УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34

О КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ С ДЕФОРМИРУЕМЫМ ШТАМПОМ*

Бабешко В.А.[1,2], **Евдокимова О.В.**[2], **Бабешко О.М.**[1]

[1]*Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация*
[2]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 06.12.2021

Представлен один из методов исследования поведения деформируемых штампов на деформируемом основании. В его основе лежит ранее опубликованный авторами универсальный метод моделирования, применяемый в граничных задачах для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Достоинством метода является возможность отказаться от решения сложных граничных задач для систем дифференциальных уравнений путем замены их на отдельные дифференциальные уравнения, среди которых самыми простыми являются уравнения Гельмгольца. С помощью комбинаций решений граничных задач для этого уравнения можно описывать поведение сложных решений многокомпонентных граничных задач, в том числе для трещин нового типа, формируемых объектами на деформируемом основании, и моделей наночастиц, находящихся на деформируемых многокомпонентных основаниях. Однако без умения решать контактные задачи для деформируемых штампов указанные модели не строятся. Смешанная задача приводится к решению интегрального уравнения Винера – Хопфа. Рассмотрены два случая: полосовой штамп большой ширины и полубесконечный штамп. В качестве модели деформируемого штампа принимается упакованный блочный элемент в виде решения уравнения Гельмгольца в указанной области. Механически его можно интерпретировать как мембрану, находящуюся на многослойной среде и занимающую область контакта. Комбинацией таких объектов можно описывать решения контактной задачи для плоских деформируемых объектов более сложной реологии, а также для трехмерных объектов. Наряду с доказательством построения точного решения рассматриваемой контактной задачи отмечается появление в процессе выполнения исследования неизвестных функционалов. В задачах с абсолютно твердым штампом они не возникают. Найден способ их определения и получено их аналитическое представление. Высказано предположение, что появление функционалов будет наблюдаться при решении других контактных задач с деформируемыми штампами. Обсуждаются особенности метода и полученных результатов.

Ключевые слова: контактная задача, блочный элемент, деформируемый штамп, интегральное уравнение Винера – Хопфа.

*Выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект №22-21-00129).

Введение

Исследованиями в области контактных задач занимались и продолжают заниматься многие известные ученые в связи с важной ролью таких задач в инженерной практике. Лишь небольшие примеры исследований в этой области приведены в публикациях [1–15]. Созданы пакеты прикладных программ для численного решения некоторых контактных задач, в том числе с деформируемым штампом. Однако практика показала, что одни численные методы не позволяют вскрывать тонкие особенности поведения взаимодействующих деформируемых тел, упуская важные природные и техногенные свойства и явления. К их числу, например, относятся обнаруженные путем точного решения граничных задач методом блочного элемента такие явления, как новый тип «стартовых» землетрясений. Другим примером является обнаружение локализаций контактных напряжений или перемещений в динамических контактных задачах. Ранее они не были описаны. Аналитические исследования контактных задач посвящены рассмотрению взаимодействий с абсолютно жестким штампом. В настоящей статье с применением нового разработанного авторами метода проводится анализ особенностей взаимодействия деформируемого основания с деформируемым объектом в виде полосы, описываемым граничной задачей для уравнений Гельмгольца. Решение этой задачи открывает возможность решения контактных задач с деформируемыми штампами сложной реологии. Заметим, что без решения этих задач не видно путей построения механических моделей самоорганизации и самосборки наночастиц, а также моделирования трещины нового типа в многокомпонентных средах.

Постановка задачи

Рассматривается многослойная среда, на ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось Ox_3 направлена по внешней нормали, оси Ox_1, Ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что штамп действует в области Ω ($A \le x_1 \le B$, $|x_2| \le \infty$).

При рассмотрении, например, среды, описываемой системой уравнений Ламе, предполагается, что в зоне контакта действует жесткий штамп без трения, то есть в зоне контакта действуют только нормальные напряжения. Вне штампа напряжения отсутствуют. Методом, описанным в [16], смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{A}^{B} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\, q(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1,x_2), \quad A \le x_1 \le B,\ |x_2| \le \infty,$$
$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1,\alpha_2)\exp\left(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\right) d\alpha_1 d\alpha_2. \qquad (1)$$

Здесь $q(x_1, x_2)$ – контактные напряжения под штампом, $f(x_1, x_2)$ – перемещения в зоне контакта, $k(x_1, x_2)$ – ядро интегрального уравнения, функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$ – преобразование Фурье ядра интегрального уравнения.

Задача состоит в рассмотрении случая деформируемого штампа. Ранее указанные задачи решались только численным методом. В результате оставались вне исследования некоторые особенности решений в динамических задачах. Кроме этого, численные методы оказывались либо малоэффективными, либо несостоятельными в случаях, когда границы постановки граничных задач уходят в бесконечность либо оказываются очень больших размеров. Именно для таких задач оказывается эффективным предложенный в настоящей статье метод. Он демонстрирует значительные различия как в методе решения задачи, так и в получаемом результате в сравнении со случаем жесткого штампа. Разработанный авторами подход [17] открыл возможность использовать «фракталы», то есть упакованные блочные элементы, являющиеся решениями достаточно простых граничных задач при исследовании граничных задач для многокомпонентных сред.

Решения сложных граничных задач представляются в виде комбинации фракталов. С учетом этой возможности в качестве деформируемого штампа принимаются фракталы – решения граничных задач в рассматриваемых областях, являющиеся упакованными блочными элементами для уравнения Гельмгольца.

Рассматриваются два случая: полоса вырождается в полуплоскость, случай A, и полоса имеет большую относительную ширину, случай B. Таким образом, необходимо построить в областях Ω_1 $(A \le x_1 \le \infty, |x_2| \le \infty)$ и Ω_2 $(-B \le x_1 \le B, |x_2| \le \infty)$, $B >> 1$ упакованные блочные элементы, которые будут рассматриваться как деформируемые штампы. Рассмотрим двумерное уравнение Гельмгольца в указанных областях:

$$[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + p^2]\varphi(x_1, x_2) = g(x_1, x_2), \quad g(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) - t(x_1, x_2). \qquad (2)$$

Здесь $\varphi(x_1, x_2)$ – вертикальные перемещения в зоне контакта; $q(x_1, x_2)$ – контактные напряжения, действующие на объект снизу, которые надо определить; $t(x_1, x_2)$ – заданные внешние воздействия сверху на объект. Кроме этого, задаются граничные условия, которые имеют для задачи A в области Ω_1 $(A \le x_1 \le \infty, |x_2| \le \infty)$ вид

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(A, x_2), \ \ x_1 \to A.$$

Для задачи B в области Ω_2 $(-B \le x_1 \le B)$ граничные условия следующие:

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(-B, x_2), \ \ x_1 \to -B; \quad \varphi(x_1, x_2) = \varphi(B, x_2), \ \ x_1 \to B.$$

Для обеих задач необходимо построить упакованные блочные элементы.

Построение интегральных уравнений

Способ построения интегральных уравнений изложен во многих публикациях авторов, например, в [16]. Поставленные двумерные задачи (1), (2) сводятся к одномерным задачам с вещественным параметром α_2 в результате применения преобразования Фурье по координате x_2. Тогда интегральное уравнение (1) принимает вид:

$$\int_A^B k_0(x_1 - \xi_1) q(\xi_1)\, d\xi_1 = f(x_1), \quad q(\xi_1) = q(\xi_1, \alpha_2), \quad k_0(x_1) = k(x_1, \alpha_2),$$

$$k_0(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\alpha_1) \exp(-i\alpha_1 x_1)\, d\alpha_1, \qquad (3)$$

$$K_0(\alpha_1) = K(\alpha_1, \alpha_2), \quad K_0(\alpha_1) = P_0^{-1}(\alpha_1) R_0(\alpha_1).$$

Для краткости считаем, что функция $K_0(\alpha_1)$ является четной, мероморфной и на бесконечности обладает асимптотическим поведением $K_0(\alpha_1) = O(\alpha_1^{-1})$, $\operatorname{Im}\alpha_1 = 0$.

Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений, построенные для смешанных задач на многослойной среде [16].

Для случая $B = \infty$ получается первая задача, обозначаемая индексом γ = A, в случае $A = -B$ будет вторая задача, γ = B. Такой подбор рассматриваемых задач не случаен. Он позволяет достаточно детально описать особенности задач с деформируемым штампом и сформировать метод решения этих задач для штампов со сложной реологией. Функция $K_0(\alpha_1)$ представляется отношением двух целых функций $R_0(\alpha_1)$ и $P_0(\alpha_1)$, имеющих счетные множества нулей, уходящих на бесконечность в окрестностях мнимых осей. Примеры смешанных задач, в которых встречаются подобные интегральные уравнения, имеются в многочисленных публикациях, например в [16].

Граничные задачи (2) для блочного элемента становятся одномерными:

$$\begin{gathered}(\partial^2 x_1 + k^2)\varphi(x_1) = g(x_1), \quad g(x_1) = q(x_1) - t(x_1), \quad k^2 = p^2 - \alpha^2, \\ \varphi(x_1) = \varphi(x_1, \alpha_2), \quad g(x_1) = g(x_1, \alpha_2), \\ \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(A), \quad x_1 \to A, \quad x_1 \in \Omega_1, \\ \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(-B), \quad x_1 \to -B, \quad \varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(B), \quad x_1 \to B, \quad x_1 \in \Omega_2.\end{gathered} \tag{4}$$

Применив к (4) метод блочного элемента [18], получим представление для упакованных блочных элементов.

В задаче А получаем внешнюю форму в виде

$$\begin{gathered}\omega_{\mathrm{A}}(\alpha_1) = i(\alpha_1 - k)\varphi_{\mathrm{A}}(A)\exp(i\alpha_1 A) + G_{\mathrm{A}}(k)\exp(i(\alpha_1 - k)A) - G_{\mathrm{A}}(\alpha_1), \\ G_{\mathrm{A}}(\alpha_1) = Q_{\mathrm{A}}(\alpha_1) - T_{\mathrm{A}}(\alpha_1), \quad \omega_{\mathrm{A}}(k) = 0, \\ G_{\mathrm{A}}(\alpha_1) = \int_A^\infty g_{\mathrm{A}}(x_1)\exp(i\alpha_1 x_1)\,d\alpha, \quad Q_{\mathrm{A}}(\alpha_1) = \int_A^\infty q_{\mathrm{A}}(x_1)\exp(i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1, \\ T_{\mathrm{A}}(\alpha_1) = \int_A^\infty t_A(x_1)\exp(i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1.\end{gathered}$$

В задаче В имеем:

$$\begin{gathered}\omega_{\mathrm{B}}(\alpha_1) = \Delta^{-1}\langle[\exp(-i\alpha_1 B)2ik(\exp(i(\alpha_1 - k)2B) - 1) + i(\alpha_1 - k)\exp(i\alpha_1 B)]\varphi_{\mathrm{B}}(B) + \\ + [\exp(i\alpha_1 B)2iz(-\exp - (i(\alpha_1 - k)2B) + 1) + i(\alpha_1 - k)\exp(-i\alpha_1 B)]\varphi_{\mathrm{B}}(-B) + \\ + G_{\mathrm{B}}(k)(-\exp(i(\alpha_1 + k)B) + \exp(-i(\alpha_1 + k)B) + G_{\mathrm{B}}(-k)(\exp(i(\alpha_1 - k)B) - \\ - \exp(-i(\alpha_1 - k)B)\rangle - G_{\mathrm{B}}(\alpha_1), \quad \Delta = -2i\sin(k2B), \\ G_{\mathrm{B}}(\alpha_1) = \int_{-B}^{B} g_{\mathrm{B}}(x_1)\exp(i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1, \quad Q_{\mathrm{B}}(\alpha_1) = \int_{-B}^{B} q_{\mathrm{B}}(x_1)\exp(i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1, \\ T_{\mathrm{B}}(\alpha_1) = \int_{-B}^{B} t_{\mathrm{B}}(x_1)\exp(i\alpha_1 x_1)\,d\alpha_1. \quad \omega_{\mathrm{B}}(\pm k) = 0.\end{gathered}$$

Вертикальные перемещения от блочных элементов имеют вид

$$\varphi_\gamma(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_\gamma(\alpha)}{\alpha^2 - k^2}\exp(-i\alpha x_1)\,d\alpha, \quad \gamma = \mathrm{A}, \mathrm{B}. \tag{5}$$

Для приведения смешанной граничной задачи к интегральному уравнению приравняем перемещения (3) $f_\gamma(x_1)$ в зоне контакта, составленные для многослойного основания, и перемещения упакованного блочного элемента (5) $\varphi_\gamma(x_1)$ в обеих задачах, предварительно применив к ним преобразование Фурье. Это дает соотношения:

$$K_0(\alpha_1)Q_\gamma(\alpha_1)+E_\gamma(\alpha_1)=-(\alpha_1^2-k^2)^{-1}Q_\gamma(\alpha_1)+S_\gamma(\alpha_1),$$
$$\gamma=\mathrm{A},\quad S_\mathrm{A}(\alpha_1)=(\alpha_1^2-k^2)^{-1}\langle i(\alpha_1-k)\varphi_\mathrm{A}(A)\exp(i\alpha_1 A)+T_\mathrm{A}(\alpha_1)-$$
$$-T_\mathrm{A}(k)\exp(i(\alpha_1-k)A)+Q_\mathrm{A}(k)\exp(i(\alpha_1-k)A)\rangle,$$
$$\gamma=\mathrm{B},\quad S_\mathrm{B}(\alpha_1)=(\alpha_1^2-k^2)^{-1}\langle\omega_\mathrm{B}(\alpha_1)+Q_\mathrm{B}(\alpha_1)\rangle.$$

Здесь $E_\gamma(\alpha_1)$ – часть поверхности границы многослойной среды, свободная от контакта. Объединив члены, содержащие преобразования Фурье контактных напряжений, и применив к этим равенствам обращение Фурье по параметру α_1, получаем два интегральных уравнения Винера – Хопфа:

$$\int\limits_{l(\gamma)}k(x_1-\xi_1)q_\gamma(\xi_1)\,d\xi_1=s_\gamma(x_1),\quad l(\mathrm{A})=[A\le x_1\le\infty],\quad l(\mathrm{B})=[-B\le x_1\le B],$$
$$k(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\alpha_1)\exp(-i\alpha_1x_1)\,d\alpha_1,\quad K(\alpha_1)=K_0(\alpha_1)+(\alpha_1^2-k^2)^{-1}. \tag{6}$$

Заметим, что оба уравнения содержат в правой части неизвестные функционалы $Q_\mathrm{A}(k)$, $Q_\mathrm{B}(k)$, $Q_\mathrm{B}(-k)$ решений интегральных уравнений, которые находятся после обращения интегральных уравнений. Это одна из особенностей, присущая контактным задачам для деформируемых штампов, представленных в виде упакованных блочных элементов. Указанные функции являются отношениями целых функций $K_0(\alpha_1)=P_0^{-1}(\alpha_1)R_0(\alpha_1)$, и добавление к ним убывающих рациональных функций не изменяет свойств мероморфных функций. Изменяются лишь величины нулей и полюсов, число которых возрастает. Таким образом, функции (6) остаются мероморфными. Для дальнейшего опишем свойства рассматриваемых мероморфных функций. Предполагается, что мероморфная функция $K_0(\alpha_1)$, являющаяся преобразованием Фурье-ядра, обладает следующими свойствами. Функции $R_0(\alpha_1)$ и $P_0(\alpha_1)$ имеют первый порядок и конечный тип целых функций, обладают счетными множествами нулей, которые предполагаются однократными, имеющими точки сгущения на бесконечности в окрестности мнимых полуосей. Асимптотическое представление нулей и полюсов верхней полуплоскости, свойственное многослойной среде, имеет вид [19]:

$$\xi_s=ir(s+0{,}5)(1+o(1)),\quad s\to\infty,\quad z_m=irm(1+o(1)),\quad r=\mathrm{const}>0. \tag{7}$$

В динамических смешанных задачах в числе первых нулей и полюсов в (7) могут быть вещественные числа [16]. Предполагается также, что для рассматриваемых интегральных уравнений на отрезке доказаны теоремы единственности и разрешимости в некоторых пространствах L_p. Ряд теорем единственности для интегральных уравнений статических и динамических задач имеется в [16].

Используя описанные нули, построим четные целые функции $R(\alpha_1)$ и $P(\alpha_1)$ в форме бесконечных произведений [19]. Последние будут иметь вид:

$$R(\alpha_1)=R_\mp(\alpha_1)R_\pm(\alpha_1),$$
$$R_\pm(\alpha_1)=T_\mp\exp(\mp i\alpha_1)\prod_{s=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{\alpha_1}{z_s}\right)\exp\left(\frac{\alpha_1}{\pm z_s}\right),\quad T_\mp=\mathrm{const},$$

$$P(\alpha_1) = P_{\mp}(\alpha_1)P_{\pm}(\alpha_1),$$

$$P_{\pm}(\alpha_1) = S_{\mp} \exp(\mp i\alpha_1)\prod_{s=1}^{\infty}\left(1 \pm \frac{\alpha_1}{\xi_s}\right)\exp\left(\frac{\alpha_1}{\pm\xi_s}\right), \quad S_{\mp} = \text{const}, \qquad (8)$$

которые после деления на $P(\alpha_1)$ дадут мероморфные функции, обозначенные $K(\alpha_1) = P^{-1}(\alpha_1)R(\alpha_1)$. Их нулями являются $\pm z_m$, а полюсами $\pm\xi_s$.

С помощью полученных функций (8) построим мероморфные функции следующего вида $K_{\pm}(\alpha_1) = P_{\pm}^{-1}(\alpha_1)R_{\pm}(\alpha_1)$, которые представляют результат интегральной факторизации функции $K(\alpha_1)$. Отдельно выделим свойство функций (8) $P_{0\pm}(\alpha_1) = (\alpha_1 \pm k)^{-1}P_{\pm}(\alpha_1)$.

Решения интегральных уравнений

Покажем, что интегральные уравнения разрешимы, корректно поставлены и позволяют найти все неизвестные функционалы в обеих задачах. Для решения в случае задачи А применим метод Винера – Хопфа [20]. Для этого продолжим его новой неизвестной функцией $e(x_1)$ в дополнении $-\infty \le x_1 \le A$ к зоне контакта на границе многослойной среды и получим функциональное уравнение в виде:

$$K(\alpha_1)Q_{\text{A}}^{+}(\alpha_1) = S_{\text{A}}^{+}(\alpha_1) + E_{\text{A}}^{-}, \quad S_{\text{A}}^{+}(\alpha_1) \equiv S_{\text{A}}(\alpha_1), \quad Q_{\text{A}}^{+}(\alpha_1) \equiv Q_{\text{A}}(\alpha_1).$$

После применения алгоритма метода Винера – Хопфа [20] построим представление решения, которое примет вид:

$$Q_{\text{A}}^{+}(\alpha_1) = K_{+}^{-1}(\alpha_1)\{K_{-}^{-1}(\alpha_1)S_{\text{A}}^{+}(\alpha_1)\}^{+}.$$

Здесь приняты обозначения, заимствованные из [16]:

$$\{R(\alpha_1)\}^{\pm} = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\xi)}{\xi - \alpha_1}d\xi, \quad \pm\operatorname{Im}\alpha_1 > 0. \qquad (9)$$

В результате несложных преобразований приходим к представлению решения задачи А в виде:

$$Q_{\text{A}}(\alpha_1) = Q_{\text{A}}(k)N_1(\alpha_1) + N_2(\alpha_1), \quad Q_{\text{A}}(\alpha_1) \equiv Q_{\text{A}}^{+}(\alpha_1),$$

$$N_1(\alpha_1) = P_{0+}(\alpha_1)(\alpha_1 + k)R_{+}^{-1}(\alpha_1)\{P_{0-}(\alpha_1)R_{-}^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1 + k)^{-1}\exp(i(\alpha_1 - k)A)\}^{+},$$

$$N_2(\alpha_1) = P_{0+}(\alpha_1)(\alpha_1 + k)R_{+}^{-1}(\alpha_1)\{P_{0-}(\alpha_1)(\alpha_1 - k)R_{-}^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} \times$$

$$\times\langle i(\alpha_1 - k)\varphi_{\text{A}}(A)\exp(i\alpha_1 A) + T_{\text{A}}(\alpha_1) - T_{\text{A}}(k)\exp(i(\alpha_1 - k)A)\rangle\}^{+}.$$

Из последнего соотношения при $\alpha_1 = k$ находится искомый функционал

$$Q_{\text{A}}(k) = [1 - N_1(k)]^{-1}N_2(k),$$

$$N_1(k) = 2kP_{0+}(k)R_{+}^{-1}(k)\{P_{0-}(\alpha_1)R_{-}^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1 + k)^{-1}\exp(i(\alpha_1 - k)A)\}_k^{+},$$

$$N_2(k) = 2kP_{0+}(k)kR_{+}^{-1}(k)\{P_{0-}(\alpha_1)(\alpha_1 - k)R_{-}^{-1}(\alpha_1)(\alpha_1^2 - k^2)^{-1} \times$$

$$\times\langle i(\alpha_1 - k)\varphi_{\text{A}}(A)\exp(i\alpha_1 A) + T_A(\alpha_1) - T_A(k)\exp(i(\alpha_1 - k)A)\rangle\}_k^{+}.$$

Окончательно решение принимает вид:

$$Q_{\text{A}}(\alpha_1) = [1 - N_1(k)]^{-1}N_2(k)N_1(\alpha_1) + N_2(\alpha_1),$$

где $\{R(\alpha_1)\}_k^{+}$ означает, что берется $\alpha_1 = k$ после вычисления интеграла (8).

Для решения задачи В воспользуемся подходом, опубликованным в [16].

Он применяется для построения асимптотического решения интегрального уравнения при $B >> 1$. В этом случае интегральное уравнение приводится к системе интегральных уравнений относительно функций $\varphi_1(\alpha_1)$, $\varphi_2(\alpha_1)$. Они являются продолжениями интегральных уравнений Винера – Хопфа с отрезка $[-B, B]$ на всю ось $|x_1| < \infty$. С их применением решение интегрального уравнения в преобразованиях Фурье представимо в виде:

$$Q_{\text{B}}(\alpha_1) = K^{-1}(\alpha_1)[F(\alpha_1) + \Phi_1(\alpha_1) + \Phi_2(\alpha_1)],$$

$$\Phi_1(\alpha_1) = \int_B^{\infty} \varphi_1(x_1) \exp(i\alpha_1 x_1))\, dx_1, \quad \Phi_2(\alpha_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x_1) \exp(i\alpha_1 x_1))\, dx_1.$$

Последние определяются из системы интегральных уравнений вида:

$$\Phi_-(\alpha) = -K_-(\alpha)\{K_-^{-1}(\alpha)\exp(i\alpha 2B)\Phi_+(\alpha)\}^- - K_-(\alpha)\{K_-^{-1}(\alpha)F_+\}^-,$$

$$\Phi_+(\alpha) = -K_+(\alpha)\{K_+^{-1}(\alpha)\exp-(i\alpha 2B)\Phi_-(\alpha)\}^+ - K_+(\alpha)\{K_+^{-1}(\alpha)F_-\}^+,$$

$$\Phi_2(\alpha_1)\exp(i\alpha_1 B) = \Phi_-(\alpha_1), \quad \Phi_1(\alpha_1)\exp(-i\alpha_1 B) = \Phi_+(\alpha_1),$$

$$F(\alpha_1)\exp(-i\alpha_1 B) = F_-(\alpha_1), \quad F(\alpha_1)\exp(i\alpha_1 B) = F_+(\alpha_1).$$

Правые части системы интегральных уравнений стремятся к нулю при $B \to \infty$. При некотором большом B норма операторов в правых частях в пространстве непрерывных с весом функций становится меньше единицы [16], в результате уравнения решаются с необходимой точностью методом последовательных приближений. Асимптотическое при $B >> 1$ решение, трансформированное к обозначениям настоящей статьи, имеет вид:

$$Q_{\text{B}}(\alpha_1) = Q_1(\alpha_1) + Q_2(\alpha_1) + Q_3(\alpha_1) + S_{0\text{B}}(\alpha_1).$$

Здесь приняты обозначения

$$Q_1(\alpha_1) = -\langle Q_{\text{B}}(k)\sin(\alpha_1 + k)B + Q_{\text{B}}(-k)\sin(\alpha_1 - k)B\rangle 2iM_1(\alpha_1),$$

$$Q_2(\alpha_1) = \langle Q_{\text{B}}(k)\{M_3(\alpha_1)\sin(\alpha_1 + k)B\}^+ +$$

$$+ Q_{\text{B}}(-k)\{M_3(\alpha_1)\sin(\alpha_1 - k)B\}^+\rangle 2i(\alpha_1 - k)M_2(\alpha_1),$$

$$Q_3(\alpha_1) = \langle Q_{\text{B}}(k)\{M_5(\alpha_1)\sin(\alpha_1 + k)B\}^- +$$

$$+ Q_{\text{B}}(-k)\{M_5(\alpha_1)\sin(\alpha_1 - k)\}B\}^-\rangle 2i(\alpha_1 + k)M_4(\alpha_1),$$

$$M_1(\alpha_1) = \frac{P_{0-}(\alpha_1)P_{0+}(\alpha_1)}{R_-(\alpha_1)R_+(\alpha_1)}, \quad M_2(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1 - k)P_{0-}(\alpha_1)\exp(i\alpha_1 B)}{R_-(\alpha_1)},$$

$$M_3(\alpha_1) = \frac{P_{0+}(\alpha_1)\exp(-i\alpha_1 B)}{R_+(\alpha_1)(\alpha_1 - k)},$$

$$M_4(\alpha_1) = \frac{(\alpha_1 + k)P_{0+}(\alpha_1)\exp(-i\alpha_1 B)}{R_+(\alpha_1)}, \quad M_5(\alpha_1) = \frac{P_{0-}(\alpha_1)\exp(i\alpha_1 B)}{R_-(\alpha_1)(\alpha_1 + k)},$$

Опуская достаточно простые, но громоздкие вычисления, подобные выполненным в задаче А, получаем значения функционалов также и в задаче В в форме:

$$Q_{\text{B}}(k) = \Delta_{\text{B}}^{-1}[S_{0\text{B}}(-k)C_{13}(k) - S_{0\text{B}}(k)D_{22}(-k)],$$

$$Q_{\text{B}}(-k) = \Delta_{\text{B}}^{-1}[S_{0\text{B}}(-k)D_{11}(k) + S_{0\text{B}}(k)C_{23}(-k)],$$

$$\Delta_B = D_{11}(k)D_{22}(-k) - C_{13}(k)C_{23}(-k)].$$

Функции C_{mn}, D_{mn}, Δ_B существуют и выражаются через введенные функции M_r. Внося значения найденных функционалов в правые части полученных решений интегральных уравнений, найдем решения смешанных задач, зависящие только от внешних воздействий и заданных граничных условий на границах полосы. Применив двойное обращение Фурье к построенному решению, получим решение трехмерной смешанной задачи.

Заключение

Показана универсальность фрактального метода при решении не только однородных, но и смешанных граничных задач. Особенность его применения к последним состоит в решении интегральных уравнений, содержащих в правых частях функционалы от решений, которые определяются после получения решения интегральных уравнений. Далее с его помощью строятся уравнения для определения функционалов путем внесения в них аргументов функционалов. Из этих уравнений находятся значения функционалов. Для завершения решения смешанных задач функционалы вносятся в правые части построенных решений интегральных уравнений.

Список литературы

1. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proceedings of the Royal Society A. Mathematical Physical and Engineering Sciences*. 2015. Vol. 471. Iss. 2180. Article No. 20150271. DOI: 10.1098/rspa.2015.0271.

2. Zhou S., Gao X.L.: Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik.* 2013. Vol. 64. Iss. 1. P. 145–166. DOI: 10.1007/s00033-012-0205-0.

3. Almqvist A. *An LCP Solution of the Linear Elastic Contact Mechanics Problem*. 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.3960.7200.

4. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2015. Vol. 22. P. 508–519. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2014.08.012.

5. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I – Theory. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. Iss. 18. P. 2349–2362. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00154-6; Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II – Examples. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 35. Iss. 18. P. 2363–2378. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00155-8.

6. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2007. Vol. 49. P. 161–182.

7. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded naterials. *European Journal of Mechanics A-Solids*. 2007. Vol. 26. P. 171–188. DOI: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2006.05.007.

8. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*. 2007. Vol. 40. Iss. 4. P. 574–579. DOI: 10.1016/j.triboint.2005.11.008.

9. Andersson L.-E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Applied Mathematics and Optimization*. 2000. Vol. 42. Iss. 2. P. 169–202. DOI: 10.1007/s002450010009.

10. Cocou M., Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2000. Vol. 34. No 5. P. 981–1001. DOI: 10.1051/M2AN:2000112.

11. Kikuchi N., Oden J. Contact Problems in Elasticity: *A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Philadelphi: SIAM, 1988. 510 p.

12. Raous M., Cangérmi L., Cocu M. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1999. Vol. 177. Iss. 3-4. P. 383–399. DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00389-2.

13. Shillor M., Sofonea M., Telega J.J. *Models and Analysis of Quasistatic Contact. Lect. Notes Phys*. Berlin–Heidelberg: Springer, 2004. 262 p.

14. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2007. Vol. 49. Iss. 2. P. 161–182. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006.

15. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2007. Vol. 26. Iss. 1. P. 171–188. DOI: 10. 1016/J.EUROMECHSOL.2006.05.007.

16. Ворович И.И., Бабешко В.А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М.: Наука, 1979. 320 с.

17. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Докл. РАН*. 2021. Т. 499. №1. С. 30–35. DOI: 9.31857/S2686740021040039.

18. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О стадиях преобразования блочных элементов. *Докл. РАН*. 2016. Т. 468. №2. С. 154–158. DOI: 10.7868/S0869565216140085.

19. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций*. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

20. Нобл Б. *Метод Винера – Хопфа*. М.: ИЛ. 1962. 280 с.

References

1. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture Mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.* 2015. Vol. 471. Iss. 2180. Article No 20150271. DOI: 10.1098/rspa.2015.0271.

2. Zhou S., Gao X.L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Z. Angew. Math. Phys*. 2013. Vol. 64. Iss. 1. P. 145–166. DOI: 10.1007/s00033-012-0205-0.

3. *Almqvist A. An LCP Solution of the Linear Elastic Contact Mechanics Problem*. 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.3960.7200.

4. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2015. Vol. 22. P. 508–519. DOI:10.1016/j.nonrwa. 2014.08.012.

5. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I – Theory. *Int. J. Solids Struct*. 1998. Vol. 35. Iss. 18. P. 2349–2362. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00154-6; Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II – Examples. *Int. J. Solids Struct*. 2007. Vol. 35. Iss. 18. P. 2363–2378. DOI: 10.1016/S0020-7683(97)00155-8.

6. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci*. 2007. Vol. 49. P. 161–182.

7. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded naterials. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2007. Vol. 26. P. 171–188. DOI: 10.1016/J.EUROMECHSOL. 2006.05.007.

8. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribol. Int*. 2007. Vol. 40. Iss. 4. P. 574–579. DOI: 10.1016/j.triboint. 2005.11.008.

9. Andersson L.-E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Appl. Math. Optim*. 2000. Vol. 42. Iss. 2. P. 169–202. DOI: 10.1007/s002450010009.

10. Cocou M., Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Model. Numer. Anal.* 2000. Vol. 34. No 5. P. 981–1001. DOI: 10.1051/ M2AN:2000112.

11. Kikuchi N., Oden J. Contact Problems in Elasticity: *A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Philadelphi. SIAM. 1988. 510 p.

12. Raous M., Cangérmi L., Cocu M. A consistent model coupling adhesion, friction, and

unilateral contact. *Comput. Method Appl. M*. 1999. Vol. 177. Iss. 3-4. P. 383–399. DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00389-2.

13. Shillor M., Sofonea M., Telega J.J. *Models and Analysis of Quasistatic Contact. Lect. Notes Phys*. Berlin. Heidelberg. Springer. 2004. 262 p.

14. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci*. 2007. Vol. 49. Iss. 2. P. 161–182. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006.

15. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2007. Vol. 26. Iss. 1. P. 171–188. DOI: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2006.05.007.

16. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [*Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains*]. Moscow. Nauka Publ. 1979. 320 p. (In Russian).

17. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Physics*. 2021. Vol. 66. Iss. 8. P. 218–222.

18. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. *Stages of transformation of block elements*. *Doklady Physics*. 2016. Vol. 61. Iss. 5. P. 227–231. DOI: 10.1134/S1028335816050049.

19. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskikh funktsiy* [*Theory of Analytic Functions*]. Vol. 2. Moscow. Nauka Publ. 1968. 624 p. (In Russian).

20. Noble B. *Methods Based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*. London. New York. Paris. Los Angeles. Pergamon Press. 1958. 246 p.

ON CONTACT PROBLEMS WITH DEFORMABLE STAMP

Babeshko V.A.[1,2], Evdokimova O.V.[2], Babeshko O.M.[1]

[1]*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*
[2]*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

This paper presents one of the methods for studying the behavior of deformable stamps on a deformable base. It is based on a new universal modeling method previously published by the authors, used in boundary value problems for systems of partial differential equations. Its advantage is the possibility of avoiding the need to solve complex boundary value problems for systems of differential equations by replacing them with separate differential equations, among which the Helmholtz equations are the simplest. With the help of combinations of solutions of boundary value problems for this equation, it is possible to describe the behavior of complex solutions of multicomponent boundary value problems, including for cracks of a new type formed by objects on a deformable base, and models of nano particles located on deformable multicomponent bases. However, without the ability to solve contact problems for deformable stamps, these models are not built. The mixed problem is reduced to the solution of the Wiener–Hopf integral equation. Two cases are considered: the case of a large-width strip stamp and the case of a semi-infinite stamp. A packed block element is accepted as a deformable stamp, as a solution of the Helmholtz equation in the specified area. Mechanically, it can be imitated as a membrane that is located on a multilayer medium occupying the contact area. A combination of such objects can be used to describe solutions to the contact problem for flat deformable objects of more complex rheology, as well as for three-dimensional ones. Along with the proof of constructing an exact solution to the contact problem under consideration, the appearance of unknown functionals is noted in the course of the study. In problems with an absolutely solid stamp, they do not occur. The paper finds a way to determine them and an analytical representation of them is obtained. It is suggested that their appearance will be typical for solving other contact problems with deformable stamps. The features of the method and the results obtained are discussed.

Keywords: contact problem, block element, deformable stamp, the Wiener–Hopf integral equations.