q) \bar{\sigma}_z, \tag{50}$$

а давление на внутренней поверхности и среднее окружное напряжение – по (37) и (41):

$$p_1(t) = p_2(t) + \frac{1}{\sqrt{3}} A \alpha^{-1} (1 - q^\alpha) y_0^\alpha R(t),$$

$$\bar{\sigma}_\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} A \alpha^{-1} (1 - q^\alpha) (q^{-1/2} - 1)^{-1} y_0^\alpha R(t) - p_2(t), \quad (51)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_\theta + p_2}{\bar{\sigma}_z + p_2} = 1 + q^{-1/2} = 1 + \frac{r_2}{r_1}. \quad (52)$$

Отношение (52) не зависит от времени, МФ и перемещения. При $q \rightarrow 1$ (то есть $r_1/r_2 \rightarrow 1$)

$$\frac{1 - q^\alpha}{1 - q} \rightarrow \alpha, \quad \bar{\sigma}_z(t) \rightarrow \bar{\sigma}_z(t, 1, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} A y_0^\alpha R(t) - p_2, \quad \bar{\sigma}_\theta(t) \rightarrow 2\bar{\sigma}_z(t, 1, \alpha) + p_2.$$

На рис. 1а приведены кривые релаксации напряжений (43)–(46) (графики их зависимости от времени) в трех точках трубы с $r = r_1$, $r = (r_1 + r_2)/2$ и $r = r_2$ (кривые 1–3) для трубы с $r_2/r_1 = 2$ ($q = 0,25$) при задании окружной деформации $u_1/r_1 = 0,01$ ($y_0 = 0,02/\sqrt{3}$) и внешнего давления $p_2 = 5$. Предполагается, что материал описывается ОС (1) со степенной МФ (48) и функцией релаксации (7), у которых $A = 1$, $\alpha = 0,2$, $E = 200$, $E_\infty = E/3 = 200/3$, $\mu = 0,3$ (время релаксации $\tau = 1/\mu = 10/3$, время ретардации $\tau_c = \tau E/E_\infty = 10$). Графики $\sigma_r(t)$ показаны синим цветом, $\sigma_z(t)$ – голубым, $\sigma_\theta(t)$ – красным, графики интенсивности напряжений (46) – черные штриховые линии 1–3. Горизонтальные штриховые прямые – асимптоты кривых 1 (в точке с $r = r_1$) при $t \rightarrow \infty$. На рис. 1б показаны кривые релаксации средних осевого и окружного напряжений (50) и (51) ($\bar{\sigma}_z(t)$ – черным цветом, $\bar{\sigma}_\theta(t)/2$ – красным) для труб с разными отношениями $r_2/r_1 = 1; 5/4; 2; 4$ (кривые 1–4) под той же нагрузкой, что и на рис. 1а для той же модели с $\alpha = 0,2$ и ФР (7). С ростом r_1/r_2 средние напряжения возрастают (при $\alpha = 0,2$). Кривые 1 соответствуют предельному случаю $r_1/r_2 \rightarrow 1$. Горизонтальные штриховые прямые – асимптоты кривых $\bar{\sigma}_z(t)$ при $t \rightarrow \infty$. С целью сравнения с кривой 3 (для $r_2/r_1 = 2$) дублирована кривая релаксации $\sigma_z(t)$ в точке $r = (r_1 + r_2)/2$ с рис. 1а (голубая кривая 3'); так как она хорошо приближает кривую 3, по ней можно с хорошей точностью вычислить кривую релаксации продольной силы, умножив на площадь поперечного сечения.

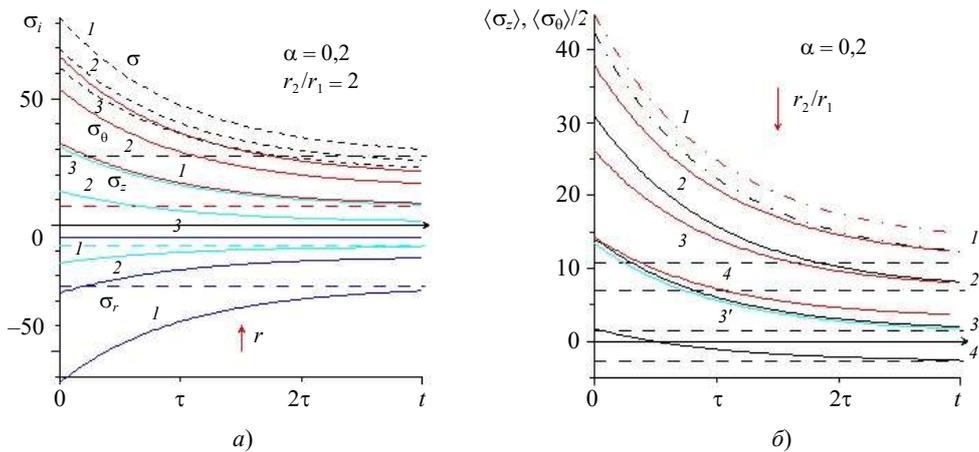


Рис. 1

4. Зависимость напряжений от радиальной координаты в процессе релаксации

Интенсивность напряжений (46) и максимальное касательное напряжение убывают по \bar{r} в любой момент времени при любых МФ, а зависимость напряжений (43)–(45) от радиальной координаты \bar{r} определяется свойствами трех множителей (42) (то есть свойствами МФ φ). Для произвольной ФР эти функции пропорциональны напряжениям (43)–(46) при нагрузке $p_2(t) = 0$ в любой момент времени (от ФР и времени зависит только коэффициент подобия), в частности при $R(t) = \text{const}$ функции (42) совпадают с напряжениями в трубе из нелинейно упругого материала.

Функция $S_r(\bar{r})$ всегда возрастает ($|S_r(\bar{r})|$ убывает), так как $F(s)$ возрастает: $S_r(\bar{r})' = 2y_0\bar{r}^{-3}F'(y_0\bar{r}^{-2}) = 2\varphi(y_0\bar{r}^{-2})\bar{r}^{-1} > 0$. Поскольку $R(t) > 0$, напряжение σ_r возрастает по \bar{r} в любой момент времени, а $|\sigma_r(\bar{r})|$ убывает. Функции $S_\theta(\bar{r})$ и $S_z(\bar{r})$ могут быть немонотонными:

$$S'_\theta(\bar{r}) = S'_r(\bar{r}) - 4y_0\bar{r}^{-3}\varphi'(y_0\bar{r}^{-2}) = 2\bar{r}^{-1}[\varphi(y_0\bar{r}^{-2}) - 2y_0\bar{r}^{-2}\varphi'(y_0\bar{r}^{-2})],$$

то есть знак $S'_\theta(\bar{r})$ совпадает со знаком функции $\varphi(x) - 2x\varphi'(x)$ при $x = y_0\bar{r}^{-2} = 2/\sqrt{3}u_1r_1^{-1}\bar{r}^{-2}$, а он может быть разным. В частности, если $\varphi''(x) > 0$, то $\varphi(x)/x < \varphi'(x)$ и $S'_\theta(\bar{r}) < 0$, следовательно, $S_\theta(\bar{r})$ убывает. Для немонотонности $S_\theta(\bar{r})$ необходимо, чтобы существовало решение уравнения $S'_\theta(\bar{r}) = 0$, то есть чтобы уравнение $\varphi(x) = 2x\varphi'(x)$ имело корни в интервале (qy_0, y_0) .

Существование экстремума $S_\theta(\bar{r})$ возможно, например, для бистепенной МФ (9) (см. ниже) или для МФ $\varphi(x) = \sigma_*(1 - e^{-ax})$, $x \geq 0$ [35, 37]. Для последней условие экстремума $S_\theta(\bar{r})$ имеет вид $1 - e^{-ax} = 2axe^{-ax}$, или $(2ax + 1)e^{-ax} = 1$; это уравнение всегда имеет решение (единственное) при $x > 0$, ибо функция $y = (2ax + 1)e^{-ax}$ обладает свойствами $y(0) = 1$, $y(\infty) = 0$ и $y'(0) = a > 0$: $y' = 2ae^{-ax} - a(2ax + 1)e^{-ax} = ae^{-ax}(1 - 2ax)$, единственная точка экстремума функции y – точка $x = 1/(2a)$. Меняя a , можно сместить экстремум $S_\theta(\bar{r})$ (он лежит в интервале $1/(4a) < x < 1/(3a)$) в любой заданный интервал (qy_0, y_0) .

Исследуем модель со степенной функцией нелинейности (48) и произвольной ФР. Из формул (49) следует, что $A\alpha^{-1}y_0^\alpha[q^\alpha - 1] \leq S_r(\bar{r}) \leq 0$, $S_\theta(\bar{r}) > S_z(\bar{r}) > S_r(\bar{r})$ и $\sigma_\theta(r, t) > \sigma_z(r, t) > \sigma_r(r, t)$ при всех $\alpha > 0$. Зависимость напряжений (43)–(46) от r определяется величиной α , от которой зависит знак множителя при $\bar{r}^{-2\alpha}$ в формулах (49), то есть характер монотонности $S_\theta(\bar{r})$ и $S_z(\bar{r})$ (функция $S_r(\bar{r})$ возрастает при всех $\alpha > 0$).

Напряжение $\sigma_r(r)$ возрастает при всех $\alpha > 0$, $\sigma_r(r) \leq -p_2(t)$ (и потому $|\sigma_r(r)|$ убывает), окружное напряжение $\sigma_\theta(r)$ возрастает при $\alpha \in (0; 0,5)$, как и $S_\theta(\bar{r})$, убывает при $\alpha > 0,5$ (в этом случае $S_\theta(\bar{r}) > 0$ при всех $r \in [r_1, r_2]$) и не зависит от r при $\alpha = 0,5$, а осевое напряжение $\sigma_z(r)$ возрастает при $\alpha \in (0, 1)$, убывает при $\alpha > 1$ и постоянно по сечению при $\alpha = 1$ (в случае трубы из линейно вязкоупругого материала).

При любом $\alpha > 0$ функции $S_\theta(\bar{r})$, $S_z(\bar{r})$, $\sigma_\theta(r)$ и $\sigma_z(r)$ монотонны, поэтому наибольшее значение они принимают при $r = r_1$ или $r = r_2$, то есть при $\bar{r}^{-2} = 1$ или $\bar{r}^{-2} = q$:

$$S_z(r_1) = A\alpha^{-1}y_0^\alpha[q^\alpha + \alpha - 1], \quad S_z(r_2) = A\alpha^{-1}y_0^\alpha[q^\alpha + (\alpha - 1)q^\alpha] = A\alpha^{-1}y_0^\alpha\alpha q^\alpha > 0,$$

$$S_\theta(r_1) = A\alpha^{-1}y_0^\alpha[q^\alpha + 2\alpha - 1], \quad S_\theta(r_2) = A\alpha^{-1}y_0^\alpha[q^\alpha + 2\alpha q^\alpha - q^\alpha] = 2A\alpha^{-1}y_0^\alpha\alpha q^\alpha > 0.$$

Условие $\alpha > 1$ достаточно, чтобы $S_z(\bar{r}) > 0$ при всех $r \in [r_1, r_2]$, а условие $\alpha > 0,5$ достаточно, чтобы $S_0(\bar{r}) > 0$ при всех $r \in [r_1, r_2]$. Однако при достаточно малых α (и достаточно больших r_2/r_1) функции $S_0(\bar{r})$ и $S_z(\bar{r})$ могут принимать отрицательные значения в точке $r = r_1$: так как $S_0(r_1, q, \alpha) \rightarrow 2 + \ln q$ и $S_z(r_1, q, \alpha) \rightarrow 1 + \ln q$ при $\alpha \rightarrow 0$ (по правилу Лопиталя), то предел $S_0(r_1, q, \alpha) < 0$ при $-\ln q > 2$, или $\ln(r_2/r_1) > > 1$, то есть $r_2/r_1 > e$, а $S_z(r_1, q, 0) < 0$, если $r_2/r_1 > e^{1/2}$. Таким образом, если $p_2 = 0$, напряжения σ_0 и σ_z всегда положительны на внешней границе трубы (это доказано при любых МФ), но на внутренней границе они могут принимать и отрицательные значения (при малых α и q). Интенсивность напряжений (46) и максимальное касательное напряжение максимальны на внутренней границе трубы: $\sigma_{\max} = \sigma(r_1)$.

На рис. 2а приведены графики функций (49) для моделей со степенной МФ (48) с $A = 1$ и разными показателями $\alpha = 0,2; 0,3; 0,5; 1$ (кривые 1–4) для трубы с $r_1/r_2 = = 4/5$ (то есть $q = 0,64$, $\bar{r} \in [1; 5/4]$) при задании окружной деформации $u_1/r_1 = 0,01$. Графики $S_r(\bar{r})$ показаны синим цветом, $S_z(\bar{r})$ – голубым, $S_0(\bar{r})$ – красным, графики $S(\bar{r})$ – черные штриховые линии 1–4. Эти графики пропорциональны эпюрам напряжений (43)–(46) в трубе при нагрузке $p_2(t) = 0$ в любой фиксированный момент времени. Графики для $\alpha = 1$ (кривые 4) помечены стрелками на концах (все они близки к оси $S = 0$), в частности $S_z(\bar{r}) = \text{const}$, а $S_0(\bar{r})$ убывает. Графики для $\alpha > 1$ еще ближе к оси и не показаны. На рис. 2б приведены графики функций (49) для более толстой трубы с $r_1/r_2 = 0,5$ ($q = 0,25$, площадь поперечного сечения трубы увеличилась в два раза) для тех же моделей с показателями $\alpha = 0,2; 0,3; 0,5; 1$ (кривые 1–4) при задании той же окружной деформации $u_1/r_1 = 0,01$. Существенное отличие от рис. 2а – появление перемены знака у функций $S_z(\bar{r})$ (эпюра $\sigma_z(\bar{r})$) при $\alpha < 1$ и увеличение $|S_z(\bar{r})|$ (то есть $|\sigma_r|$) примерно в 3 раза.

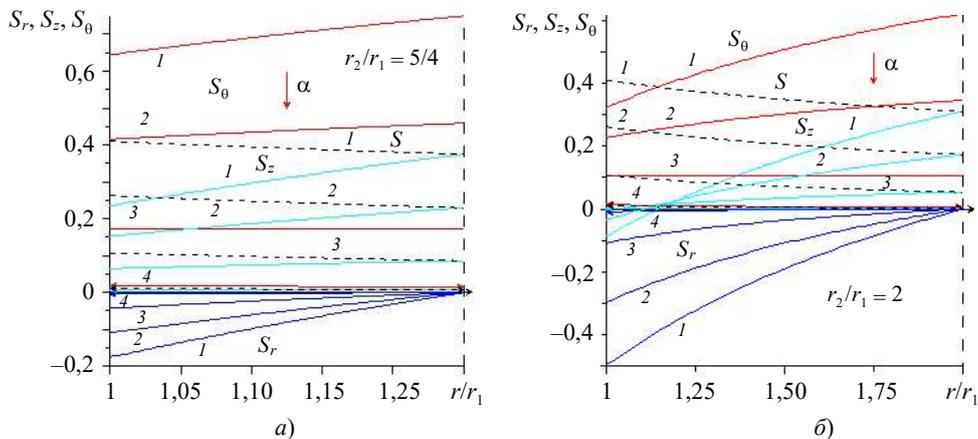


Рис. 2

На рис. 3а приведены зависимости напряжений (43)–(46) от \bar{r} в процессе релаксации в трубе с $r_1/r_2 = 1/2$ под той же нагрузкой ($u_1/r_1 = 0,01$, $p_2 = 5$), что и на рис. 1, для той же модели с МФ (49) и (7), у которых $\alpha = 0,2$, $E = 200$, $E_\infty = E/3 = = 200/3$, $\mu = 0,3$. Эпюры напряжений (теми же цветами, что и на рис. 1 и 2) приведены для трех моментов времени $t = 0; \tau; 2\tau$ (кривые 1–3), штрихпунктирные кривые 4 – предельные кривые для $t = \infty$.

На рис. 3б приведены аналогичные эпюры напряжений (43)–(46) в процессе релаксации в такой же трубе с $r_1/r_2 = 1/2$ под той же нагрузкой, но для модели с $\alpha = = 0,8$. Все напряжения на порядок меньше, $S_0(\bar{r})$ убывает, поскольку $\alpha > 0,5$.

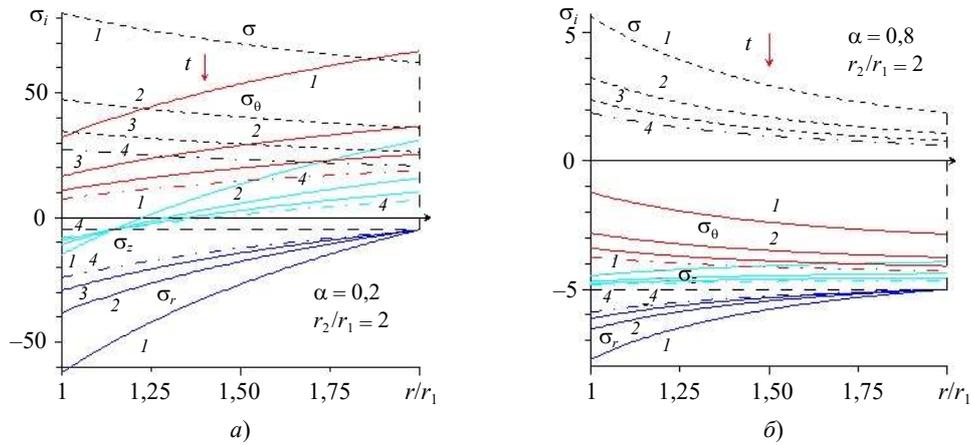


Рис. 3

Для других МФ, в частности для бистепенной МФ вида (9) (или любой линейной комбинации с положительными коэффициентами функций (48) с разными показателями), функции $S_\theta(\bar{r})$, $S_z(\bar{r})$ и напряжения $\sigma_\theta(\bar{r})$, $\sigma_z(\bar{r})$ могут быть немонотонными по \bar{r} .

Пример 2. Рассмотрим ОС (1) с функцией нелинейности (9). Поскольку линейной комбинации $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, $c_i > 0$, соответствует из (27) функция $F = c_1F_1 + c_2F_2$, а ей, следуя (42), соответствуют $S_r(\bar{r})$, $S_\theta(\bar{r})$, $S_z(\bar{r})$ из таких же двух слагаемых (построение функций S_r , S_θ , S_z – композиция двух линейных операторов), можно получить S_r , S_θ , S_z для МФ (9) (с $C = 1$), суммируя два слагаемых вида (49) с разными показателями:

$$S_r = A\vartheta n^{-1}y_0^n[q^n - \bar{r}^{-2n}] + A(1 - \vartheta)m^{-1}y_0^m[q^m - \bar{r}^{-2m}],$$

$$S_z = A\vartheta n^{-1}y_0^n[q^n + (n-1)\bar{r}^{-2n}] + A(1 - \vartheta)m^{-1}y_0^m[q^m + (m-1)\bar{r}^{-2m}], \quad (53)$$

$$S_\theta = A\vartheta n^{-1}y_0^n[q^n + (2n-1)\bar{r}^{-2n}] + A(1 - \vartheta)m^{-1}y_0^m[q^m + (2m-1)\bar{r}^{-2m}], \quad (54)$$

$$S(\bar{r}) = A\vartheta y_0^n \bar{r}^{-2n} + A(1 - \vartheta)y_0^m \bar{r}^{-2m}. \quad (55)$$

На рис. 4 приведены графики функций (53), (54) для моделей с бистепенной МФ (9) с $m = 1/5$, $n = 2$, $A = 1$ и разными весовыми множителями $\vartheta \cdot 10^4 = 1; 5; 10; 15; 20$ (кривые 1–5) для трубы с $r_1/r_2 = 1/2$ при задании той же окружной деформации $u_1/r_1 = 0,01$, что и на рис. 2а, иллюстрирующие перераспределение напряжений по сечению и возможность их немонотонности.

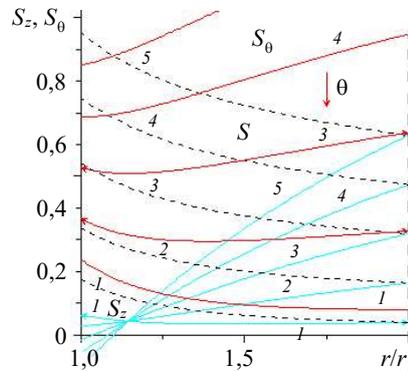


Рис. 4

Как следует из формул (43), (44), эти графики пропорциональны эпюрам напряжений $\sigma_z(\bar{r})$ и $\sigma_\theta(\bar{r})$ в трубе при нагрузке $p_2(t) = 0$ в любой фиксированный момент времени (коэффициент подобия зависит от ФР и момента времени). С убыванием ϑ функции $S_z(\bar{r})$ и $S_\theta(\bar{r})$ меняются от строго возрастающих (как на рис. 2а) до имеющих минимум (графики 2, 3 – $S_\theta(\bar{r})$ и $1 - S_z(\bar{r})$) и строго убывающих.

Заключение

Построено и аналитически исследовано точное решение квазистатической задачи об определении напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы из изотропного вязкоупругого материала, подчиняющегося нелинейному ОС (1) с двумя произвольными материальными функциями, в случае задания радиального перемещения внутренней границы трубы и давления на внешней границе, медленно меняющихся во времени, в частности задачи о релаксации напряжений в трубе. В предположениях несжимаемости материала и плоской деформации трубы поля перемещений, деформаций и напряжений в любой момент времени выражены по формулам (32)–(34) через отношение радиусов трубы, внешнее давление и интегральные операторы от композиции материальных функций и истории изменения перемещения внутренней поверхности трубы. Доказано, что если внешнее давление равно нулю, то отношение средних по сечению окружных и осевых напряжений (37) и (38) не зависит от времени, материальных функций и заданного на границе перемещения (в отличие от самих средних напряжений), выражается формулой (39) через отношение радиусов трубы и всегда больше двух. Показано, что при специальных выборах одной из материальных функций найденные поля напряжений совпадают с известными классическими решениями для несжимаемого материала в рамках линейной теории вязкоупругости, нелинейной упругости или деформационной теории пластичности с произвольным упрочнением.

В случае задания постоянного радиального перемещения внутренней поверхности трубы (в условиях релаксации) вычислены все интегральные операторы, входящие в общее решение, и выведены простые формулы (40), (43)–(46) для деформаций и напряжений в любой точке трубы через материальные функции ОС (1), отношение радиусов трубы и заданное смещение точек внутренней поверхности, аналитически исследованы свойства семейств кривых релаксации в произвольной точке трубы, распределение напряжений по радиальной координате и свойства средних по сечению окружных и осевых напряжений. Установлено, что одна материальная функция управляет лишь зависимостью напряжений от времени, а вторая – только зависимостью от радиальной координаты (в задаче о релаксации происходит разделение переменных и сфер влияния материальных функций ОС), что осевое и окружное напряжения могут убывать, возрастать и быть немонотонными по радиусу. Доказано, что в случае нулевого внешнего давления кривые релаксации всех напряжений во всех точках трубы подобны друг другу, убывают по времени и не имеют точек перегиба, что отношение любых напряжений в любых двух точках трубы не зависит от времени. Детально исследованы специфические свойства поля напряжений (43)–(46) для ОС (1) со степенной материальной функцией нелинейности (48) с любым показателем и произвольной функции сдвиговой релаксации. Найдены критерии возрастания или убывания напряжений по радиальной координате в виде неравенств для показателя функции нелинейности.

Полученное решение краевой задачи при произвольных материальных функциях, заданных граничных значениях и отношении радиусов трубы и проведенный анализ

позволяют строить решения задач для составных труб из разных материалов, описываемых ОС (1) с разными парами материальных функций (в частности, линейно и нелинейно упругих материалов), и определять контактные давления слоев (например, «сэндвича» из внешних упругих слоев и вязкоупругого внутреннего слоя) [39].

Автор благодарен Московскому центру фундаментальной и прикладной математики за поддержку работы.

Список литературы

1. Соколовский В.В. *Теория пластичности*. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 306 с.
2. Nadai A.L. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Vol. 1. New York: McGraw-Hill, 1950. 572 p.
3. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Clarendon Press, 1950. 356 p.
4. Prager W., Hodge P.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. New York: John Wiley and Sons, 1951. 328 p.
5. Ильюшин А.А. *Пластичность. Основы общей математической теории*. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
6. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. *Упругопластические деформации полых цилиндров*. М.: Изд-во МГУ, 1960. 227 с.
7. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
8. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
9. Bland D.R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradient. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1956. Vol. 4. Iss. 4. P. 209–229. DOI: 10.1016/0022-5096(56)90030-8.
10. Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1992. Vol. 52. Iss. 1. P. 129–144. DOI: 10.1016/0308-0161(92)90064-M.
11. Wong H., Simionescu O. An analytical solution of thermoplastic thick-walled tube subject to internal heating and variable pressure, taking into account corner flow and nonzero initial stress. *International Journal of Engineering Science*. 1996. Vol. 34. Iss. 11. P. 1259–1269. DOI: 10.1016/0020-7225(96)00023-7.
12. Gao X.-L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory. *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 40. Iss. 23. P. 6445–6455. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00424-4.
13. Zhao W., Seshadri R., Dubey R.N. On thick-walled cylinder under internal pressure. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2003. Vol. 125. No 3. P. 267–273. DOI: 10.1115/1.1593082.
14. Xin L., Dui G., Yang S., Zhang J. An elasticity solution for functionally graded thick-walled tube subjected to internal pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 89. P. 344–349. DOI: 10.1016/J.IJMECSCI.2014.08.028.
15. Шарафутдинов Г.З. Осесимметричная деформация толстостенной трубы из высокоэластичного материала. *Изв. РАН. МТТ*. 2009. №2. С. 108–120.
16. Радченко В.П., Кубышкина С.Н. Математическая модель реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы. *Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки*. 1998. Вып. 6. С. 23–34. DOI: 10.14498/vsgtu4.
17. Радченко В.П., Цветков В.В. Напряженно-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести. *Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки*. 2013. Вып. 3 (32). С. 77–86. DOI: 10.14498/vsgtu1277.
18. Зингерман К.М., Левин В.А. Обобщение задачи Ламе – Гадолина для больших деформаций и ее аналитическое решение. *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 322–336.
19. Бухалов В.И., Попов А.Л., Челобеев Д.А. Задача Гадолина в упругопластической

- постановке. *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82. Вып. 6. С. 804–812. DOI: 10.31857/S003282350002544-8.
20. Качанов Л.М. *Теория ползучести*. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
 21. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
 22. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
 23. Cristensen R.M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York–London: Academic Press, 1971. 256 p.
 24. Москвитин В.В. *Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе)*. М.: Наука, 1972. 328 с.
 25. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
 26. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Heidelberg: Springer, 1989. 769 p.
 27. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием. *Прикладная математика и механика*. 1948. Т. 12. №1. С. 53–62.
 28. Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н. Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории. *ПМТФ*. 1971. № 2. С. 76–82.
 29. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степаньчев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах. *Механика полимеров*. 1971. №1. С. 74–87.
 30. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степаньчев Е.И. Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии. *Механика полимеров*. 1973. № 5. С. 779–785.
 31. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния. *Механика композитных материалов*. 1993. № 5. С. 602–607.
 32. Суворова Ю.В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях. *Изв. РАН. МТТ*. 2004. № 1. С. 174–181.
 33. Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В. Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями. *Композиты и наноструктуры*. 2011. № 2. С. 28–39.
 34. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2017. Vol. 72. No 5. P. 103–107. DOI: 10.3103/S0027133017050016.35.
 35. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54. No 4. P. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1.
 36. Хохлов А.В. Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2018. Т. 24. №3. С. 407–436. DOI: 10.33113/mkkm.ras.2018.24.03.407_436.07.
 37. Khokhlov A.V. Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. No 3. P. 384–399. DOI: 10.3103/S002565441902002X.
 38. Хохлов А.В. Особенности эволюции напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы из нелинейно вязкоупругого материала под действием постоянных давлений. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2020. Т. 26. №2. С. 224–246. DOI: 10.33113/mkkm.ras.2020.26.02.224_246.06.
 39. Khokhlov A.V. Creep and long-term strength of a laminated thick-walled tube of nonlinear viscoelastic materials loaded by external and internal pressures. *Mechanics of Composite Materials*. 2021. Vol. 57. No 6. P. 731–748. DOI: 10.1007/s11029-022-09995-0.
 40. Хохлов А.В. Точное решение задачи о нагружении давлениями полого цилиндра из нелинейно наследственного материала в случае степенных функций нелинейности. *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82. №2. С. 225–243. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-225-243.

41. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics, its Foundations and Objectives*. Eds. Y.C. Fung et al. New Jersey: Prentice-Hall, 1972. P. 181–208.
42. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer, 1993. 568 p.
43. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2000. Vol. 122. Iss. 1. P. 15–22. DOI: 10.1115/1.429623.
44. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2003. Vol. 125. Iss. 5. P. 754–758. DOI: 10.1115/1.1615247.
45. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2004. Vol. 126. Iss. 1. P. 92–97. DOI:10.1115/1.1645528.
46. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2007. Vol. 40. Iss. 14. P. 3070–3078. DOI: 10.1016/J.JBIOMECH.2007.03.019.
47. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2007. Vol. 6. Iss. 4. P. 245–251. DOI: 10.1007/S10237-006-0056-8.
48. Duenwald-Kuehl S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mechanica*. 2009. Vol. 205. Iss. 1-4. P. 23–33. DOI: 10.1007/S00707-009-0161-8.
49. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
50. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proceedings of the Royal Society A*. 2014. Vol. 470. P. 20140058-1–20140058-18. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.
51. Khokhlov A.V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification. *Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 53. Iss. 3. P. 307–328. DOI: 10.3103/S0025654418070105.
52. Хохлов А.В. Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента Пуассона в рамках линейной теории вязкоупругости. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 23. №4. С. 671–704. DOI: 10.14498/vsgtu1710.

References

1. Sokolovskiy V.V. *Teoriya plastichnosti [Theory of Plasticity]*. Moscow. Leningrad. AN SSSR Publ. 1946. 306 p. (In Russian).
2. Nadai A.L. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Vol. 1. New York. McGraw-Hill. 1950. 572 p.
3. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford. Clarendon Press. 1950. 356 p.
4. Prager W., Hodge P.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. New York. John Wiley and Sons. 1951. 328 p.
5. Ilyushin A.A. *Plastichnost. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii [Theory of Plasticity. Mathematical Basis]*. Moscow. AN SSSR Publ. 1963. 271 p. (In Russian).
6. Ilyushin A.A., Ogibalov P.M. *Uprugoplasticheskie deformatsii polykh tsilindrov [Elasto-plastic Deformations of Hollow Cylinders]*. Moscow. MGU Publ. 1960. 227 p. (In Russian).
7. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [Applied Theory of Plasticity and Creep]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1968. 400 p. (In Russian).
8. Ishlinskii A. Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematic Theory of Plasticity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 704 p. (In Russian).
9. Bland D.R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradient. *J. Mech. Phys. Solids*. 1956. Vol. 4. Iss. 4. P. 209–229. DOI: 10.1016/0022-5096(56)90030-8.

10. Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material. *Int. J. of Press. Vessel. Pip.* 1992. Vol. 52. Iss. 1. P. 129–144. DOI: 10.1016/0308-0161(92)90064-M.
11. Wong H., Simionescu O. An analytical solution of thermoplastic thick-walled tube subject to internal heating and variable pressure, taking into account corner flow and nonzero initial stress. *Int. J. Eng. Sci.* 1996. Vol. 34. Iss. 11. P. 1259–1269. DOI: 10.1016/0020-7225(96)00023-7.
12. Gao X.-L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory. *Int. J. Solids and Struct.* 2003. Vol. 40. Iss. 23. P. 6445–6455. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00424-4.
13. Zhao W., Seshadri R., Dubey R.N. On thick-walled cylinder under internal pressure. *J. Pres. Vessel Technol.* 2003. Vol. 125. No 3. P. 267–273. DOI: 10.1115/1.1593082.
14. Xin L., Dui G., Yang S., Zhang J. An elasticity solution for functionally graded thick-walled tube subjected to internal pressure. *Int. J. Mech. Sci.* 2014. Vol. 89. P. 344–349. DOI: 10.1016/J.IJMECSCI.2014.08.028.
15. Sharafutdinov G.Z. Axisymmetric strain of a thick-walled pipe made of a highly elastic material. *Mechanics of Solids*. 2009. Vol. 44. No 2. P. 257–268. DOI: 10.3103/S0025654409020113.
16. Radchenko V.P., Kubyshkina S.N. Matematicheskaya model reologicheskogo deformirovaniya i razrusheniya tolstostennoy trubyy [A mathematical model of rheological deformation and fracture for thick-walled pipe]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]. 1998. Iss 6. P. 23–34 (In Russian).
17. Radchenko V.P., Tsvetkov V.V. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie tsilindricheskogo obraztza iz splava D16T v usloviyakh oseвого rastyazheniya i krucheniya pri polzuchesti [The stress-strain state of cylindrical sample from alloy d16t under axial tension and torsion creep]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]. 2013. Iss. 3 (32). P. 77–86 (In Russian).
18. Zingerman K.M., Levin V.A. Extension of the Lamé–Gadolin problem for large deformations and its analytical solution. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2013. Vol. 77. Iss. 2. P. 235–244.
19. Bukhalov V.I., Popov A.L., Chelyubeev D.A. Gadolin's theory in elastoplastic formulation. *Mech. Solids*. 2019. Vol. 54. No 2. P. 356–363. DOI: 10.3103/S0025654419030051.
20. Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti* [Creep Theory]. Moscow. Fizmatgiz Publ. 1960. 456 p. (In Russian).
21. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest elementov konstruktsiy* [Creep Problems in Structural Members]. Moscow. Nauka Publ. 1966. 752 p. (In Russian).
22. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest i dlitel'naya prochnost metallov* [Creep and Long-Lasting Strength of Metals]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2016. 504 p. (In Russian).
23. Cristensen R.M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York. London. Acad. Press. 1971. 256 p.
24. Moskvitin V.V. *Soprotivlenie vyazkouprugikh materialov (primenitelno k zaryadam raketnykh dvigateley na tverdom toplive)* [Strength of Viscoelastic Materials]. Moscow. Nauka Publ. 1972. 328 p. (In Russian).
25. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Introduction to Hereditary Mechanics of Solids]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 384 p. (In Russian).
26. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Heidelberg. Springer. 1989. 769 p.
27. Rabotnov Yu.N. Ravnovesie uprugoy sredy s posledeystviem [Equilibrium of elastic medium with heredity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [J. Appl. Math. Mech.]. 1948. Vol. 12. No 1. P. 53–62 (In Russian).
28. Dergunov N.N., Papernik L.Kh., Rabotnov Yu.N. Analiz povedeniya grafita na osnove nelineynoy nasledstvennoy teorii [Analysis of the behavior of graphite on the basis of the non-linear hereditary theory]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.]. 1971. No 2. P. 76–82 (In Russian).
29. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Prilozhenie nelineynoy teorii nasledst-

vennosti k opisaniyu vremennykh effektov v polimernykh materialakh [Application of the nonlinear theory of heredity to the description of time effects in polymeric material]. *Mekhanika polimerov* [Mech. Compos. Mater.]. 1971. No 1. P. 74–87 (In Russian).

30. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Opisanie polzuchesti kompozitsionnykh materialov pri rastyazhenii i szhatii [Description of creep of composition materials under tension and compression]. *Mekhanika polimerov* [Mech. Compos. Mater.]. 1973. No 5. P. 779–785 (In Russian).

31. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Nelineynaya model izotropnoy nasledstvennoy sredy dlya sluchaya slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya [A nonlinear model of an isotropic hereditary medium in complex stress state]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mech. Compos. Mater.]. 1993. Vol. 29. No 5. P. 602–607 (In Russian).

32. Suvorova Yu.V. O nelineyno-nasledstvennom uravnenii Yu.N. Rabotnova i ego prilozheniyakh [On the Yu.N. Rabotnov nonlinear hereditary equation and its applications]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 2004. No 1. P. 174–181 (In Russian).

33. Alexeeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. Analiz vyazkouprugikh svoystv polimernykh kompozitov s uglernymi nanonapolnitelyami [Analysis of viscoelastic properties of polymer based composites with carbon nanofillers]. *Kompozity i nanostruktury* [Composites and Nanostructures]. 2011. No 2. P. 28–39 (In Russian).

34. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2017. Vol. 72. No 5. P. 103–107. DOI: 10.3103/S0027133017050016.35.

35. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mech. Compos. Mater.* 2018. Vol. 54. No 4. P. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1.

36. Khokhlov A.V. Modelirovanie zavisimosti krivykh polzuchesti pri rastyazhenii i koeffitsienta Puassona reonomnykh materialov ot gidrostaticheskogo davleniya s pomoshchyu nelineynogo nasledstvennogo sootnosheniya Rabotnova [Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Mech. Compos. Mater. Struct.]. 2018. Vol. 24. No 3. P. 407–436 (In Russian).

37. Khokhlov A.V. Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. No 3. P. 384–399. DOI: 10.3103/S002565441902002X.

38. Khokhlov A.V. Osobennosti evolyutsii napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya tolstostennoy trubyy iz nelineynogo vyazkouprugogo materiala pod deystviem postoyannykh davleniy [Characteristic features of stress-strain state evolution in thick-walled tubes of non-linear viscoelastic material subject to constant pressures]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Mech. Compos. Mater. Struct.]. 2020. Vol. 26. No 2. P. 224–246 (In Russian).

39. Khokhlov A.V. Creep and long-term strength of a laminated thick-walled tube of nonlinear viscoelastic materials loaded by external and internal pressures. *Mechanics of Composite Materials*. 2021. Vol. 57. No 6. P. 731–748. DOI: 10.1007/s11029-022-09995-0.

40. Khokhlov A.V. Tochnoe reshenie zadachi o nagruzhennii davleniyami pologo tsilindra iz nelineynogo nasledstvennogo materiala v sluchae stepennykh funktsiy nelineynosti [The exact solution for strains and stresses in a hollow cylinder of non-linear viscoelastic material subject to internal and external pressures in the case of power material function governing non-linearity]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2020. Vol. 82. No 2. P. 225–243 (In Russian).

41. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics, its Foundations and Objectives*. Eds. Y.C. Fung et al. New Jersey. Prentice-Hall. 1972. P. 181–208.

42. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York. Springer. 1993. 568 p.

43. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *J. Biomech. Eng.* 2000. Vol. 122. Iss. 1. P. 15–22. DOI: 10.1115/1.429623.

44. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments. *J. Biomech. Eng.* 2003. Vol. 125. Iss. 5. P. 754–758. DOI: 10.1115/1.1615247.
45. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *J. Biomech. Eng.* 2004. Vol. 126. Iss. 1. P. 92–97. DOI: 10.1115/1.1645528.
46. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *J. Biomech. Eng.* 2007. Vol. 40. Iss. 14. P. 3070–3078. DOI: 10.1016/J.JBIOMECH.2007.03.019.
47. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomech. Model. Mechanobiol.* 2007. Vol. 6. No 4. P. 245–251. DOI: 10.1007/S10237-006-0056-8.
48. Duenwald-Kuehl S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mech.* 2009. Vol. 205. Iss. 1-4. P. 23–33. DOI: 10.1007/S00707-009-0161-8.
49. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge. Cambridge Univ. Press. 2009. 461 p.
50. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a re-appraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proc. R. So. A* 2014. Vol. 470. P. 20140058-1–20140058-18. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.
51. Khokhlov A.V. Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification. *Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 53. Iss. 3. P. 307–328. DOI: 10.3103/S0025654418070105.
52. Khokhlov A.V. Analiz vliyaniya ob'emnoy polzuchesti na krivye nagruzheniya s postoyannoy skorostyu i evolyutsiyu koeffitsienta Puassona v ramkakh lineynoy teorii vyazkouprugosti [Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson's ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]. 2019. Vol. 23. No 4. P. 671–704 (In Russian).

**EXACT SOLUTION FOR THE STRESS RELAXATION PROBLEM
IN A THICK-WALLED TUBE OF A NON-LINEAR VISCOELASTIC MATERIAL
OBEYING THE RABOTNOV CONSTITUTIVE EQUATION**

Khokhlov A.V.

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
North-Eastern Federal University in Yakutsk, Yakutsk, Russian Federation*

We constructed and studied analytically the exact solution of the quasi-static boundary value problem for a hollow cylinder (a tube) made of physically non-linear homogeneous isotropic viscoelastic material obeying the Rabotnov constitutive equation with two arbitrary material functions (a creep compliance and a function which governs physical non-linearity). A time-dependent displacement and zero shear stresses are given on the inside cylinder surface, a pressure (normal stress) is given on outside surface and zero axial displacements and zero shear stresses are preset on the end cross sections of the tube (thus, cylinder stress and plain strain are realized in a tube). We supposed that a material is incompressible and that given boundary displacement and pressure vary slowly enough with time to neglect inertia terms in the equilibrium equations. We obtained explicit expressions for strains and stresses at any point via the ratio of a tube radii, given external pressure and integral operators involving composition of two material functions of the constitutive relation and displacement preset on the internal cylindrical surface.

In particular, assuming given boundary displacement and pressure are constant we considered the stress relaxation problem. For arbitrary material functions, we calculated all the hereditary integrals

involved in the general representation for the stress field and reduced it to simple algebraic formulas convenient for analysis and use. We studied analytically general properties of the stress relaxation curves at any point of a tube and features of stress distributions along radius. We proved that the first material function (relaxation modulus) of the constitutive equation governs completely stresses dependence on time and the second one (non-linearity function) governs only stresses dependence on radial coordinate and found out that hoop stress and axial stress can change sign and can increase, decrease and be non-monotone with respect to radial coordinate. In case of zero external pressure, we proved that all stress relaxation curves at any point of a tube are proportional to each other (ratio of stresses at different points doesn't depend on time), decrease with time and have no flexure points. We also calculated integral mean values of axial and hoop stresses and discovered that their ratio depends on thickness/radius ratio only and doesn't depend on time and material functions although mean stresses do.

Keywords: quasi-linear viscoelasticity, elastoplasticity, boundary value problem, exact solution, stress field properties, stress relaxation, relaxation curves family, relaxation modulus, non-linearity material function, incompressible material, axial force.