

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-157-167

**НЕЛИНЕЙНАЯ ЛОКАЛИЗОВАННАЯ ВОЛНА  
В МЕТАМАТЕРИАЛЕ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОТОРОГО  
ПОЛУЧЕНА МЕТОДОМ АЛЬТЕРНАТИВНОЙ  
КОНТИНУАЛИЗАЦИИ\***

© 2022 г. **Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Леонтьева А.В.**

*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального  
исследовательского центра «Институт прикладной физики РАН»,  
Нижний Новгород, Российская Федерация*

*erof.vi@yandex.ru*

*Поступила в редакцию 29.11.2021*

Приведено определение метаматериала как класса веществ со сложно организованной внутренней структурой и с уникальными физико-механическими свойствами. Как правило, такой материал представляет собой сложную периодическую систему, в узлах которой расположены не материальные точки, а тела малых, но конечных размеров, обладающие внутренними степенями свободы. Для описания метаматериалов часто используются градиентные континуумы, получаемые путем континуализации уравнений движения дискретных решеток, состоящих из одинаковых масс и пружин различной жесткости. При этом модель градиентного континуума должна быть динамически непротиворечивой, то есть устойчивой и обеспечивающей конечную скорость переноса энергии, в то время как в большинстве градиентных моделей групповая скорость волн неограниченно возрастает с частотой. Добиться динамической непротиворечивости модели градиентного континуума позволяет метод континуализации, предложенный А. Метрикиным и Х. Аскесом, суть которого заключается в предположении о нелокальной связи между смещениями узлов решетки и получаемого континуума (метод альтернативной континуализации). В статье указанный метод обобщен на случай конечных деформаций и применен для получения нелинейной динамически непротиворечивой модели метаматериала (градиентно-упругой среды). В рамках полученной модели исследовано формирование в градиентно-упругих средах пространственно локализованных нелинейных волн, представляющих собой солитоны деформации и их периодические аналоги. Знак безразмерного параметра, представляющего собой отношение нелинейной добавки к жесткости пружины к ее линейной жесткости, влияет на полярность солитона. Показано, что для положительных значений параметра (жесткая нелинейность) солитон имеет отрицательную полярность; для отрицательных значений параметра (мягкая нелинейность) солитон имеет положительную полярность. Величина нелинейности не влияет на скорость распространения волн и их ширину, но влияет на их амплитуду.

*Ключевые слова:* волновая динамика, градиентная упругость, метаматериал, нелинейность, локализация.

---

\* Выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-19-00065).

## Введение

Класс веществ со сложно организованной внутренней структурой (микроструктурой) и с уникальными физико-механическими свойствами принято называть метаматериалами [1]. Впервые они появились в области оптики и фотоники [2], но сейчас они все чаще встречаются и в других областях. К примеру, широко применяются акустические (механические) метаматериалы [3–5], используемые, в частности, как акустические поглотители, имеющие более высокую эффективность снижения шума при меньшей массе и меньшей толщине [6]. Как правило, такой материал представляет собой сложную периодическую структуру, в узлах которой расположены не материальные точки, а тела малых, но конечных размеров, обладающие внутренними степенями свободы, – фуллерены, молекулярные кластеры, нанотрубки, зерна, домены и другие [7, 8]. Поэтому неудивительно, что к числу метаматериалов можно отнести и многие наноматериалы: графен, углеродные нанотрубки, фуллериты [7]. Сверх- и ультратвердые фуллериты характеризуются уникально высокими значениями скоростей упругих волн и широким диапазоном этих значений в пределах от 11 до 26 км/с в зависимости от их структуры, определяемой условиями синтеза [9, 10]. Как метаматериал можно рассматривать и лес углеродных нанотрубок [11], для синтеза которых разработан целый ряд высокопроизводительных методов [12, 13]. Так, например, бездефектные углеродные нанотрубки на два порядка прочнее стали и в четыре раза легче ее. Важной особенностью графеновых  $sp^2$ -структур является их стойкость по отношению к нагреву, при этом температура их плавления превышает 4500 К [14]. Это позволяет создавать на их основе материалы и наноустройства, работающие при необычайно высоких температурах.

Применение метаматериалов представляется многообещающим для авиакосмической и автомобильной техники, а также для биомедицинских приложений. Они могут успешно применяться для создания материалов, поглощающих звук, демпфирующих вибрационные и ударные воздействия, датчиков температуры, работающих в широком диапазоне температур, наномоторов и других наноустройств.

Обзор современных публикаций об акустических (механических) метаматериалах представлен в [15].

Очевидно, что как для прогноза физико-механических свойств создаваемых метаматериалов, так и для исследования различных процессов, протекающих в них, необходимы математические модели метаматериалов, способные адекватно описывать не только упругие, термоупругие и пластические свойства материала, но и изменение этих свойств под влиянием внешних полей (в частности, электромагнитного) и в процессе эксплуатации, например, при изменении температуры вплоть до достижения значений, близких к абсолютному нулю, либо, наоборот, при нагреве.

Для описания метаматериалов часто используются градиентные континуумы (их теория базируется на публикациях Ж. Леру [16, 17], Т. Джеремилло [18], Р. Миндлина [19], Р. Тупина [20] и др.), получаемые путем континуализации уравнений движения дискретных решеток, состоящих из одинаковых масс и пружин различной жесткости. Следует, однако, заметить, что модель градиентного континуума должна быть динамически непротиворечивой, то есть устойчивой и обеспечивающей конечную скорость переноса энергии, в то время как в большинстве градиентных моделей групповая скорость волн неограниченно возрастает с частотой [21]. Добиться динамической непротиворечивости модели градиентного континуума позволяет метод континуализации, предложенный А.В. Метрикиным и Х. Аскесом. Суть метода

заключается в предположении о нелокальной связи между смещениями узлов решетки и получаемого континуума (метод альтернативной континуализации) [22, 23]. Достоинством упомянутого метода является получение динамически непротиворечивого квазиконтинуума, описываемого дифференциальными уравнениями движения требуемого порядка, а следовательно, и точности. Следует отметить недостаточную обоснованность предпосылок и преобразований. Одним из спорных предположений является замена среднего из нескольких дискретных функций на аналитическую функцию.

Настоящая статья основывается на методе альтернативной континуализации и предлагает обоснование последнего предположения. Также получено и исследовано уравнение движения с учетом физической нелинейности. Показано, что в метаматериале могут распространяться стационарные волны деформации – солитоны и их периодические аналоги.

## 1. Математическая модель

Рассмотрим длинную одномерную цепочку чередующихся одинаковых масс и пружин. Предполагаем, что массы могут смещаться только вдоль цепочки. Это направление обозначим как ось  $Ox$ . Пусть  $m$  – масса частицы,  $k$  – жесткость пружины,  $l$  – расстояние между частицами,  $u_n = u_n(t)$  – смещение частицы с номером  $n$ .

Потенциальная энергия цепочки складывается из потенциальных энергий  $\varphi(\xi_n)$  всех пружин, которые зависят от их смещений  $\xi_n = u_n - u_{n-1}$ :

$$W = \sum_n \varphi(\xi_n) = \sum_n \varphi(u_n - u_{n-1}).$$

Поскольку целью работы является исследование нелинейных волн,  $\varphi(\xi)$  будем рассматривать с учетом кубического ангармонизма:

$$\varphi(\xi) = \frac{k\xi^2}{2} + \frac{K\xi^3}{3}. \quad (1)$$

Уравнение движения частицы имеет вид

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = - \frac{\partial W}{\partial u_n}$$

или после преобразований с учетом предыдущих соотношений

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + K(u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}). \quad (2)$$

Построим интерполяционный полином второй степени по  $x$ , совпадающий с функцией  $u(x, t)$  в точках  $u(x_{n-1}, t) = u_{n-1}$ ,  $u(x_n, t) = u_n$ ,  $u(x_{n+1}, t) = u_{n+1}$ :

$$\bar{u}(x, t) = u_{n-1} \frac{(x - x_n)(x - x_{n+1})}{2l^2} - u_n \frac{(x - x_{n-1})(x - x_{n+1})}{l^2} + u_{n+1} \frac{(x - x_{n-1})(x - x_n)}{2l^2}.$$

Вычислим значения интерполяционного полинома в точках  $x_n - \theta l$  и  $x_n + \theta l$ , где  $0 < \theta < 1$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}(x_n + \theta l, t) &= u_{n-1} \frac{\theta(\theta-1)}{2} + u_n(1-\theta^2) + u_{n+1} \frac{\theta(\theta+1)}{2}, \\ \bar{u}(x_n - \theta l, t) &= u_{n-1} \frac{\theta(\theta+1)}{2} + u_n(1-\theta^2) + u_{n+1} \frac{\theta(\theta-1)}{2}. \end{aligned}$$

В качестве непрерывной функции, описывающей движение континуальной модели масс и пружинок, примем среднее значение  $\bar{u}(x_n + \theta l, t)$  и  $\bar{u}(x_n - \theta l, t)$ . Получим

$$u(x, t) \approx \frac{\bar{u}(x_n + \theta l, t) + \bar{u}(x_n - \theta l, t)}{2} = u_{n-1} \frac{\theta^2}{2} + u_n (1 - \theta^2) + u_{n+1} \frac{\theta^2}{2}. \quad (3)$$

Авторами альтернативной континуализации [22, 23] непрерывная функция рассматривается как среднее между смещением трех соседних частиц

$$u(x, t) \approx \frac{1}{1 + 2a_1} (a_1 u_{n-1} + u_n + a_1 u_{n+1}), \quad (4)$$

где безразмерная «весовая» константа  $a_1$  находится в диапазоне  $0 \leq a_1 < 1$ . Нетрудно заметить, что соотношения (3) и (4) идентичны, причем параметры  $a_1$  и  $\theta$  связаны следующими соотношениями:

$$\theta^2 = \frac{2a_1}{1 + 2a_1}, \quad a_1 = \frac{\theta^2}{2(1 - \theta^2)}. \quad (5)$$

Также при реализации метода предполагается, что

$$u_n(t) = u(x, t) + l^2 f_2(x, t) + l^4 f_4(x, t) + O(L^5), \quad (6)$$

где

$$f_2(x, t) = -\frac{a_1}{1 + 2a_1} u_{xx}(x, t) = -\frac{\theta^2}{2} u_{xx}(x, t),$$

$$f_4(x, t) = \frac{a_1}{12} \frac{10a_1 - 1}{(1 + 2a_1)^2} u_{xxxx}(x, t) = \frac{\theta^2}{24} (6\theta^2 - 1) u_{xxxx}(x, t).$$

Подставляя (6) в (2), учитывая, что

$$u_{n+1} = u(x + l, t) + l^2 f_2(x + l, t) + l^4 f_4(x + l, t) + O(L^5),$$

$$u_{n-1} = u(x - l, t) + l^2 f_2(x - l, t) + l^4 f_4(x - l, t) + O(L^5),$$

и выражая  $u(x \pm l, t)$ ,  $u_{xx}(x \pm l, t)$ ,  $u_{xxxx}(x \pm l, t)$  через функцию  $u(x, t)$  и ее производные, используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$u_{tt} - \frac{l^2 \theta^2}{2} u_{xxtt} + \frac{l^4 \theta^2 (6\theta^2 - 1)}{24} u_{xxxxtt} - \frac{kl^2}{m} u_{xx} - \frac{1 - 6\theta^2}{12} \frac{kl^4}{m} u_{xxxx} =$$

$$= \frac{2Kl^3}{m} u_x u_{xx} + \frac{1 - 3\theta^2}{3} \frac{Kl^5}{m} u_{xx} u_{xxx} + \frac{1 - 6\theta^2}{6} \frac{Kl^5}{m} u_x u_{xxxx}. \quad (7)$$

Для оценки вклада слагаемых в уравнении (7) перейдем к нормированным переменным

$$U = \frac{u}{u_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\Lambda}, \quad \tau = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{l}{\Lambda} t.$$

После этого уравнение (7) примет вид

$$U_{\tau\tau} - U_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{\theta^2}{2} \frac{l^2}{\Lambda^2} U_{\bar{x}\bar{x}\tau\tau} - \frac{1 - 6\theta^2}{12} \frac{l^2}{\Lambda^2} U_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \frac{\theta^2 (6\theta^2 - 1)}{24} \frac{l^4}{\Lambda^4} U_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}\tau\tau} =$$

$$= \frac{2Kl}{k} \frac{u_0}{\Lambda} U_{\bar{x}} U_{\bar{x}\bar{x}} + \frac{1 - 3\theta^2}{3} \frac{Kl}{k} \frac{l^2}{\Lambda^2} \frac{u_0}{\Lambda} U_{\bar{x}\bar{x}} U_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + \frac{1 - 6\theta^2}{6} \frac{Kl}{k} \frac{l^2}{\Lambda^2} \frac{u_0}{\Lambda} U_{\bar{x}} U_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}\bar{x}}. \quad (8)$$

Предполагаем, что  $l/\Lambda \sim 10^{-1}$ ,  $u_0/\Lambda \sim 10^{-4}$ ,  $Kl/k \sim 10$ , поэтому составляющие уравнения (8) будут иметь порядок, представленный в таблице 1.

Таблица 1

Элемент	Порядок	Элемент	Порядок
$U_{\tau\tau}$	1	$\frac{\theta^2(6\theta^2-1)}{24} \frac{l^4}{\Lambda^4} U_{xxxx\tau\tau}$	$10^{-4}$
$U_{\bar{x}\bar{x}}$	1	$\frac{2Kl}{k} \frac{u_0}{\Lambda} U_{\bar{x}} U_{\bar{x}\bar{x}}$	$10^{-3}$
$\frac{\theta^2}{2} \frac{l^2}{\Lambda^2} U_{\bar{x}\tau\tau}$	$10^{-2}$	$\frac{1-3\theta^2}{3} \frac{Kl}{k} \frac{l^2}{\Lambda^2} \frac{u_0}{\Lambda} U_{\bar{x}} U_{\bar{x}\bar{x}}$	$10^{-5}$
$\frac{1-6\theta^2}{12} \frac{l^2}{\Lambda^2} U_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}$	$10^{-2}$	$\frac{1-6\theta^2}{6} \frac{Kl}{k} \frac{l^2}{\Lambda^2} \frac{u_0}{\Lambda} U_{\bar{x}} U_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}$	$10^{-5}$

## 2. Нелинейные стационарные волны. Расчет по упрощенной модели

Отбросим в последнем уравнении составляющие, имеющие порядок  $10^{-4}$  и ниже, и вернемся к размерным переменным. В результате получим

$$u_{tt} - \frac{kl^2}{m} u_{xx} - \frac{l^2\theta^2}{2} u_{xxt} - \frac{1-6\theta^2}{12} \frac{kl^4}{m} u_{xxx} = \frac{2Kl^3}{m} u_x u_{xx}. \quad (9)$$

Рассмотрим модель сплошной среды, уравнение движения в которой описывается линейными составляющими уравнения (9). При исследовании дисперсионной зависимости распространяющихся в ней волн оказывается, что при  $\theta < 1/\sqrt{6}$  эта модель динамически неустойчива, поскольку некоторым действительным числам соответствуют мнимые частоты. Поэтому далее будем предполагать, что  $\theta \geq 1/\sqrt{6}$  и, соответственно,  $a_1 \geq 0,1$ .

Решение уравнения (9) будем искать в виде стационарной волны деформации, распространяющейся с постоянной скоростью  $V$  и не меняющей своего профиля  $v(\zeta) = \partial u / \partial \zeta$ , где  $\zeta = x - Vt$ :

$$\left( V^2 - \frac{kl^2}{m} \right) v_{\zeta} - \left( \frac{l^2\theta^2}{2} V^2 + \frac{kl^4}{m} \frac{1-6\theta^2}{12} \right) v_{\zeta\zeta\zeta} + 2Kl^3 v v_{\zeta} = 0. \quad (10)$$

Интегрируя (10) по  $\zeta$ , получим уравнение, описывающее колебания ангармонического осциллятора с квадратичной нелинейностью

$$v_{\zeta\zeta} + \alpha v + \beta v^2 = 0, \quad (11)$$

где

$$\alpha = -\frac{12(V^2 - kl^2/m)}{6l^2\theta^2V^2 + (kl^4/m)(1-6\theta^2)}, \quad \beta = -\frac{12Kl}{6\theta^2V^2 + (kl^2/m)(1-6\theta^2)}.$$

Решение уравнения (11) подробно рассмотрено в [24], поэтому приведем лишь результаты решения, предварительно введя обозначения:  $A$  – амплитуда колебаний;  $s$  – модуль эллиптической функции, определяющий степень искажения формы колебаний  $v(\zeta)$  по сравнению с синусоидальной формой;  $\omega$  – аналог частоты;  $E$  – константа интегрирования, имеющая смысл начальной энергии. Поскольку уравнение (11) описывает деформацию, то рассматриваем только ограниченные решения этого уравнения.

1. Пусть  $\alpha > 0$ . На знак коэффициента  $\beta$  будет влиять характер пружины: в случае мягкой пружины  $\beta > 0$ , в случае жесткой –  $\beta < 0$ . Если  $0 < E < \alpha^3/(6\beta^2)$ , то со скоростью  $\sqrt{(k/m)(6\theta^2 - 1)/(6\theta^2)}l < V < \sqrt{(k/m)l}$  будут распространяться стационарные волны, описываемые эллиптическим синусом:

$$\begin{aligned} v(\zeta) &= \frac{A}{3s^2} (1 + s^2 - \sqrt{1 - s^2 + s^4}) - A \operatorname{sn}^2(\omega\zeta, s), \\ A &= \frac{3\alpha}{2\beta} \frac{s^2}{\sqrt{1 - s^2 + s^4}}, \quad \omega^2 = \frac{\alpha}{4\sqrt{1 - s^2 + s^4}}, \\ s^2 &= \frac{2 \sin(\varphi/3)}{\sqrt{3} \cos(\varphi/3) + \sin(\varphi/3)}, \quad \varphi = \arccos \left( 1 - \frac{12\beta^2}{\alpha^3} E \right). \end{aligned} \quad (12)$$

При  $E \approx 0$  решения являются предельным случаем нелинейных периодических колебаний при  $s \rightarrow 0$ :

$$v(\zeta) = \frac{1}{2} A \cos(2\omega\zeta).$$

2. Пусть  $\alpha < 0$ . Из требования ограниченности решения следует  $E = 0$ . В таком случае со скоростью  $V > \sqrt{(k/m)l}$  (для мягкой пружины  $\beta > 0$ , для жесткой –  $\beta < 0$ ) и со скоростью  $V < \sqrt{(k/m)l(6\theta^2 - 1)/(6\theta^2)}$  (для мягкой пружины  $\beta < 0$ , для жесткой –  $\beta > 0$ ) будет распространяться солитон, описываемый соотношением:

$$\begin{aligned} v(\zeta) &= \frac{A}{\operatorname{ch}^2(\zeta/\Delta)}, \\ A &= -\frac{3\alpha}{2\beta}, \quad \Delta = \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}, \end{aligned} \quad (13)$$

здесь  $\Delta$  – ширина локализованного движения.

### 3. Нелинейные стационарные волны. Расчет по общей модели

В безразмерных переменных уравнение (7) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} - d_1 \left( \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \frac{\partial^6 U}{\partial z^4 \partial \tau^2} \right) - \\ - d_2 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + d_1 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + d_3 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} \right) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $U = u/u_0$ ,  $z = x/X$ ,  $\tau = t/T$  – безразмерные величины перемещения, координаты и времени соответственно. Характерные величины длины и времени:

$$X^2 = \frac{l^2 \theta^2}{2}, \quad T^2 = \frac{m \theta^2}{2k},$$

безразмерные параметры имеют вид:

$$d_1 = \frac{1}{\theta^2} \left( \frac{1}{6} - \theta^2 \right), \quad d_2 = \frac{2\sqrt{2}Ku_0}{\theta k}, \quad d_3 = \frac{1}{\theta^2} \left( \frac{1}{3} - \theta^2 \right).$$

В переменных бегущей волны уравнение (8) принимает вид:

$$W_{xxxx} + \frac{d_1 + v^2}{d_1 v^2} W_{xxx} + \frac{1 - v^2}{d_1 v^2} W_x + \frac{d_2}{d_1 v^2} (WW_x + d_1 WW_{xxx} + d_3 W_x W_{xx}) = 0, \quad (15)$$

где  $\chi = z - v\tau$  – бегущая координата,  $v$  – скорость нелинейной волны. Введение новой функции  $W = dU/d\chi$  позволяет понизить порядок уравнения до пятого.

Методом простейших уравнений [25] находим решение уравнения (15):

$$W(\chi) = \frac{20d_1B_0v^2}{d_2(2d_1 + d_3)} \left(2 - 3 \operatorname{th}^2(\sqrt{B_0}\chi)\right) - \frac{d_1d_3 - 3d_1v^2 + d_3v^2 + 2d_1^2}{d_1d_2(2d_1 + d_3)}, \quad (16)$$

где

$$B_0^2 = -\frac{2d_1^2 + d_1d_3 - 3d_1 + d_3}{16d_1^2(3d_1 - d_3)}.$$

Решение (16) имеет профиль в виде симметричного колокола с переменным смещением вдоль вертикальной оси (рис. 1, штриховая линия). Фиксируя подошву колокола на нулевой отметке (рис. 1, сплошная линия), находим ограничение, налагаемое на квадрат скорости волны:

$$v^2 = -\frac{d_1(2d_1 + d_3)}{20d_1^2B_0 - 3d_1 + d_3}.$$

При таких скоростях решение (16) принимает вид:

$$W(\chi) = -\frac{60d_1^2B_0}{d_2(20d_1^2B_0 - 3d_1 + d_3) \cosh^2(\sqrt{B_0}\chi)}, \quad (17)$$

причем это решение имеет физический смысл только в интервале  $1/6 < \theta^2 < 2/9$  ( $\theta > 0$ ).

Зависимости амплитуды  $A$  (сплошная линия) и ширины  $\Delta$  солитона (штриховая линия) от его скорости  $v$  представлены на рис. 2.

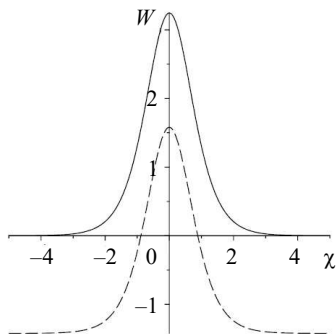


Рис. 1

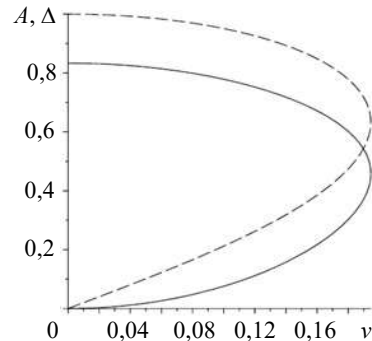


Рис. 2

При увеличении параметра  $\theta$  в пределах рассматриваемого интервала скорость солитона сначала увеличивается, затем уменьшается, амплитуда и ширина солитона при этом монотонно возрастают. Кривая  $v(\theta)$  имеет точку максимума, то есть скорость солитона ограничена сверху.

Знак безразмерного параметра  $d_2$  влияет на полярность солитона. Для положительных значений параметра (жесткая нелинейность) солитон имеет отрицательную полярность. Для отрицательных значений параметра (мягкая нелинейность) солитон имеет положительную полярность. Величина нелинейности не влияет на скорость распространения волн и их ширину, но влияет на их амплитуду: чем меньше величина нелинейности, тем больше амплитуда волны, то есть в слабонелинейных средах распространяются волны большей амплитуды.

## Заклучение

Метод альтернативной континуализации, предложенный ранее Х. Аскесом и А. Метрикиным для работы с линейно-упругими цепочками осцилляторов, обобщен на случай конечных деформаций и применен для получения нелинейной динамически непротиворечивой модели метаматериала (градиентно-упругой среды). В рамках полученной модели исследовано формирование в градиентно-упругих средах пространственно локализованных нелинейных волн, представляющих собой солитоны деформации и их периодические аналоги.

### Список литературы

1. Гуляев Ю.В., Лагарьков А.Н., Никитов С.А. Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения. *Вестник РАН*. 2008. Т. 78. №5. С. 438–457.
2. Zhu S., Zhang X. Metamaterials: artificial materials beyond nature. *National Science Review*. 2018. Vol. 5. No 2. P. 131. DOI: 10.1093/nsr/nwy026.
3. Бобровницкий Ю.И. Акустический метаматериал с необычными волновыми свойствами. *Акустический журнал*. 2014. Т. 60. №4. С. 347–355. DOI: 10.7868/S0320791914040017.
4. Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред. *Акустический журнал*. 2015. Т. 61. №3. С. 283–294. DOI: 10.7868/S0320791915030041.
5. Федотовский В.С. Пористая среда как акустический метаматериал с отрицательными инерционными и упругими свойствами. *Акустический журнал*. 2018. Т. 64. №5. С. 547–553. DOI: 10.1134/S0320791918050027.
6. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор). *Акустический журнал*. 2018. Т. 64. №5. С. 517–525.
7. Сидоров Л.Н., Юровская М.А., Борщевский А.Я. и др. *Фуллерены*. М.: Экзамен, 2005. 688 с.
8. Vaimova J.A., Rysaeva L.Kh., Dmitriev S.V., Lisovenko D.S., Gorodtsov V.A., Indeitsev D.A. Auxetic behaviour of carbon nanostructures. *Materials Physics and Mechanics*. 2017. Vol. 33. No 1. P. 1–11. DOI: 10.18720/MPM.3312017\_1.
9. Бланк В.Д., Левин В.М., Прохоров В.М., Буга С.Г., Дубицкий Г.А., Серебряная Н.Р. Упругие свойства ультратвердых фуллеритов. *ЖЭТФ*. 1998. Т. 114. №4. С. 1365–1374.
10. Буга С.Г. Физические свойства углеродных наноматериалов и легированных синтетических монокристаллов алмаза. *Дисс... доктора физ.-мат. наук*. М., 2011. 354 с.
11. Раков Э.Г. Материалы из углеродных нанотрубок. «Лес». *Успехи химии*. 2013. Т. 82. Вып. 6. С. 538–566.
12. Chen H., Roy A., Baek J.-B., Zhu L., Qu J., Dai L. Controlled growth and modification of vertically-aligned carbon nanotubes for multifunctional applications. *Materials Science and Engineering Reports*. 2010. Vol. 70. No 3-6. P. 63–91. DOI:10.1016/j.mser.2010.06.003.
13. Lan Y., Wang Y., Ren Z.F. Physics and applications of aligned carbon nanotubes. *Advances in Physics*. 2011. Vol. 60. Iss. 4. P. 553–678. DOI: 10.1080/00018732.2011.599963.
14. Los J., Zakharchenko K., Katsnelson M., Fasolino A. Melting temperature of grapheme. *Physical Review B*. 2015. Vol. 91. No 1. P. 045415-1–045415-7. DOI: 10.1103/PhysRevB.91.045415.
15. Ерофеев В.И., Павлов И.С. Механика и акустика метаматериалов: математическое моделирование, экспериментальные исследования, перспективы применения в машиностроении. *Проблемы прочности и пластичности*. 2021. Т. 83. №4. С. 391–414. DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-391-414.
16. Le Roux J. Etude geometrique de la torsion de la flexion, dans les deformations infinitesimales d'un milieu continu. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1911. Vol. 28. P. 523–579.
17. Le Roux J. Recherches sur la geometrie des deformations finies. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1913. Vol. 30. P. 193–245. DOI: 10.24033/asens.659.
18. Jaramillo T.J. A generalization of the energy function of elasticity theory. *Dissertation*. Department of Mathematics. University of Chicago. USA. 1929. 154 p.



19. Mindlin R.D. Microstructure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. No 7. P. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.
20. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 17. P. 85–112. DOI: 10.1007/BF00253050.
21. Метрикин А.В., Прохорова Ю.М. О выводе динамически-непротиворечивой модели градиентной теории упругости методом континуализации регулярной решетки. *Вестник Пермского государственного технического университета. Математическое моделирование систем и процессов*. 2006. №14. С. 133–141.
22. Askes H., Metrikine A.V. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2002. Vol. 21. No 4. P. 573–588.
23. Askes H., Metrikine A.V. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 2: Static and dynamic response. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2002. Vol. 21. Iss. 4. P. 589–596. DOI:10.1016/S0997-7538(02)01217-2.
24. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
25. Кудряшов Н.А. *Методы нелинейной математической физики*. Долгопродный: Интеллект, 2010. 368 с.

#### References

1. Gulyaev Yu.V., Lagar'kov A.N., Nikitov S.A. Metamaterials: basic research and potential applications. *Herald of the Russian Academy of Sciences*. 2008. Vol. 78. No 3. P. 268–278.
2. Zhu S., Zhang X. Metamaterials: artificial materials beyond nature. *National Science Review*. 2018. Vol. 5. No 2. P. 131. DOI: 10.1093/nsr/nwy026.
3. Bobrovnikskii Yu.I. An acoustic metamaterial with unusual wave properties. *Acoustical Physics*. 2014. Vol. 60. Iss. 4. P. 371–378. DOI: 10.1134/S1063771014040010.
4. Bobrovnikskii Yu.I. Models and general wave properties of two-dimensional acoustic metamaterials and media. *Acoustical Physics*. 2015. Vol. 61. Iss. 3. P. 255–264. DOI: 10.1134/S1063771015030045.
5. Fedotovskiy V.S. Poristaya sreda kak akusticheskiy metamaterial s otritsatelnyimi inertsiyami i upravimymi svoystvami [A porous medium as an acoustic metamaterial with negative inertial and elastic properties]. *Akusticheskiy zhurnal [Acoustical Physics]*. 2018. Vol. 64. Iss. 5. P. 547–553 (In Russian).
6. Bobrovnikskii Yu.I., Tomilina T.M. Sound absorption and metamaterials: A review. *Acoustical Physics*. 2018. Vol. 64. Iss. 5. P. 519–526.
7. Sidorov L.N., Yurovskaya M.A., Borshchevskiy A.Ya. et al. *Fullereny [Fullerenes]*. М.: Ekzamen Publ. 2005. 688 p. (In Russian).
8. Baimova J.A., Rysaeva L.Kh., Dmitriev S.V., Lisovenko D.S., Gorodtsov V.A., Indeitsev D.A. Auxetic behaviour of carbon nanostructures. *Materials Physics and Mechanics*. 2017. Vol. 33. No 1. P. 1–11. DOI: 10.18720/MPM.3312017\_1.
9. Blank V.D., Levin V.M., Prokhorov V.M., Buga S.G., Dubitsky G.A., Serebryanaya N.R. Uprugie svoystva ultratverdyykh fulleritov [Elastic properties of ultrahard fullerites]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki [Journal of Experimental and Theoretical Physics]*. 1998. Vol. 114. No 4. P. 1365–1374 (In Russian).
10. Buga S.G. Fizicheskie svoystva uglerodnykh nanomaterialov i legirovannykh sinteticheskikh monokristallov almaza [Physical properties of carbon nanomaterials and doped synthetic diamonds single crystals]. *Diss... doktora fiz.-mat. nauk [D. Sci. (Phys.&Math.) Dissertation]*. Moscow. 2011. 354 p. (In Russian).
11. Rakov E.G. Materialy iz uglerodnykh nanotrubok. “Les” [Materials made of carbon nanotubes. The carbon nanotube forest]. *Uspekhi khimii [Russian Chemical Reviews]*. 2013. Vol. 82. Iss. 6. P. 538–566 (In Russian).
12. Chen H., Roy A., Baek J.-B., Zhu L., Qu J., Dai L. Controlled growth and modification of vertically-aligned carbon nanotubes for multifunctional applications. *Mater. Sci. Eng., R*. 2010. Vol. 70. No 3-6. P. 63–91. DOI:10.1016/j.mser.2010.06.003.

13. Lan Y., Wang Y., Ren Z.F. Physics and applications of aligned carbon nanotubes. *Adv. Phys.* 2011. Vol. 60. Iss. 4. P. 553–678. DOI:10.1080/00018732.2011.599963.
14. Los J., Zakharchenko K., Katsnelson M., Fasolino A. Melting temperature of grapheme. *Physical Review B.* 2015. Vol. 91. No 1. P. 045415-1–045415-7. DOI: 10.1103/PhysRevB.91.045415.
15. Erofeev V.I., Pavlov I.S. Mekhanika i akustika metamaterialov: matematicheskoe modelirovanie, eksperimental'nye issledovaniya, perspektivy primeneniya v mashinostroenii [Mechanics and acoustics of metamaterials: mathematical modeling, experimental research, prospects for application in mechanical engineering]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2021. Vol. 83. No 4. P. 391–414 (In Russian).
16. Le Roux J. Etude geometrique de la torsion de la flexion, dans les deformations infinitesimales d'un milieu continu. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.* 1911. Vol. 28. P. 523–579.
17. Le Roux J. Recherches sur la geometrie des deformations finies. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.* 1913. Vol. 30. P. 193–245. DOI: 10.24033/asens.659.
18. Jaramillo T.J. A generalization of the energy function of elasticity theory. *Dissertation.* Department of Mathematics. University of Chicago. USA. 1929. 154 p.
19. Mindlin R.D. Microstructure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1964. Vol. 16. No 7. P. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.
20. Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stresses. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1964. Vol. 17. P. 85–112. DOI: 10.1007/BF00253050.
21. Metrikine A.V., Prokhorova Yu.M. O vyvode dinamicheskoi neprotivorechivoy modeli gradientnoy teorii uprugosti metodom kontinualizatsii regul'yarnoy reshetki [On the derivation of a dynamically consistent model of the gradient theory of elasticity by the regular lattice continuousization method]. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov [Perm National Research Technic University. Mathematical Modeling of Systems and Processes]*. 2006. No 14. P. 133–141 (In Russian).
22. Askes H., Metrikine A.V. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation. *Eur. J. Mech. A-Solid.* 2002. Vol. 21. No 4. P. 573–588.
23. Askes H., Metrikine A.V. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 2: Static and dynamic response. *Eur. J. Mech. A-Solid.* 2002. Vol. 21. Iss. 4. P. 589–596. DOI:10.1016/S0997-7538(02)01217-2.
24. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost [Waves in the Rods. Dispersion. Dissipation. Non-linearity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 208 p. (In Russian).
25. Kudryashov N.A. *Metody nelineynoy matematicheskoy fiziki [Methods of Nonlinear Mathematical Physics]*. Dolgoprudny. Intellekt Publ. 2010. 368 p. (In Russian).

**NONLINEAR LOCALIZED WAVE IN A METAMATERIAL,  
THE MATHEMATICAL MODEL OF WHICH IS OBTAINED  
BY THE METHOD OF ALTERNATIVE CONTINUALIZATION**

**Erofeev V.I., Kolesov D.A., Leonteva A.V.**

*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences – Branch  
of Federal Research Center “Institute of Applied Physics of the RAS”,  
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

A metamaterial is defined as a class of substances with a complex internal structure and unique physical and mechanical properties. As a rule, such a material is a complex periodic system, in the nodes of which there are not material points, but bodies of small but finite sizes, which have internal degrees of freedom. To describe metamaterials, gradient continua are often used, which are obtained by continuumizing the equations of motion of discrete lattices consisting of identical

masses and springs of different stiffness. However, it should be noted that the gradient continuum model must be dynamically consistent, i.e. stable and providing a finite rate of energy transfer, while in most gradient models the group velocity of waves increases indefinitely with frequency. To achieve dynamic consistency of the gradient continuum model, the continuum method proposed by A.V. Metrikine and H. Askes, the essence of which is the assumption of a non-local connection between the displacements of the lattice nodes and the resulting continuum (the method of alternative continualization). In this paper, this method is generalized to the case of finite deformations and applied to obtain a nonlinear dynamically consistent model of a metamaterial (gradient elastic medium). Within the framework of the obtained model, the formation of spatially localized nonlinear waves, which are strain solitons and their periodic analogs, in gradient-elastic media is studied. The sign of the dimensionless parameter, which is the ratio of the nonlinear addition to the spring stiffness to its linear stiffness, affects the polarity of the soliton. For positive values of the parameter (hard nonlinearity), the soliton has a negative polarity. For negative values of the parameter (soft nonlinearity), the soliton has a positive polarity. The magnitude of the nonlinearity does not affect the speed of wave propagation and their width, but affects their amplitude.

*Keywords:* wave dynamics, gradient elasticity, metamaterial, nonlinearity, localization.