УДК 539.3

УТОЧНЕННАЯ ТЕОРИЯ СРЕДНЕГО ИЗГИБА ТРЕХСЛОЙНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

С.А. Луканкин

Казань

Для исследования смешанных изгибных форм потери устойчивости [1] трехслойных сферических и цилиндрических оболочек с трансверсально-мягким заполнителем построена их уточненная нелинейная теория среднего изгиба при термосиловом нагружении. В рамках полученных уравнений несущие слои трехслойных оболочек считаются тонкими, а на толщину заполнителя ограничения не накладываются. Считается, что температурное поле меняется только по толщине пакета слоев, при этом законы распределения температурных полей по поперечным координатам несущих слоев и заполнителя отыскиваются из решения соответствующих уравнений теплопроводности при выполнении граничных условий на лицевых поверхностях оболочек и выполнении условий идеального теплового контакта между слоями.

1. Перемещения и деформации несущих слоев и заполнителя

Пусть пакет слоев трехслойной оболочки имеет несимметричную структуру и состоит из внешних несущих слоев толщиной $2h^{(k)}$ $(k=1,2)$ и слоя заполнителя толщиной $2h$. Отнеся срединную поверхность заполнителя σ к ее линиям главных кривизн (α^1, α^2), введем следующие обозначения: $\sigma^{(k)}$ – срединные поверхности нижнего $(k=1)$ и верхнего $(k=2)$ несущих слоев; $A_i, A_i^{(k)}, k_i, k_i^{(k)}$ $(i, k=1,2)$ – параметры Ламе и главные кривизны на поверхностях σ и $\sigma^{(k)}$ соответственно; z $(-h \le z \le h)$ и $z^{(k)}$ $(-h^{(k)} \le z^{(k)} \le h^{(k)})$ – координаты, отсчитываемые от срединных поверхностей σ и $\sigma^{(k)}$ в направлении единичной нормали $\mathbf{m}$ к σ. В принятых обозначениях для сферической оболочки имеют место формулы

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{R}, \quad k_1^{(k)} = k_2^{(k)} = \frac{1}{R - \delta_k (h + h^{(k)})}, \tag{1.1}$$

которые для цилиндрической оболочки переписываются в виде

$$k_1 = 0, \quad k_1^{(k)} = 0, \quad k_2 = k = \frac{1}{R}, \quad k_2^{(k)} = k^{(k)} = \frac{1}{R - \delta_k (h + h^{(k)})}. \tag{1.2}$$

Здесь через R обозначен радиус кривизны поверхности σ и введен символ δ_k, действующий по правилу $\delta_1 = -\delta_2 = 1$. В последующих выкладках для сохранения симметрии структуры выражений значения параметров Ламе конкретизировать не будем, однако будем полагать, что для сферической оболочки

$$(A_1, A_1^{(k)}) = \text{const}; \quad A_2 = A_2(\alpha^1); \quad A_2^{(k)} = A_2^{(k)}(\alpha^1), \tag{1.3}$$

а для цилиндрической

$$(A_i, A_i^{(k)}) = \text{const}. \tag{1.4}$$

В рамках выводимых уравнений ограничения на толщину заполнителя не накладываются, несущие же слои трехслойных оболочек в обоих случаях считаются тонкими. Для них выполняются условия $h^{(k)}k^{(k)} \sim \varepsilon$ и $1 + h^{(k)}k^{(k)} \sim 1$, где ε – некоторая малая по сравнению с единицей величина.

Для моделирования механики деформирования несущих слоев будем использовать модель Кирхгофа–Лява, согласно которой вектор перемещений точек этих слоев представляется в виде:

$$\mathbf{V}_z^{(k)} = \sum_{r=1}^{2} (u_r^{(k)} - z^{(k)}\omega_r^{(k)})\mathbf{e}_r^{(k)} + u_3^{(k)}\mathbf{m}^{(k)}, \tag{1.5}$$

где $\{\mathbf{e}_r^{(k)}, \mathbf{m}^{(k)} = \mathbf{m}\}$ – векторы координатного единичного базиса на $\sigma^{(k)}$; $u_r^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ – тангенциальные перемещения и прогибы указанных поверхностей. В этом случае компоненты тензора деформаций несущих слоев в рамках среднего изгиба определяются по формулам ($r = 1, 2$):

$$\varepsilon_{rr}^{(k)z} = \varepsilon_{rr}^{(k)} + z^{(k)}\kappa_{rr}^{(k)}, \quad \varepsilon_{r\bar{r}}^{(k)z} = \varepsilon_{r\bar{r}}^{(k)} + z^{(k)}\kappa_{r\bar{r}}^{(k)}, \tag{1.6}$$

$$2\varepsilon_{rr}^{(k)z} = 2e_{rr}^{(k)} + \omega_r^{(k)2}, \quad 2\varepsilon_{r\bar{r}}^{(k)z} = e_{r\bar{r}}^{(k)} + e_{\bar{r}\bar{r}}^{(k)} + \omega_r^{(k)}\omega_{\bar{r}}^{(k)}, \tag{1.7}$$

$$\kappa_{rr}^{(k)} = -A_r^{(k)-1}\partial_r\omega_r^{(k)} - \partial_{\bar{r}}A_r^{(k)}(A_r^{(k)}A_{\bar{r}}^{(k)})^{-1}\omega_{\bar{r}}^{(k)}, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} 2\kappa_{r\bar{r}}^{(k)} = &-A_r^{(k)-1}\partial_r\omega_{\bar{r}}^{(k)} + \partial_{\bar{r}}A_r^{(k)}(A_r^{(k)}A_{\bar{r}}^{(k)})^{-1}\omega_r^{(k)} - \\ &-A_{\bar{r}}^{(k)-1}\partial_{\bar{r}}\omega_r^{(k)} + \partial_r A_{\bar{r}}^{(k)}(A_r^{(k)}A_{\bar{r}}^{(k)})^{-1}\omega_{\bar{r}}^{(k)}, \end{aligned}$$

$$e_{rr}^{(k)} = A_r^{(k)-1}\partial_r u_r^{(k)} + \partial_{\bar{r}}A_r^{(k)}(A_r^{(k)}A_{\bar{r}}^{(k)})^{-1}u_{\bar{r}}^{(k)} + k_r^{(k)}u_3^{(k)}, \tag{1.9}$$

$$e_{r\bar{r}}^{(k)} = A_r^{(k)-1}\partial_r u_{\bar{r}}^{(k)} + \partial_{\bar{r}}A_r^{(k)}(A_r^{(k)}A_{\bar{r}}^{(k)})^{-1}u_r^{(k)},$$

$$\omega_r^{(k)} = A_r^{(k)-1}\partial_r u_3^{(k)} - k_r^{(k)}u_r^{(k)}, \quad \partial_r(\ldots) = \frac{d(\ldots)}{d\alpha^r}.$$

В записи соотношений (1.6)–(1.9) использован прием надчеркивания индекса, сокращающий запись: если $r = 1$, то $\bar{r} = 2$, и наоборот. Кинематические зависимости для несущих слоев сферической оболочки можно получить, положив в (1.6)–(1.9) $k_r^{(k)} = k^{(k)}$. Для цилиндрической оболочки учет в (1.6)–(1.9) равенств (1.2) и (1.4) приведет к заменам $k_1^{(k)} = 0$, $k_2^{(k)} = k^{(k)}$ и исключении слагаемых с сомножителями вида $\partial_r A_r^{(k)}$.

Для установления законов изменения полей перемещений, деформаций и напряжений по поперечной координате z заполнителя примем модель трансверсально-мягкого слоя [2], в рамках которой будем пренебрегать тангенциальными компонентами тензора напряжений заполнителя

$$\sigma_{ij}^{z} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \tag{1.10}$$

Тогда уравнения статического равновесия в напряжениях для случая однородной задачи запишутся в виде:

$$\partial_z (H_{zr}^2 H_{z\bar{r}} \sigma_{r3}^z) = 0 \quad (r = 1, 2), \tag{1.11}$$

$$\partial_z (H_{z1} H_{z2} \sigma_{33}^z) + \sum_{r=1}^{2} \partial_z (H_{z\bar{r}} \sigma_{r3}^z) = 0, \tag{1.12}$$

где для принятой системы координат введено обозначение для параметров Ламе в произвольной точке заполнителя на уровне z от его срединной поверхности

$$H_{zr} = A_r \rho_{zr}, \quad \rho_{zr} = (1 + zk_r) \quad (r = 1, 2). \tag{1.13}$$

Интегрирование по z уравнений (1.11) приводит к формулам для определения поперечных касательных напряжений заполнителя, которые в случае сферической оболочки записываются следующим образом:

$$\sigma_{r3}^z = \frac{q_r}{\rho_z^3}, \tag{1.14}$$

в случае цилиндрической оболочки эти напряжения определяются равенствами

$$\sigma_{13}^z = \frac{q_1}{\rho_z}, \quad \sigma_{23}^z = \frac{q_2}{\rho_z^2}. \tag{1.15}$$

Здесь $\rho_z = 1 + zk$, а $q_r = \sigma_{r3}^z \big|_{z=0}$ – поперечные касательные напряжения на уровне срединной поверхности (при $z = 0$).

Проводя последовательное интегрирование по z уравнения равновесия (1.12), получим формулы, определяющие поперечные нормальные напряжения в произвольной точке заполнителя сферической

$$\sigma_{33}^z = \frac{q_3}{\rho_z^2} - \frac{z}{\rho_z^3} \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial_r (A_{\bar{r}} q_r)}{A_r A_{\bar{r}}} \tag{1.16}$$

и цилиндрической оболочек

$$\sigma_{33}^z = \frac{q_3}{\rho_z} - z \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial_r q_r}{A_r \rho_z^r}. \tag{1.17}$$

Здесь, как и в (1.15), (1.16), $q_3 = \sigma_{33}^z \big|_{z=0}$ – поперечные нормальные напряжения при $z = 0$.

Используя соотношения обобщенного закона Гука, записанные с учетом гипотезы Дюгамеля–Неймана теории термоупругости (G_{r3}, E_3 – модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, $T^z = T^z(z)$ – закон изменения температуры по толщине заполнителя, α_3 – коэффициент теплового расширения материала заполнителя в направлении z и независящий от z)

$$\sigma_{r3}^z = G_{r3} \left[\frac{\partial_r u_3^z}{H_{zr}} + H_{zr} \partial_z \left(\frac{u_r^z}{H_{zr}} \right) \right], \quad \sigma_{33}^z = E_3 (\partial_z u_3^z - \alpha_3 T^z) \tag{1.18}$$

и проводя преобразования, порядок которых приводится в работе [3], получим формулы для вычисления напряжений q_3, компонент вектора перемещений точек заполнителя u_r^z, u_3^z ($r = 1, 2$) и линейных деформаций заполнителя ε_{33}^z в поперечном направлении. Если ввести обозначения для компонент вектора перемещения точек лицевых и срединной поверхностей заполнителя $u_3^{[k]} = u_3^z$ $(z = -\delta_k h)$, $u_r = u_r^z$ $(z = 0)$, то для указанных величин приходим к формулам:

$$q_3 = E_3 I^{(1)}(u_3^{[2]} - u_3^{[1]} - \beta) - I^{(2)} \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial_r (I_r^{(3)} q_r)}{A_r I_r^{(4)}}, \tag{1.19}$$

$$u_3^z = u_3^{[1]} + \lambda_z + I_r^{(5)}(u_3^{[2]} - u_3^{[1]} - \beta) - \frac{I^{(6)}}{E_3} \sum_{r=1}^{2} \frac{I_r^{(7)} \partial_r (I_r^{(8)} q_r)}{A_r I_r^{(9)}}, \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} u_r^z &= I_r^{(10)} u_r + \frac{q_r}{G_{r3}} I_r^{(11)} - z \frac{\partial_r u_3^{[1]}}{A_r} - \frac{I_r^{(12)}}{A_r} \partial_r (u_3^{[2]} - u_3^{[1]}) + \\ &+ \frac{1}{A_r E_3} \left[I_r^{(13)} \partial_r \left(I_r^{(14)} \partial_r (I_r^{(15)} q_r) \right) + I_r^{(16)} \partial_r \left(I_r^{(17)} \partial_r (I_r^{(18)} q_r) \right) \right], \end{aligned} \tag{1.21}$$

$$\varepsilon_{33}^z = I^{(19)}(u_3^{[2]} - u_3^{[1]} - \beta) - \frac{1}{E_3} \sum_{r=1}^{2} \frac{I_r^{(20)}}{A_r} \partial_r (I_r^{(21)} q_r) + \alpha_3 T^z . \tag{1.22}$$

В (1.19)–(1.22) для упрощения записи соотношений введены функции, принимающие для сферической оболочки значения:

$$\begin{gathered} I^{(1)} = \frac{\eta}{2h}, \quad I^{(2)} = \frac{kh^2}{\eta}, \quad I_r^{(3)} = I_r^{(4)} = A_{\bar r}, \quad I^{(5)} = \frac{\eta}{2h}\left(\frac{z+h}{\eta_z}\right), \\ I^{(6)} = \frac{kh^2}{\eta}\left(\frac{z+h}{\eta_z}\right)\left(\frac{(1-2hk)z^2 - 2kh^2 z - h^2}{2\eta_z^2}\right), \quad I_r^{(7)} = 1, \quad I_r^{(8)} = I_r^{(9)} = A_{\bar r}, \\ I_r^{(10)} = \rho_z, \quad I_r^{(11)} = \frac{k^2 z^3 + 3kz^2 + 3z}{3\rho_z^2}, \quad I_r^{(12)} = \frac{\rho_2(\rho_2 z^2 + 2hz)}{4h\rho_z}, \\ I_r^{(13)} = I_r^{(16)} = \frac{\eta z^3 - 3kh^2 z^2 - 3h^2 z}{6\eta\rho_z^2}, \quad I_r^{(14)} = I_r^{(17)} = \frac{1}{A_r A_{\bar r}}, \quad I_r^{(15)} = I_r^{(18)} = A_{\bar r}, \\ I^{(19)} = \frac{\eta}{2h\rho_z^2}, \quad I_r^{(20)} = \frac{1}{A_{\bar r}}\left(\frac{z}{\rho_z^3} + \frac{kh^2}{\eta\rho_z^2}\right), \quad I_r^{(21)} = A_{\bar r}. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Те же самые величины для заполнителя цилиндрической трехслойной оболочки будут равны:

$$I^{(1)} = \frac{k}{\Lambda}, \quad I^{(2)} = \frac{1}{k}, \quad I_1^{(3)} = 1 + M, \quad I_2^{(3)} = 1 + \frac{M}{\eta}, \quad I_r^{(4)} = 1,$$

$$I^{(5)} = \frac{\Lambda_z}{\Lambda}, \quad I^{(6)} = \frac{\Lambda_z}{k^2}, \quad I_1^{(7)} = M - M_z, \quad I_2^{(7)} = \frac{M_z}{\eta_z} - \frac{M}{\eta}, \quad I_r^{(8)} = I_r^{(9)} = 1,$$

$$I_1^{(10)}=1,\quad I_2^{(10)}=\rho_z,\quad I_1^{(11)}=\frac{\ln\rho_z}{k},\quad I_2^{(11)}=\frac{z(2+zk)}{2\rho_z},\quad I_1^{(12)}=\frac{\ln\rho_z+zk(\Lambda_z-1)}{\Lambda k},$$

$$I_2^{(12)}=\frac{zk(1-\ln\rho_1)-\ln\rho_z}{k\Lambda},\quad I_1^{(13)}=\frac{1}{A_1k^2}\left[M\left(\frac{\ln\rho_z+zk(\Lambda_z-1)}{k}\right)+\frac{kz(z+2h)}{2}\right],$$

$$I_2^{(13)}=\frac{1}{A_2k^2}\left[\frac{k(\rho_2z^2+2hz)}{2\eta_z}+\frac{M}{k\eta}(zk(1-\ln\rho_1)-\ln\rho_z)\right],\quad I_r^{(14)}=I_r^{(15)}=I_r^{(17)}=I_r^{(18)}=1,$$

$$I_1^{(16)}=\frac{1}{A_2k^2}\left[\frac{\ln\rho_z}{k}-\frac{z}{\rho_1}-\frac{M}{\eta}\left(\frac{\ln\rho_z+zk(\Lambda_z-1)}{k}\right)\right],$$

$$I_2^{(16)}=\frac{1}{A_1k^3}\left[M(zk(1-\ln\rho_1)-\ln\rho_z)+\rho_z\ln\rho_z-zk\rho_1\right],$$

$$I^{(19)}=\frac{k}{\Lambda\rho_z},\quad I_1^{(20)}=\frac{1+M}{k\rho_z}+\frac{z}{\rho_z},\quad I_2^{(20)}=\frac{z^2}{\rho_z}-\frac{1}{k\rho_z}\left(1+\frac{M}{\eta}\right),\quad I_r^{(21)}=1. \tag{1.24}$$

В соотношениях (1.23), (1.24) введены обозначения для геометрических величин:

$$\rho_k=1-\delta_k kh,\quad k=1,2,\quad \eta=\rho_1\rho_2,\quad \eta_z=\rho_1\rho_z,\quad \Lambda=\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right),\quad \Lambda_z=\ln\left(\frac{\rho_z}{\rho_1}\right),$$

$$M=\frac{\rho_1-\rho_2}{\Lambda},\quad M_z=\frac{\rho_1-\rho_z}{\Lambda_z},$$

а через β и λ_z обозначены температурные слагаемые

$$\beta=\int_{-h}^{h}\alpha_3T^z dz,\quad \lambda_z=\int_{-h}^{z}\alpha_3T^z dz. \tag{1.25}$$

2. Законы распределения температурных полей по толщине заполнителя и несущих слоев

В рамках сформулированных целей исследований будем считать, что температурное поле меняется только по толщине пакета слоев оболочек, оставаясь неизменным вдоль других пространственных координат. При этом для установления законов распределения температурных полей по поперечным координатам несущих слоев $T_z^{(k)}=T_z^{(k)}(z)$ $(k=1,2)$ и заполнителя $T_z=T_z(z)$ необходимо найти интегралы систем одномерных уравнений теплопроводности:

– *для сферической оболочки*

$$d_z(\rho_z^2 d_zT_z)=0,\quad d_z^2T_z^{(k)}=0\quad (k=1,2), \tag{2.1}$$

– *для цилиндрической оболочки*

$$d_z(\rho_z d_zT_z)=0,\quad d_z^2T_z^{(k)}=0\quad (k=1,2) \tag{2.2}$$

при удовлетворении граничных условий на лицевых поверхностях оболочек

$$T_z^{(1)}\Big|_{z^{(1)}=-h^{(1)}}=T_1,\quad T_z^{(2)}\Big|_{z^{(2)}=h^{(2)}}=T_2 \tag{2.3}$$

и выполнении условий идеального теплового контакта между слоями, сводящихся к равенству температур и тепловых потоков в направлении единой нормали пакета слоев:

$$T_z^{(2)}\Big|_{z^{(2)}=-h^{(2)}} = T_z\Big|_{z=h}, \quad T_z^{(1)}\Big|_{z^{(1)}=h^{(1)}} = T_z\Big|_{z=-h}, \tag{2.4}$$

$$\theta^{(1)} d_z T_z^{(1)}\Big|_{z^{(1)}=h^{(1)}} = \theta d_z T_z\Big|_{z=-h}, \quad \theta^{(2)} d_z T_z^{(2)}\Big|_{z^{(2)}=-h^{(2)}} = \theta d_z T_z\Big|_{z=h}. \tag{2.5}$$

В равенствах (2.1)–(2.5) через T_1, T_2 обозначены значения величин температур на лицевых поверхностях оболочек, а через θ, $\theta^{(k)}$ ($k = 1, 2$) – коэффициенты теплопроводности материалов заполнителя и несущих слоев соответственно. Решение указанной задачи приводит к следующим законам распределения температурных полей в поперечном направлении для заполнителя соответственно сферической и цилиндрической оболочек:

$$T_z = \frac{R/\eta(\rho_2 T_2 - \rho_1 T_1) + 2(\phi_1 T_2 + \phi_2 T_1)}{R\rho + 2(\phi_1 + \phi_2)} - \frac{1}{\rho_z}\frac{R(T_2 - T_1)}{R\rho + 2(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$(\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\eta, \quad \phi_k = \theta h^{(k)}/\theta^{(k)}\rho_k^2); \tag{2.6}$$

$$T_z = \frac{R(T_2 - T_1)}{R\Lambda + 2(\phi_1 + \phi_2)}\ln\rho_z + \frac{R(T_1 \ln\rho_2 - T_2 \ln\rho_1) + 2(\phi_1 T_2 + \phi_2 T_1)}{R\Lambda + 2(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$(\phi_k = \theta h^{(k)}/\theta^{(k)}\rho_k), \tag{2.7}$$

для несущих слоев

$$T_z^{(k)} = D_0^{(k)} z^{(k)} + D_1^{(k)} \quad (k = 1, 2), \tag{2.8}$$

где постоянные интегрирования вычисляются по формулам:

– *для сферической оболочки*

$$D_0^{(k)} = \frac{\phi_k}{h^{(k)}}\frac{T_2 - T_1}{R\rho + 2(\phi_1 + \phi_2)}, \quad D_1^{(k)} = \frac{T_k(R\rho + 2\phi_{\bar{k}}) + \phi_k(T_2 + T_1)}{R\rho + 2(\phi_1 + \phi_2)}; \tag{2.9}$$

– *для цилиндрической оболочки*

$$D_0^{(k)} = \frac{\phi_k}{h^{(k)}}\frac{T_2 - T_1}{R\Lambda + 2(\phi_1 + \phi_2)}, \quad D_1^{(k)} = \frac{T_k(R\Lambda + 2\phi_{\bar{k}}) + \phi_k(T_2 + T_1)}{R\Lambda + 2(\phi_1 + \phi_2)}. \tag{2.10}$$

В соответствии с (2.6) и (2.7) температурные слагаемые β из (1.28) для сферической и цилиндрической трехслойных оболочек будут соответственно определяться в виде:

$$\beta = \alpha_3\left[\frac{2hR/\eta(\rho_2 T_2 - \rho_1 T_1) + 4h(\phi_1 T_2 + \phi_2 T_1) - R^2\Lambda(T_2 - T_1)}{R\rho + 2(\phi_1 + \phi_2)}\right], \tag{2.11}$$

$$\beta = \alpha_3\left[\frac{4h(\phi_1 T_2 + \phi_2 T_1) + R(T_2 - T_1)(R\Lambda - 2h) + hR\Lambda(T_2 + T_1)}{R\Lambda + 2(\phi_1 + \phi_2)}\right]. \tag{2.12}$$

3. Обобщенное вариационное уравнение

Вариация потенциальной энергии деформации рассматриваемых оболочек определяется суммой

$$\delta U = \delta U^0 + \sum_{k=1}^{2} \delta U^{(k)}, \tag{3.1}$$

где δU^0, $\delta U^{(k)}$ – слагаемые, определяющие вариации потенциальной энергии деформации заполнителя и несущих слоев, которые в рамках используемых моделей вычисляются по формулам:

$$\delta U^0 = \iiint\limits_W \left(\sigma_{33}^z \delta\varepsilon_{33}^z + 2\sum_{r=1}^{2} \sigma_{r3}^z \delta\varepsilon_{r3}^z \right) dW, \tag{3.2}$$

$$\delta U^{(k)} = \iiint\limits_{W^{(k)}} \sum_{r=1}^{2} \left(\sigma_{rr}^z \delta\varepsilon_{rr}^z + \sigma_{r\bar{r}}^z \delta\varepsilon_{r\bar{r}}^z \right) dW^{(k)}. \tag{3.3}$$

Входящее в (3.2) первое слагаемое определяется равенством

$$\sigma_{33}^z \delta\varepsilon_{33}^z = E_3 (\varepsilon_{33}^z - \alpha_3 T^z) \delta\varepsilon_{33}^z, \tag{3.4}$$

а для вторых слагаемых, используя соотношения закона Гука $2\varepsilon_{r3}^z = \sigma_{r3}^z / G_{r3}$ и формулы (1.14) и (1.15), соответственно получим

$$\sum_{r=1}^{2} 2\sigma_{r3}^z \delta\varepsilon_{r3}^z = \frac{1}{\rho_z^6} \left(\frac{q_1}{G_{13}} \delta q_1 + \frac{q_2}{G_{23}} \delta q_2 \right) \tag{3.5}$$

– *для сферической оболочки*,

$$\sum_{r=1}^{2} 2\sigma_{r3}^z \delta\varepsilon_{r3}^z = \frac{q_1}{G_{13}\rho_z^2} \delta q_1 + \frac{q_2}{G_{23}\rho_z^4} \delta q_2 \tag{3.6}$$

– *для цилиндрической оболочки*.

Определяя область изменения гауссовых координат на поверхности σ в виде $\{(\alpha^1, \alpha^2) : \alpha_1^r \le \alpha^r \le \alpha_2^r, r = 1, 2\}$ (при этом будем считать, что граничные контуры получаемых таким образом сферического сегмента и цилиндрической панели совпадают с координатными линиями $\alpha^r = \alpha_m^r$ (r, m = 1, 2)) и используя для элемента объема формулу $dW = H_{z1} H_{z2} dz d\alpha^1 d\alpha^2$, с учетом установленных соотношений (1.19)–(1.25) и формул (1.13) вместо (3.2) запишем:

$$\delta U^0 = \sum_{r=1}^{2} \int\limits_{\alpha_1^r}^{\alpha_2^r} \int\limits_{\alpha_1^{\bar{r}}}^{\alpha_2^{\bar{r}}} \Bigg\{ [A_r A_{\bar{r}} q_r I_r^{(22)} + I_r^{(23)} \partial_r (I_r^{(24)} \partial_r (I_r^{(25)} q_r) + I_r^{(24)} \partial_{\bar{r}} (I_r^{(26)} q_{\bar{r}}))] \delta q_r +$$

$$+ \left[E_3 A_r A_{\bar{r}} I_r^{(27)} \left(\sum_{m=1}^{2} \delta_{\bar{m}} u_3^{[m]} - \beta \right) \right] \delta_{\bar{r}} \delta u_3^{[r]} \Bigg\} d\alpha^r d\alpha^{\bar{r}} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{2} \delta_{\bar{m}} \int\limits_{\alpha_1^{\bar{r}}}^{\alpha_2^{\bar{r}}} \left\{ I_r^{(28)} [\partial_r (I_r^{(25)} q_r) + \partial_{\bar{r}} (I_r^{(26)} q_{\bar{r}})] \delta q_r \right\} \Bigg|_{\alpha_m^r} d\alpha^{\bar{r}}, \tag{3.7}$$

где для сферического сегмента упрощающие запись функции определяются так:

$$I_r^{(22)} = \psi_r\,, \quad I_r^{(23)} = -I_r^{(25)} = -I_{\bar r}^{(26)} = A_{\bar r}\,, \quad I_r^{(24)} = I_r^{(26)} = \frac{\psi_3}{A_r A_{\bar r}},$$

$$I_r^{(27)} = \frac{\eta}{2h}, \quad I_r^{(28)} = A_r^{-1}\psi_3\,, \tag{3.8}$$

аналогичные величины для цилиндрической панели перепишутся в виде:

$$I_1^{(22)} = \frac{\Lambda}{kG_{13}}, \quad I_2^{(22)} = \frac{2h}{\eta^2 G_{13}}, \quad I_1^{(25)} = \frac{A_2}{A_1}Q_1\,, \quad I_2^{(25)} = \frac{A_1}{A_2\eta^2}Q_1\,, \quad I_r^{(26)} = Q_2\,,$$

$$I_r^{(27)} = \frac{k}{\Lambda}, \quad I_r^{(23)} = I_r^{(24)} = I_r^{(26)} = -I_r^{(28)} = 1. \tag{3.9}$$

В (3.7),(3.8) введены обозначения, связывающие геометрические и физико-механические параметры заполнителя:

$$Q_1 = \frac{1}{E_3 k^2}\frac{4h^2 k - 2h\Lambda}{\Lambda}, \quad Q_2 = \frac{1}{E_3 k^3}\frac{\eta\Lambda^2 - 4h^2k^2}{\eta\Lambda},$$

$$\psi_r = \frac{2h(3 + h^2k^2)}{3\eta^3 G_{r3}}, \quad \psi_3 = \frac{2h^3}{3\eta^3 E_3}.$$

Используя зависимости (1.6)–(1.9), (3.3), определим выражение для $\delta U^{(k)}$ – потенциальной энергии деформации k-го несущего слоя сферического сегмента:

$$\delta U^{(k)} = \sum_{r=1}^{2}\int\limits_{\alpha_1^r}^{\alpha_2^r}\int\limits_{\alpha_1^{\bar r}}^{\alpha_2^{\bar r}} \Big\{[-k^{(k)}A_r^{(k)}A_{\bar r}^{(k)}(T_{rr}^{(k)}\omega_r^{(k)} + T_{r\bar r}^{(k)}\omega_{\bar r}^{(k)}) + \partial_r A_{\bar r}^{(k)}T_{\bar r\bar r}^{(k)} - \partial_{\bar r}A_r^{(k)}T_{r\bar r}^{(k)} -$$

$$-\partial_r(A_{\bar r}^{(k)}T_{rr}^{(k)}) - \partial_{\bar r}(A_r^{(k)}T_{r\bar r}^{(k)})]\delta u_r^{(k)} + [A_r^{(k)}A_{\bar r}^{(k)}k^{(k)}T_{rr}^{(k)} - \partial_r[A_{\bar r}^{(k)}(T_{rr}^{(k)}\omega_r^{(k)} + T_{r\bar r}^{(k)}\omega_{\bar r}^{(k)}) +$$

$$+A_r^{(k)-1}\partial_r(A_{\bar r}^{(k)}M_{rr}^{(k)}) + A_r^{(k)-1}\partial_{\bar r}(A_r^{(k)}M_{r\bar r}^{(k)}) - A_r^{(k)-1}\partial_r A_{\bar r}^{(k)}M_{\bar r\bar r}^{(k)} +$$

$$+A_r^{(k)-1}\partial_{\bar r}A_r^{(k)}M_{r\bar r}^{(k)}]]\delta u_3^{(k)}\Big\}d\alpha^r d\alpha^{\bar r} +$$

$$+\sum_{m=1}^{2}\int\limits_{\alpha_1^{\bar r}}^{\alpha_2^{\bar r}}\delta_{\bar m}\Big\{[A_{\bar r}^{(k)}(T_{rr}^{(k)}\omega_r^{(k)} + T_{r\bar r}^{(k)}\omega_{\bar r}^{(k)}) + A_r^{(k)-1}\partial_r A(_{\bar r}^{(k)}M_{rr}^{(k)}) +$$

$$+A_r^{(k)-1}\partial_{\bar r}(A_r^{(k)}M_{r\bar r}^{(k)}) - A_r^{(k)-1}\partial_r A_{\bar r}^{(k)}M_{\bar r\bar r}^{(k)} + A_r^{(k)-1}\partial_{\bar r}A_r^{(k)}M_{r\bar r}^{(k)} + \partial_{\bar r}(M_{r\bar r}^{(k)})]\delta u_3^{(k)} -$$

$$-[A_{\bar r}^{(k)}M_{rr}^{(k)}]\delta\omega_r^{(k)} + [A_{\bar r}^{(k)}T_{rr}^{(k)}]\delta u_r^{(k)} +$$

$$+[A_{\bar r}^{(k)}T_{r\bar r}^{(k)}]\delta u_{\bar r}^{(k)}\Big\}\Big|_{\alpha_m^r} d\alpha^{\bar r} + \sum_{s=1}^{2}\delta_{\bar s}\delta_{\bar m}[-M_{r\bar r}^{(k)}]\delta u_3^{(k)}\Big|_{\alpha_m^r}\Big|_{\alpha_s^{\bar r}}. \tag{3.10}$$

Для цилиндрической панели указанное выражение может быть получено внесением в (3.10) равенств (1.2) и (1.4). В (3.10) введены внутренние усилия и моменты во внешних слоях $T_{ij}^{(k)}$, $M_{ij}^{(k)}$ $(i,j = 1, 2)$, приведенные к соответствующим срединным поверхностям, при этом учтено приближенное равенство $T_{ij}^{(k)} + k^{(k)} M_{ij}^{(k)} \approx T_{ij}^{(k)}$ $(i, j = 1, 2)$, справедливое для тонких оболочек.

В рамках рассматриваемой теории будем считать нагруженными внешними силами лишь несущие слои трехслойных оболочек, вводя в рассмотрение векторы заданных усилий и моментов, приведенные к срединным поверхностям $\sigma^{(k)}$:

$$\mathbf{X}^{(k)} = \sum_{r=1}^{2} X_r^{(k)} \mathbf{e}_r^{(k)} + X_3^{(k)} \mathbf{m}^{(k)}, \quad \mathbf{Y}^{(k)} = \sum_{r=1}^{2} Y_r^{(k)} \mathbf{e}_r^{(k)}, \tag{3.11}$$

и векторы заданных внешних контурных усилий и моментов

$$\mathbf{X}^{c(k)} = \sum_{r=1}^{2} X_r^{c(k)} \mathbf{e}_r^{(k)} + X_3^{c(k)} \mathbf{m}^{(k)}, \quad \mathbf{Y}^{c(k)} = \sum_{r=1}^{2} Y_r^{c(k)} \mathbf{e}_r^{(k)}. \tag{3.12}$$

Тогда вариации работ внешних сил на соответствующих перемещениях для сферического сегмента и цилиндрической панели (для панели в соответствующем выражении нужно учесть (1.2), (1.4)) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \delta A^{(k)} = {} & \sum_{r=1}^{2} \int_{\alpha_1^r}^{\alpha_2^r} \int_{\alpha_1^{\bar r}}^{\alpha_2^{\bar r}} \left\{ A_r^{(k)} A_{\bar r}^{(k)} F_r^{(k)} \delta u_r^{(k)} + \left[\frac{1}{2} A_r^{(k)} A_{\bar r}^{(k)} X_3^{(k)} + \partial_r (A_{\bar r}^{(k)} Y_r^{(k)}) \right] \delta u_3^{(k)} \right\} d\alpha^r d\alpha^{\bar r} + \\ & + \sum_{m=1}^{2} \int_{\alpha_1^{\bar r}}^{\alpha_2^{\bar r}} \Big\{ A_{\bar r}^{(k)} X_r^{c(k)} \delta u_r^{(k)} + A_{\bar r}^{(k)} F_{\bar r}^{c(k)} \delta u_{\bar r}^{(k)} - A_{\bar r}^{(k)} Y_r^{c(k)} \delta \omega_r^{(k)} + [\partial_{\bar r} Y_{\bar r}^{c(k)} + \\ & + A_{\bar r}^{(k)} X_3^{c(k)} - \delta_{\bar m} A_{\bar r}^{(k)} Y_r^{(k)}] \delta u_3^{(k)} \Big\} \Big|_{\alpha_m^r} d\alpha^{\bar r} + \sum_{s=1}^{2} \delta_{\bar s} [-Y_{\bar r}^{c(k)}] \delta u_3^{(k)} \Big|_{\alpha_m^r} \Big|_{\alpha_s^{\bar r}}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

где введены обозначения для обобщенных внешних усилий:

$$F_r^{(k)} = X_r^{(k)} + k^{(k)} Y_r^{(k)}, \quad F_r^{c(k)} = X_r^{c(k)} + k^{(k)} Y_r^{c(k)}. \tag{3.14}$$

Так как при построении кинематических соотношений не были учтены условия сопряжения внешних слоев с заполнителем по перемещениям, то для получения необходимой замкнутой системы основных уравнений теории в соответствии с работами [3, 4, 6] должно быть составлено обобщенное вариационное уравнение

$$\delta I = \delta I_q + \sum_{k=1}^{2} \delta A^{(k)} - \sum_{k=1}^{2} \delta U^{(k)} - \delta U^0 = 0. \tag{3.15}$$

Здесь условия кинематического сопряжения слоев по прогибам учитываются непосредственно, если предположить в выражении для δU^0 выполнение равенств

$$u_3^{[k]} = u_3^{(k)} \quad (k = 1, 2), \tag{3.16}$$

а появление в (3.16) слагаемого δI_q связано напрямую с выполнением кинематического сопряжения слоев оболочек по тангенциальным перемещениям

$$u_r^{(k)} - \delta_k h^{(k)} \omega_r^{(k)} = u_r^{[k]} \quad (k, r = 1, 2) \tag{3.17}$$

и является результатом учета в вариационном уравнении (3.16) указанного ограничения на функции тангенциальных перемещений методом множителей Лагранжа. В качестве множителей Лагранжа здесь выступают величины касательных напряжений на контактных поверхностях заполнителя и соответствующих несущих слоев σ_{r3}^{z} при $(z=\pm h)$ [5]. Определяя δI_q в виде (здесь $\sigma^{[k]}$ – поверхности контакта несущих слоев с заполнителем)

$$\delta I_q=\sum_{k,r=1}^{2}\delta\left[\iint_{\sigma^{[k]}}\left\{(u_r^{(k)}-\delta_k h^{(k)}\omega_r^{(k)}-u_r^{[k]})\sigma_{r3}^{z=-\delta_k h}\right\}d\sigma^{[k]}\right] \tag{3.18}$$

и учитывая при преобразовании последнего формулы (1.14), (1.15) и (1.21), можно прийти к следующей окончательной форме равенства (3.18), записанного в общей для сферического сегмента и цилиндрической панели форме:

$$\begin{aligned}\delta I_q=\sum_{r=1}^{2}\int_{\alpha_1^r}^{\alpha_2^r}\int_{\alpha_1^{\bar r}}^{\alpha_2^{\bar r}}&\left\{\sum_{k=1}^{2}\Big(\delta_k A_r A_{\bar r} q_r I_r^{(29)}\delta u_r^{(k)}+\partial_r\left[q_r A_{\bar r} I_r^{(30)}\right]\delta u_3^{(k)}\Big)+\right.\\&+\Big[2A_r A_{\bar r} q_r I_r^{(22)}+2I_r^{(23)}\partial_r\Big(I_r^{(24)}\partial_r(I_r^{(25)}q_r)+I_r^{(24)}\partial_{\bar r}(I_r^{(26)}q_{\bar r})\Big)+\\&\left.+\sum_{k=1}^{2}\Big(\delta_k A_r A_{\bar r} I_r^{(29)}u_r^{(k)}-A_{\bar r}I_r^{(30)}\partial_r u_3^{(k)}\Big)\Big]\delta q_r\right\}d\alpha^r d\alpha^{\bar r}+\\+\sum_{m=1}^{2}\delta_{\bar m}\int_{\alpha_1^{\bar r}}^{\alpha_2^{\bar r}}&\left\{-\sum_{k=1}^{2}\Big(\left[q_r A_{\bar r} I_r^{(30)}\right]\delta u_3^{(k)}\Big)+\Big[I_r^{(28)}\Big(\partial_r(I_r^{(25)}q_r)+\partial_{\bar r}(I_r^{(26)}q_{\bar r})\Big)\Big]\delta q_r-\right.\\&\left.\left.-\left[I_r^{(28)}q_r\right]\delta\Big[\partial_r(I_r^{(25)}q_r)+\partial_{\bar r}(I_r^{(26)}q_{\bar r})\Big]\right\}\right|_{\alpha_m^r}d\alpha^{\bar r},\end{aligned} \tag{3.19}$$

где для сферического сегмента

$$I_r^{(29)}=\frac{1}{\rho_k},\quad I_r^{(30)}=\left(\frac{h}{\eta}+\frac{h^{(k)}}{\rho_k^2}\right), \tag{3.20}$$

а для цилиндрической панели

$$I_1^{(29)}=1,\quad I_2^{(29)}=\frac{1}{\rho_k},\quad I_1^{(30)}=N^{(k)},\quad I_2^{(30)}=L^{(k)}. \tag{3.21}$$

В (3.21) через $N^{(k)}$ и $L^{(k)}$ обозначены следующие геометрические параметры:

$$N^{(k)}=h^{(k)}-\delta_k\frac{\rho_k\Lambda-2hk}{k\Lambda},\quad L^{(k)}=\frac{h^{(k)}}{\rho_k^2}+\delta_k\frac{\rho_{\bar k}\Lambda-2hk}{k\Lambda\eta}.$$

4. Уравнения равновесия, граничные условия и кинематические условия сопряжения

Внося в обобщенное вариационное уравнение (3.15) соотношения (3.7), (3.10), (3.13), (3.19) после преобразований, в силу произвольности вариаций $\delta u_r^{(k)}$, $\delta u_3^{(k)}$, δq_r $(k,r=1,2)$, получим систему разрешающих уравнений включающую в себя при $k,r=1,2$:

– систему шести дифференциальных уравнений равновесия

$$f_r^{(k)} = \delta_k I_r^{(29)} q_r A_r A_{\bar r} + A_r^{(k)} A_{\bar r}^{(k)} F_r^{(k)} + k_r^{(k)} A_r^{(k)} A_{\bar r}^{(k)} (T_{rr}^{(k)} \omega_r^{(k)} + T_{r\bar r}^{(k)} \omega_{\bar r}^{(k)}) -$$

$$-\partial_r A_{\bar r}^{(k)} T_{\bar r\bar r}^{(k)} + \partial_{\bar r} A_r^{(k)} T_{r\bar r}^{(k)} + \partial_r (A_{\bar r}^{(k)} T_{rr}^{(k)}) + \partial_{\bar r} (A_r^{(k)} T_{r\bar r}^{(k)}) = 0, \qquad (4.1)$$

$$f_3^{(k)} = \sum_{r=1}^{2} \Bigg[\frac{1}{2} A_r^{(k)} A_{\bar r}^{(k)} X_3^{(k)} + \partial_r (A_{\bar r}^{(k)} Y_r^{(k)}) - k_r^{(k)} A_r^{(k)} A_{\bar r}^{(k)} T_{rr}^{(k)} +$$

$$\delta_k \frac{E_3 I_r^{(27)} A_r A_{\bar r}}{2} \sum_{m=1}^{2} (\delta_{\bar m} u_3^{(m)} - \beta) + \partial_r [A_{\bar r}^{(k)} q_r I_r^{(30)} + A_{\bar r}^{(k)} (T_{rr}^{(k)} \omega_r^{(k)} + T_{r\bar r}^{(k)} \omega_{\bar r}^{(k)}) +$$

$$+ A_r^{-1} \partial_r (A_{\bar r} M_{rr}^{(k)}) + A_r^{-1} \partial_{\bar r} (A_r M_{r\bar r}^{(k)}) - A_r^{-1} \partial_r A_{\bar r} M_{\bar r\bar r}^{(k)} + A_r^{-1} \partial_{\bar r} A_r M_{r\bar r}^{(k)}] \Bigg] = 0; \qquad (4.2)$$

– два уравнения, имеющих смысл условий сопряжения внешних слоев и заполнителя по тангенциальным перемещениям

$$\mu_r = A_r A_{\bar r} q_r I_r^{(22)} + I_r^{(23)} \partial_r (I_r^{(24)} \partial_r (I_r^{(25)} q_r) + I_r^{(24)} \partial_{\bar r} (I_r^{(26)} q_{\bar r})) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} (\delta_k A_r A_{\bar r} I_r^{(29)} u_r^{(k)} - A_{\bar r} I_r^{(30)} \partial_r u_3^{(k)}) = 0; \qquad (4.3)$$

– граничные условия на контуре $\alpha^r = \alpha_m^r \, (m = 1, 2)$:

$$X_r^{c(k)} - \delta_{\bar m} T_{rr}^{(k)} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta u_r^{(k)} \neq 0, \quad F_{\bar r}^{c(k)} - \delta_{\bar m} T_{r\bar r}^{(k)} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta u_{\bar r}^{(k)} \neq 0, \qquad (4.4)$$

$$\sum_{s=1}^{2} [-\delta_{\bar m} A_{\bar s} q_s I_s^{(30)} + \partial_{\bar s} (Y_{\bar s}^{c(k)}) + A_{\bar s}^{(k)} X_3^{c(k)} - \delta_{\bar m} A_{\bar s}^{(k)} Y_s^{(k)} -$$

$$-\delta_{\bar m} (A_{\bar s}^{(k)} (T_{ss}^{(k)} \omega_s^{(k)} + T_{s\bar s}^{(k)} \omega_{\bar s}^{(k)}) + A_s^{-1} \partial_s (A_{\bar s} M_{ss}^{(k)}) + A_s^{-1} \partial_{\bar s} (A_s M_{s\bar s}^{(k)}) -$$

$$-A_s^{-1} \partial_s A_{\bar s} M_{\bar s\bar s}^{(k)} + A_s^{-1} \partial_{\bar s} A_s M_{s\bar s}^{(k)} + \partial_{\bar s} M_{s\bar s}^{(k)}] = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta u_3^{(k)} \neq 0,$$

$$\delta_{\bar m} M_{rr}^{(k)} - Y_r^{c(k)} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta \omega_{\text{к}}^{(k)} \neq 0, \qquad (4.5)$$

$$q_r = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta \Big[\partial_r (I_r^{(25)} q_r) + \partial_{\bar r} (I_r^{(26)} q_{\bar r}) \Big] \neq 0; \qquad (4.6)$$

– условия непрерывности контура в угловой точке (α_m^1, α_s^1) $(m, s = 1, 2)$

$$(\delta_{\bar m} M_{12}^{(k)} - Y_2^{(k)}) \Big|_{\alpha_m^1} \Big|_{\alpha_m^2} + (\delta_{\bar m} M_{21}^{(k)} - Y_1^{(k)}) \Big|_{\alpha_m^2} \Big|_{\alpha_m^1} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta u_3^{(k)} \neq 0. \qquad (4.7)$$

Механический смысл условий (4.6) подробно освещен в работах [3,4]. Следует заметить, что приведенные в этом разделе соотношения имеют общую форму записи как для сферического сегмента, так и для цилиндрической панели. Однако для последней в этих соотношениях необходимо учесть формулы (1.2) и (1.4), определяющие ее геометрические параметры.

5. Соотношения упругости для несущих слоев

Для внешних слоев, находящихся в условиях температурного воздействия в рамках модели Кирхгофа–Лява, имеют место соотношения обобщенного закона

Гука, записанные с учетом основной гипотезы теории термоупругости Дюгамеля–Неймана ($k, r = 1,2$):

$$\sigma_{rr}^{z(k)} = \sum_{s=1}^{2}\Big[E_{rrss}^{(k)}(\varepsilon_{ss}^{z(k)} - \alpha_{ss}^{(k)}T_z^{(k)}) + E_{rr\bar{s}\bar{s}}^{(k)}\varepsilon_{\bar{s}\bar{s}}^{z(k)}\Big],$$
$$\sigma_{r\bar{r}}^{z(k)} = \sum_{s=1}^{2}\Big[E_{r\bar{r}ss}^{(k)}(\varepsilon_{ss}^{z(k)} - \alpha_{ss}^{(k)}T_z^{(k)}) + E_{r\bar{r}\bar{s}\bar{s}}^{(k)}\varepsilon_{\bar{s}\bar{s}}^{z(k)}\Big], \tag{5.1}$$

где $E_{ijlm}^{(k)}$, $\alpha_{ii}^{(k)}$ ($i, j, l, m = 1,2$) – компоненты тензора упругих констант материала несущих слоев и компоненты тензора их температурных расширений. Считая жесткостные и температурные характеристики материала несущих слоев независимыми от поперечной координаты $z^{(k)}$, используя кинематические зависимости (1.6) и выражения для распределения температурных полей в несущих слоях (2.8)–(2.10), запишем соотношения упругости для внешних слоев в виде, справедливом как для несущих слоев сферического сегмента, так и для слоев цилиндрической трехслойной панели:

$$T_{rr}^{k} = \sum_{s=1}^{2} 2h^{(k)}\Big[E_{rrss}^{(k)}(\varepsilon_{ss}^{(k)} - \alpha_{ss}^{(k)}D_1^{(k)}) + E_{rr\bar{s}\bar{s}}^{(k)}\varepsilon_{\bar{s}\bar{s}}^{z(k)}\Big],$$
$$T_{r\bar{r}}^{k} = \sum_{s=1}^{2} 2h^{(k)}\Big[E_{r\bar{r}ss}^{(k)}(\varepsilon_{ss}^{(k)} - \alpha_{ss}^{(k)}D_1^{(k)}) + E_{r\bar{r}\bar{s}\bar{s}}^{(k)}\varepsilon_{\bar{s}\bar{s}}^{z(k)}\Big],$$
$$M_{rr}^{k} = \sum_{s=1}^{2} \frac{2}{3}h^{(k)3}\Big[E_{rrss}^{(k)}(\kappa_{ss}^{(k)} - \alpha_{ss}^{(k)}D_0^{(k)}) + E_{rr\bar{s}\bar{s}}^{(k)}\kappa_{\bar{s}\bar{s}}^{z(k)}\Big],$$
$$M_{r\bar{r}}^{k} = \sum_{s=1}^{2} \frac{2}{3}h^{(k)3}\Big[E_{r\bar{r}ss}^{(k)}(\kappa_{ss}^{(k)} - \alpha_{ss}^{(k)}D_0^{(k)}) + E_{r\bar{r}\bar{s}\bar{s}}^{(k)}\kappa_{\bar{s}\bar{s}}^{z(k)}\Big]. \tag{5.2}$$

С помощью кинематических соотношений (1.7)–(1.9) и соотношений упругости (5.2) уравнения равновесия и соответствующие им граничные условия могут быть выражены через искомые неизвестные теории – функции $u_r^{(k)}$, $u_3^{(k)}$, q_r ($k, r = 1,2$).

Литература

1. *Паймушин, В.Н.* Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) / В.Н. Паймушин // Механика твердого тела. – 2001. – № 2. – С. 148–162.

2. *Паймушин, В.Н.* О формах потери устойчивости трехслойных пластин и оболочек с внешними слоями из однородных и армированных материалов / В.Н. Паймушин, С.Н. Бобров // Механика композитных материалов. –1985. – №1. – С. 79–86.

3. *Иванов, В.А.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения докритического равновесия оболочек с трансверсально-мягкими заполнителями) / В.А. Иванов, В.Н. Паймушин // Изв. вузов. Математика. – 1994. – №11. – С. 29–42.

4. *Паймушин, В.Н.* Уточненная нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем при термосиловых воздействиях / В.Н. Паймушин / / Изв. вузов. Авиац. техника. – 1989. – №4. – С. 8–12.

5. *Паймушин, В.Н.* К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел / В.Н. Паймушин // ДАН СССР. – 1983. – Т. 273, №5. – С. 1083–1086.

6. *Паймушин, В.Н.* Нелинейная теория среднего изгиба трехслойных оболочек с дефек-

тами в виде участков непроклея / В.Н. Паймушин // Прикладная механика – 1987. – Т. 23, №11. – С. 32–38.

[28.07.2006]

REVISED THEORY OF AVERAGE BENDING OF THREE-LAYERED SPHERICAL AND CYLINDRICAL SHELLS WITH TRANSVERSALLY-SOFT AGGREGATE OF ARBITRARY THICKNESS UNDER THERMAL-POWER LOADING

S.A. Lukankin

A revised nonlinear theory of the average bending of the 3-layered spherical and cylindrical shells with some transversally-soft aggregate is developed for investigating mixed bending forms of stability loss (1) under the thermo -power loading. Within the scope of the equations obtained the carrier layers of the 3-layered shells are assumed thin, but the restrictions on the aggregate thickness are not imposed. It is also assumed, that a temperature field is changed only through the thickness of the layer pack and the distribution laws of the temperature fields along the lateral coordinates of both- the carrier layers and aggregate-are derived from solving the corresponding equations of heat conduction by satisfying boundary conditions on the facial shell surfaces and accomplishing the conditions of an ideal thermal contact between the layers.