

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-5-14

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ
В ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ
С ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ***

© 2022 г.

**Коровайцева Е.А.¹, Пшеничнов С.Г.¹,
Бажлекова Е.², Желязов Т.³**

¹*НИИ механики Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

²*Институт математики и информатики Болгарской академии наук,
София, Болгария*

³*Технический университет Софии, София, Болгария*

katrell@mail.ru

Поступила в редакцию 01.02.2022

Построено решение нестационарной динамической задачи для линейно-вязкоупругого однородного бесконечно длинного цилиндра с жестким осевым включением, подверженного воздействию осесимметричной радиальной нагрузки, равномерно распределенной вдоль образующей. На поверхности контакта с жестким включением перемещения равны нулю. Наследственные свойства материала цилиндра учитываются с помощью линейного интегрального соотношения Больцмана – Вольтерра, а коэффициент Пуассона материала считается не зависящим от времени. К исходной задаче применено интегральное преобразование Лапласа по времени и проведен анализ решения в изображениях. В случае, когда наследственное ядро является экспоненциальным двухпараметрическим, оригиналы перемещения и напряжений построены в форме рядов. Получены асимптотические формулы для напряжений за фронтом, впервые пришедшим от нагруженной границы. Построенное решение нестационарной задачи справедливо во всем диапазоне изменения времени и не требует, чтобы вязкость была малой. С помощью построенного решения для случая экспоненциального ядра релаксации проведены исследования волнового процесса в поперечном сечении цилиндра при различных исходных данных. Установлено, что в случае сжимающей внешней нагрузки на границе контакта с жестким включением в определенные моменты времени возникают существенные растягивающие напряжения. Они уменьшаются с ростом параметра, характеризующего вязкость материала. При ступенчатом изменении во времени внешней нагрузки исследована зависимость максимальных растягивающих напряжений на границе с жестким включением от относительного радиуса включения и параметра вязкости материала.

*Выполнено в рамках двустороннего проекта при финансовой поддержке РФФИ (проект №20-58-18002) и Национального научного фонда Болгарии (проект № КР-06-Russia/5 от 11.12.2020).

Ключевые слова: вязкоупругое тело, нестационарный волновой процесс, ядра релаксации, волны в цилиндре, преобразование Лапласа.

Введение

Важным направлением в области изучения волновых процессов в вязкоупругих телах являются аналитические и численно-аналитические исследования. Публикации, внесшие существенный вклад в развитие этого направления, появились несколько десятилетий назад [1–6]. В последующие годы аналитические методы в этой области продолжали разрабатываться [7–10], в том числе в сочетании с численными методами. Примером такого сочетания является метод граничных интегральных уравнений [11], с помощью которого исследовались динамические процессы в вязкоупругих средах [12]. В последнее время появляются публикации по динамике вязкоупругих конструкций в рамках моделей с операторами дробного порядка [13–15] и развиваются методы исследования динамики вязкоупругих тел из материала с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетика) [15]. Заметим, что в большинстве работ одной из основных операций, помимо прочего, является интегральное преобразование Лапласа по времени.

Следует подчеркнуть особую роль экспериментальных и теоретических исследований, посвященных идентификации параметров модели вязкоупругого материала при динамических процессах [16]. Отметим статьи последнего периода, посвященные изучению гармонических волн в средах с вязкоупругими свойствами [17] и динамике вязкоупругих тонкостенных конструкций [18–20]. Вместе с тем, несмотря на достижения в рассматриваемой области, известные результаты не являются исчерпывающими. Построение решений динамических задач вязкоупругости в форме, удобной для анализа и проведения расчетов, по-прежнему актуально.

Цель настоящей статьи – исследование переходных волновых процессов в линейно-вязкоупругом цилиндре с жестким осевым включением на основе решения соответствующей начально-краевой задачи. Выражение для перемещения в такой задаче (как пример без пояснений) приводилось ранее [21], однако здесь обсуждается построение решения и анализируется волновой процесс при разных исходных данных.

1. Постановка задачи

Рассмотрим изначально покоящийся бесконечно длинный линейно-вязкоупругий цилиндр, внутренняя поверхность которого непрерывно контактирует с абсолютно жестким коаксиальным включением, а внешняя, начиная с момента $t = 0$, подвержена воздействию равномерно распределенной радиальной нагрузки $P(t)$ (рис. 1).

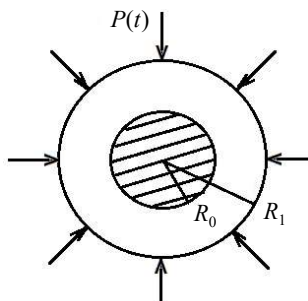


Рис. 1. Схема нагружения поперечного сечения

Вязкоупругие свойства материала будем учитывать в рамках линейной модели Больцмана – Вольтерра, считая, что коэффициент Пуассона не зависит от времени: $\nu \equiv \nu_0$, и, значит, вязкость характеризуется одним ядром релаксации $T(t)$.

Используя полярную систему координат R, θ с началом в центре поперечного сечения цилиндра, введем безразмерные величины:

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{R_1}, \quad r_0 = \frac{R_0}{R_1}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad u(r, \tau) = \frac{u_R(R, t)}{R_1}, \\ \sigma_1(r, \tau) &= \frac{\sigma_{RR}(R, t)}{2\mu_0}, \quad \sigma_2(r, \tau) = \frac{\sigma_{\theta\theta}(R, t)}{2\mu_0}, \quad P_0 f(\tau) = \frac{P(t)}{2\mu_0}, \\ \gamma(\tau) &= t_0 T(t), \quad w = \frac{1 - \nu_0}{1 - 2\nu_0}, \end{aligned}$$

где $t_0 = R_1/c$; R_0, R_1 – внутренний и внешний радиусы цилиндра; $c = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)}/\rho$ – скорость продольных упругих волн; u_R – радиальное перемещение; $\sigma_{RR}, \sigma_{\theta\theta}$ – радиальное и кольцевое напряжения; P_0 – безразмерная константа; λ_0, μ_0 – упругие коэффициенты Ламе; ρ – плотность.

Математическая постановка задачи включает в себя уравнение динамики

$$(1 - \hat{\gamma}) \left[u'(r, \tau) + \frac{u(r, \tau)}{r} \right]' = \ddot{u}(r, \tau), \quad (1)$$

определяющие соотношения для напряжений с оператором $\hat{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \sigma_1(r, \tau) &= (1 - \hat{\gamma}) \left[wu'(r, \tau) + (w - 1) \frac{u(r, \tau)}{r} \right], \\ \sigma_2(r, \tau) &= (1 - \hat{\gamma}) \left[(w - 1)u'(r, \tau) + w \frac{u(r, \tau)}{r} \right], \quad \hat{\gamma}g(r, \tau) = \int_0^\tau \gamma(\tau - \zeta)g(r, \zeta)d\zeta, \end{aligned} \quad (2)$$

граничные условия

$$u(r_0, \tau) = 0, \quad \sigma_1(1, \tau) = -P_0 f(\tau), \quad \tau > 0, \quad (3)$$

начальные условия

$$u(r, 0) = 0, \quad \dot{u}(r, 0) = 0, \quad r_0 \leq r \leq 1. \quad (4)$$

Точка над функцией означает производную по τ , штрих – производную по r .

2. Построение решения

Применим интегральное преобразование Лапласа по времени, обозначив изображения функций $u(r, \tau), \sigma_1(r, \tau), \sigma_2(r, \tau), \gamma(\tau), f(\tau)$ соответственно через $U(r, s), S_1(r, s), S_2(r, s), \Gamma(s), F(s)$ ($s \in \mathcal{C}$). Решение задачи в изображениях для перемещения и напряжений будет иметь вид:

$$U(r, s) = -P_0 \frac{F(s)}{1 - \Gamma(s)} \cdot \frac{Q(r, \beta)}{Z(\beta)}, \quad S_j(r, s) = -P_0 F(s) \beta \frac{Q_j(r, \beta)}{Z(\beta)}, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

где

$$\beta = \frac{s}{\sqrt{1 - \Gamma(s)}}, \quad y = r\beta, \quad y_0 = r_0\beta, \quad Q(r, \beta) = K_1(y_0)I_1(y) - I_1(y_0)K_1(y),$$

$$\begin{aligned}
Q_1(r, \beta) &= K_1(y_0) \left[wI_0(y) - \frac{I_1(y)}{y} \right] + I_1(y_0) \left[wK_0(y) + \frac{K_1(y)}{y} \right], \\
Q_2(r, \beta) &= K_1(y_0) \left[(w-1)I_0(y) + \frac{I_1(y)}{y} \right] + I_1(y_0) \left[(w-1)K_0(y) - \frac{K_1(y)}{y} \right], \\
Z(\beta) &= K_1(y_0) [wI_0(\beta)\beta - I_1(\beta)] + I_1(y_0) [wK_0(\beta)\beta + K_1(\beta)],
\end{aligned} \tag{6}$$

I_0, I_1 – модифицированные функции Бесселя; K_0, K_1 – функции Макдональда.

Из формул (5), (6) следует, что на границе $r = r_0$ напряжения связаны соотношением

$$\sigma_2(r_0, \tau) = \frac{v_0}{1-v_0} \sigma_1(r_0, \tau), \quad \tau > 0, \tag{7}$$

а если существует $\gamma(0)$, то исследование при $s \rightarrow \infty$ дает оценку $\sigma_1(r_0, \tau)$ за первым фронтом, пришедшим на эту границу (здесь и далее $h(\tau)$ – функция Хевисайда):

$$\sigma_1(r_0, \tau) \approx -2 \frac{P_0}{\sqrt{r_0}} \exp(-(1-r_0)\gamma(0)/2) f(\tau-1+r_0) h(\tau-1+r_0) \text{ при } \tau \approx 1-r_0.$$

Если $f(\tau) = h(\tau)$, то при $r = r_0$ получим оценку скачков напряжений на первом фронте:

$$[\sigma_1] \approx -2 \frac{P_0}{\sqrt{r_0}} \exp(-(1-r_0)\gamma(0)/2), \quad [\sigma_2] = [\sigma_1] \frac{v_0}{1-v_0}.$$

При $r_0 < r < 1$ для $\sigma_1(r, \tau)$, $\sigma_2(r, \tau)$ соотношение, аналогичное (7), не выполняется при всех τ , но за первым фронтом, пришедшим в точку r , при $\tau \approx 1-r$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(r, \tau) &\approx -\frac{P_0}{\sqrt{r}} \exp(-(1-r)\gamma(0)/2) f(\tau-1+r) h(\tau-1+r), \\
\sigma_2(r, \tau) &\approx \frac{v_0}{1-v_0} \sigma_1(r, \tau).
\end{aligned}$$

Пусть $f(\tau) = h(\tau)$. Обозначим перемещение, напряжения и их изображения при этом как $u^{(h)}, \sigma_j^{(h)}, U^{(h)}, S_j^{(h)}$. Анализ формул (5), (6) показывает, что полюсами $U^{(h)}, S_j^{(h)}$ будут только $s = 0$ и корни уравнений $\beta^2(s) = -\chi_k^2$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), где $\chi_k \in \mathcal{R}$ – собственные частоты свободных колебаний упругого цилиндра при свободной внешней поверхности $r = 1$. Предельными точками множества полюсов указанных функций, помимо бесконечно удаленной точки, являются корни уравнения $1 - \Gamma(s) = 0$.

Рассмотрим случай, когда ядро релаксации материала имеет вид

$$\gamma(\tau) = a \exp(-b\tau), \quad 0 < a < b/2, \quad \Gamma(s) = \frac{a}{s+b}, \quad a, b = \text{const}. \tag{8}$$

Тогда изображения $U^{(h)}, S_j^{(h)}$ не имеют точек ветвления [22]. Удалось доказать, что все полюсы этих изображений простые. С учетом асимптотического поведения $U^{(h)}, S_j^{(h)}$ при $s \rightarrow \infty$, а также в окрестности предельной точки $s_* = a-b$ множества полюсов $U^{(h)}, S_j^{(h)}$, оригиналы $u^{(h)}, \sigma_j^{(h)}$ представляются в виде рядов по вычетам ($j = 1, 2$):

$$u^{(h)} = u^{(0)}(r) - 2P_0 \sum_{k=1}^{\infty} Y(r, \chi_k) \phi_k^{(1)}(\tau), \quad \sigma_j^{(h)} = \sigma_j^{(0)}(r) - 2P_0 \sum_{k=1}^{\infty} Y_j(r, \chi_k) \phi_k^{(2)}(\tau), \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
u^{(0)}(r) &= \frac{Q_0}{1-a/b} \left(\frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{r} \right), \quad \sigma_j^{(0)}(r) = Q_0 \left[\frac{1}{(1-2\nu_0)r_0} + (-1)^{j+1} \frac{r_0}{r^2} \right], \\
Q_0 &= -\frac{P_0(1-2\nu_0)r_0}{(1-2\nu_0)r_0^2 + 1}, \quad \phi_k^{(m)}(\tau) = g^{(m)}(z_k) \exp(z_k \tau) + \\
&+ 2 \operatorname{Re} [g^{(m)}(\alpha_k + i\omega_k) \exp((\alpha_k + i\omega_k)\tau)], \quad m=1, 2, \quad k=1, 2, 3, \dots, \\
g^{(1)}(s) &= \frac{(s+b)^2}{q(s)}, \quad g^{(2)}(s) = \frac{(s+b-a)(s+b)}{q(s)}, \quad q(s) = 2s^2 + (4b-3a)s + 2b(b-a), \\
Y(r, \chi) &= \frac{1}{\chi dX(\chi)/d\chi} [J_1(r_0\chi)N_1(r\chi) - N_1(r_0\chi)J_1(r\chi)], \\
Y_1(r, \chi) &= \frac{1}{\chi dX(\chi)/d\chi} \left\{ J_1(r_0\chi) \left[w\chi N_0(r\chi) - \frac{N_1(r\chi)}{r} \right] - \right. \\
&\quad \left. - N_1(r_0\chi) \left[w\chi J_0(r\chi) - \frac{J_1(r\chi)}{r} \right] \right\}, \\
Y_2(r, \chi) &= \frac{1}{\chi dX(\chi)/d\chi} \left\{ J_1(r_0\chi) \left[(w-1)\chi N_0(r\chi) + \frac{N_1(r\chi)}{r} \right] - \right. \\
&\quad \left. - N_1(r_0\chi) \left[(w-1)\chi J_0(r\chi) + \frac{J_1(r\chi)}{r} \right] \right\}, \\
X(\chi) &= N_1(r_0\chi)[J_1(\chi) - w\chi J_0(\chi)] - J_1(r_0\chi)[N_1(\chi) - w\chi N_0(\chi)],
\end{aligned}$$

J_0, J_1, N_0, N_1 – функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого и первого индекса.

Действительные величины (упомянутые выше частоты упругих колебаний) $\chi_k > 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) являются положительными корнями уравнения $X(\chi) = 0$, величины z_k и $\alpha_k + i\omega_k$ ($\omega_k > 0, z_k < 0, \alpha_k < 0, z_k \neq -b, z_k \neq a-b$) для каждого $k = 1, 2, 3, \dots$ представляют собой действительный и один из комплексно-сопряженных корней кубического уравнения $s^3 + bs^2 + \chi_k^2 s + \chi_k^2(b-a) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$. В процессе расчетов с конкретными исходными данными корни кубического уравнения для каждого χ_k вычислялись по формуле Кардано.

При других функциях внешней нагрузки $f(\tau)$ решение строится на основе выражений (9) с использованием известной операции свертки.

3. Результаты вычислений

Представим результаты расчетов относительного радиального напряжения $\kappa_1 = \sigma_1/P_0 = \sigma_{RR}/(2\mu_0 P_0)$, выполненных на основе полученных формул при $r_0 = 0,4$, $\nu_0 = 0,3$. На рис. 2 показано изменение во времени величины κ_1 на границе $r = r_0$ для случая $f(\tau) = 1 - \exp(-1000\tau)$, $\tau > 0$ (сглаженная единичная ступенька). График 1 (тонкая сплошная линия) соответствует линейно-упругому материалу, остальные три – линейно-вязкоупругому с ядрами вида (8) при $a = 0,1, b = 1$ (график 2, пунктирная линия), $a = 0,2, b = 1$ (график 3, толстая сплошная линия) и $a = 0,45, b = 1$ (график 4, толстая штрихпунктирная линия). Отрицательные напряжения являются сжимающими ($P_0 > 0$).

На рис. 3 показаны результаты при $r_0 = 0,08$ (прочие исходные данные те же).

Как видим, на контакте с жестким включением в определенные моменты времени может возникать существенное растягивающее радиальное напряжение. Относительное кольцевое напряжение $\kappa_2 = \sigma_2/P_0$ в точке $r = r_0$ при любом $\tau > 0$ отличается от κ_1 только постоянным множителем (7). Заметим, что большие растягивающие напряжения могут быть причиной разрушения (отслоения) материала, при этом вязкость приводит к их уменьшению с течением времени.

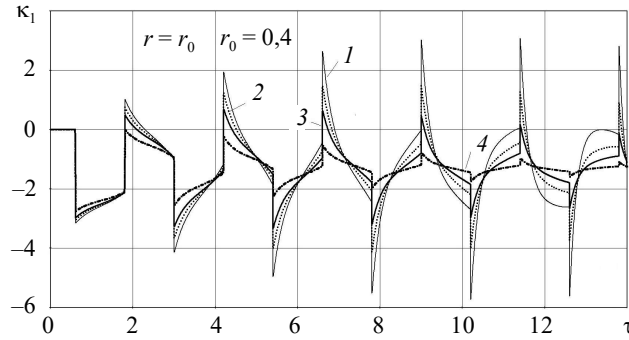


Рис. 2. Графики $\kappa_1(r_0, \tau)$ без учета и с учетом вязкости, $r_0 = 0,4$

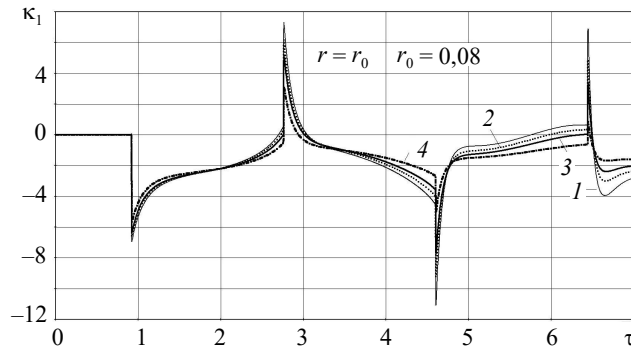


Рис. 3. Графики $\kappa_1(r_0, \tau)$ без учета и с учетом вязкости, $r_0 = 0,08$

Исследована зависимость от r_0 максимального относительного растягивающего напряжения $\kappa_1^{(\max)}$ в точке $r = r_0$ за время от начального момента до моментов τ порядка нескольких сотен. Заметим, что столь широкий временной диапазон оправданно выбирался в случае упругого материала, при наличии вязкости (вследствие затухания нестационарного процесса) этот диапазон можно было существенно уменьшить в зависимости от значений параметров вязкости. На рис. 4 для случая $v_0 = 0,3$ и нагрузки $f(\tau) = 1 - \exp(-1000\tau)$ представлены графики $\kappa_1^{(\max)}(r_0)$ для упругого материала (график 1) и вязкоупругого при тех же ядрах, что и ранее: $a = 0,1, b = 1$ (график 2), $a = 0,2, b = 1$ (график 3) и $a = 0,45, b = 1$ (график 4). Точками отмечены результаты расчетов, графики получены путем соединения этих точек. Установлено, что при небольших r_0 максимальные растягивающие напряжения достигаются на первом фронте растяжения, пришедшем в точку $r = r_0$ (см. рис. 3). Однако, если параметр вязкости материала a не слишком велик, то с увеличением r_0 , начиная с некоторого его значения r_0^* , этот максимум достигается уже не на первом, а на каком-либо из последующих фронтов растяжения, пришедших после отражения от нагруженной границы, что и наблюдается на рис. 2. Именно с этим связаны резкие изменения наклона графиков на рис. 4 при $a = 0; 0,1; 0,2$ и небольших r_0 , причем

соответствующее значение r_0^* зависит от параметра вязкости a . Также видно, что с увеличением a и r_0 растягивающие напряжения постепенно исчезают.

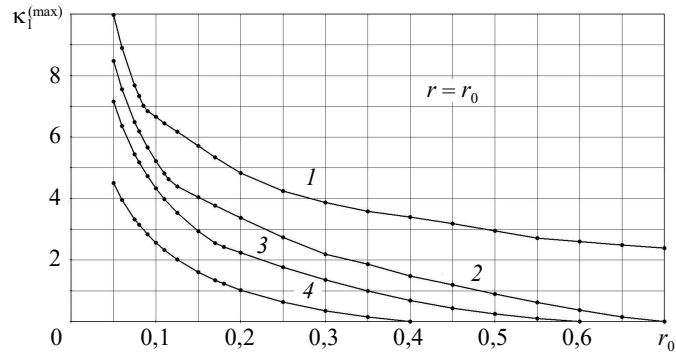


Рис. 4. Зависимость $\kappa_1^{(\max)}(r_0)$ без учета и с учетом вязкости

Заключение

В случае двухпараметрического экспоненциального наследственного ядра решение рассматриваемой задачи построено в форме ряда. Оно справедливо во всем диапазоне изменения времени и не требует, чтобы вязкость была малой. С помощью построенного решения для случая экспоненциального ядра релаксации проведены исследования волнового процесса в поперечном сечении цилиндра при различных исходных данных. Установлено, что в случае сжимающей внешней нагрузки на границе контакта с жестким включением в определенные моменты времени возникают существенные растягивающие напряжения. Они уменьшаются с увеличением параметра, характеризующего вязкость. При ступенчатом изменении во времени внешней нагрузки исследована зависимость максимальных растягивающих напряжений на границе с жестким включением от относительного радиуса включения и параметра вязкости материала.

Список литературы

1. Желтков В.И., Толоконников Л.А., Хромова Н.Г. Переходные функции в динамике вязкоупругих тел. *Докл. РАН*. 1993. Т. 329. №6. С. 718–719.
2. Локшин А.А., Суворова Ю.В. *Математическая теория распространения волн в средах с памятью*. М.: Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
3. Розовский М.И. Интегрально-операторный метод в наследственной теории ползучести. *Докл. АН СССР*. 1965. Т. 160. №4. С. 792–795.
4. Филиппов И.Г., Чебан В.Г. *Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней*. Кишинев: Штиинца, 1988. 190 с.
5. Achenbach J.D. Vibrations of a viscoelastic body. *AIAA Journal*. 1967. Vol. 5. Iss. 6. P. 1213–1214. DOI: 10.2514/3.4173.
6. Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York: Academic Press, 1982. 364 p.
7. Ильясов М.Х. *Нестационарные вязкоупругие волны*. Баку: Азербайджан Хава Йоллары, 2011. 330 с.
8. Лычева Т.Н., Лычев С.А. Спектральные разложения в динамических задачах вязкоупругости. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2016. №4. С. 120–150. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.08.
9. Colombaro I., Giusti A., Mainardi F. On the propagation of transient waves in a viscoelastic Bessel medium. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 2017. Vol. 68. Article No 62. DOI: 10.1007/s00033-017-0808-6.

10. Yuxuan Zheng, Fenghua Zhou. Using Laplace transform to solve the viscoelastic wave problems in the dynamic material property tests. *The European Physical Journal Conferences*. 2015. Vol. 94. P. 04021-1–04021-5. DOI: 10.1051/epjconf/20159404021.
11. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями*. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
12. Петров А.Н., Ермолаев М.Д. Расчет методом граничных элементов динамики составных вязкоупругих тел. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика деформируемого твердого тела*. 2011. №4(4). P. 1694–1696.
13. Bazhlekova E., Bazhlekov I. Complete monotonicity of the relaxation moduli of distributed-order fractional Zener model. *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 2048. P. 050008-1–050008-8. DOI: 10.1063/1.5082107.
14. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
15. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Krusser A.I. To the question on the correctness of fractional derivative models in dynamic problems of viscoelastic bodies. *Mechanics Research Communications*. 2016. Vol. 77. P. 44–49. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2016.09.002.
16. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gazizullin R.K., Kholmogorov S.A., Shishkin V.M. Theoretical-experimental method for determining the short-and long-term creep parameters of technical rubber in shear. *Mechanics of Composite Materials*. 2019. Vol. 55. Iss. 4. P. 435–454. DOI: 10.1007/s11029-019-09824-x.
17. Shamaev A.S., Shumilova V.V. Spectrum of one-dimensional eigenoscillations of a medium consisting of viscoelastic material with memory and incompressible viscous fluid. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 257. No 5. P. 732–742. DOI: 10.1007/s10958-021-05513-0.
18. Егорычев О.А., Поддаева О.И. Нормальный удар по торцу цилиндрической оболочки. *Строительная механика и расчет сооружений*. 2006. №1. С. 34–36.
19. Khudoynazarov K., Yalgashev B.F., Mavlonov T. Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. Vol. 1030. P. 012098-1–012098-12. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098.
20. Kurbanov N.T., Nasibzada V.N. Investigation of forced oscillations viscoelastic shells. *International Journal of Current Research*. 2015. Vol. 7. Iss. 7. P. 18356–18360.
21. Igumnov L.A., Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G. Construction of the solutions of non-stationary dynamic problems for linear viscoelastic bodies with a constant Poisson's ratio. In: *Dynamics, Strength of Materials and Durability in Multiscale Mechanics*. 2021. Vol. 137. P. 89–96. DOI: 10.1007/978-3-030-53755-5_6.
22. Pshenichnov S.G. Nonstationary dynamic problems of linear viscoelasticity. *Mechanics of Solids*. 2013. Vol. 48. Iss. 1. P. 68–78. DOI: 10.3103/S002565441301007X.

References

1. Zheltkov V.I., Tolokonnikov L.A., Khromova N.G. Perekhodnye funktsii v dinamike vyazkouprugikh tel [The transient functions in the dynamics of viscoelastic bodies]. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk [Doklady Physics]*. 1993. Vol. 329. No 6. P. 718–719 (In Russian).
2. Lokshin A.A., Suvorova Yu.V. *Matematicheskaya teoriya rasprostraneniya voln v sredakh s pamyatyu [Mathematical Theory of Wave Propagation in Media with Memory]*. Moscow. MGU Publ. 1982. 151 p. (In Russian).
3. Rozovskii M. I. Integralno-operatornyy metod v nasledstvennoy teorii polzuchesti [Integral operator method in the hereditary theory of creep]. *Doklady Akademii nauk SSSR*. 1965. Vol. 160. No 4. P. 792–795 (In Russian).
4. Filippov I.G., Cheban V.G. *Matematicheskaya teoriya kolebaniy uprugikh i vyazkouprugikh plastin i sterzhney [The Mathematical Theory of Vibrations of Elastic and Viscoelastic Plates and Rods]*. Chisinau. Stiinta. 1988. 190 p. (In Russian).
5. Achenbach J.D. Vibrations of a viscoelastic body. *AIAA Journal*. 1967. Vol. 5. Iss. 6. P. 1213–1214. DOI: 10.2514/3.4173.

6. Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*. New York. Academic Press. 1982. 364 p.
7. Ilyasov M.Kh. *Nestatsionarnye vyazkouprugie volny [Non-Stationary Viscoelastic Waves]*. Baku. Azerbaijan Hava Yollary Publ. 2011. 330 p. (In Russian).
8. Lycheva T.N., Lychev S.A. Spektralnye razlozheniya v dinamicheskikh zadachakh vyazkouprugosti [Spectral decompositions in dynamical viscoelastic problems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2016. No 4. P. 120–150. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.4.08 (In Russian).
9. Colombaro I., Giusti A., Mainardi F. On the propagation of transient waves in a viscoelastic Bessel medium. *Z. Angew. Math. Phys.* 2017. Vol. 68. Article No 62. DOI: 10.1007/s00033-017-0808-6.
10. Yuxuan Zheng, Fenghua Zhou. Using Laplace transform to solve the viscoelastic wave problems in the dynamic material property tests. *EPJ Web of Conferences*. 2015. Vol. 94. P. 04021-1–04021-5. DOI: 10.1051/epjconf/20159404021.
11. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integral'nykh uravneniy i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoy dinamicheskoy teorii uprugosti s sopryazhennymi polyami [The Method of Boundary Integral Equations and Boundary Elements in Solving the Problem of Three-Dimensional Dynamic Theory of Elasticity with Conjugate Fields]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 352 p. (In Russian).
12. Petrov A.N., Ermolaev M.D. Raschet metodom granichnykh elementov dinamiki sostavnykh vyazkouprugikh tel [Boundary elements analysis of the dynamics of composite viscoelastic bodies]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. Solid Mechanics]*. 2011. Vol. 4(4). P. 1694–1696 (In Russian).
13. Bazhlekova E., Bazhlekov I. Complete monotonicity of the relaxation moduli of distributed-order fractional Zener model. *AIP Conf. Proc.* 2018. Vol. 2048. P. 050008-1–050008-8. DOI: 10.1063/1.5082107.
14. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. London. Imperial College Press. 2010. 368 p.
15. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Krusser A.I. To the question on the correctness of fractional derivative models in dynamic problems of viscoelastic bodies. *Mechanics Research Communications*. 2016. Vol. 77. P. 44–49. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2016.09.002.
16. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gazizullin R.K., Kholmogorov S.A., Shishkin V.M. Theoretical-experimental method for determining the short-and long-term creep parameters of technical rubber in shear. *Mech. Compos. Mater.* 2019. Vol. 55. Iss. 4. P. 435–454. DOI: 10.1007/s11029-019-09824-x.
17. Shamaev A.S., Shumilova V.V. Spectrum of one-dimensional eigenoscillations of a medium consisting of viscoelastic material with memory and incompressible viscous fluid. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 257. No 5. P. 732–742. DOI:10.1007/s10958-021-05513-0.
18. Egorychev O.A., Poddayeva O.I. Normalnyy udar po tortsu tsilindricheskoy obolochki [Normal impact on end of cylindrical shell]. *Stroitel'naya Mekhanika i Raschet Sooruzheniy*. 2006. No 1. P. 34–36 (In Russian).
19. Khudoynazarov K., Yalgashev B.F., Mavlonov T. Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell. *IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.* 2021. Vol. 1030. P. 012098-1–012098-12. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098.
20. Kurbanov N.T., Nasibzada V.N. Investigation of forced oscillations viscoelastic shells. *International Journal of Current Research*. 2015. Vol. 7. Iss. 7. P. 18356–18360.
21. Igumnov L.A., Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G. Construction of the solutions of non-stationary dynamic problems for linear viscoelastic bodies with a constant Poisson's ratio. In: *Dynamics, Strength of Materials and Durability in Multiscale Mechanics*. 2021. Vol. 137. P. 89–96. DOI: 10.1007/978-3-030-53755-5_6.
22. Pshenichnov S.G. Nonstationary dynamic problems of linear viscoelasticity. *Mechanics of Solids*. 2013. Vol. 48. Iss. 1. P. 68–78. DOI: 10.3103/S002565441301007X.

NON-STATIONARY WAVES IN A LINEAR-VISCOELASTIC CYLINDER WITH RIGID INCLUSION**

Korovaytseva E.A.¹, Pshenichnov S.G.¹, Bazhlekova E.², Zhelyazov T.³

¹*Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics,
Moscow, Russian Federation*

²*Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy of Sciences,
Sofia, Bulgaria*

³*Technical University of Sofia, Sofia, Bulgaria*

We have constructed a solution to a non-stationary dynamic problem for a linear-viscoelastic homogeneous infinitely long cylinder with a rigid axial inclusion exposed to an axisymmetric radial load uniformly distributed along the element of cylinder. On the contact surface with a rigid inclusion, the displacements are equal to zero. The hereditary properties of the material of the cylinder are taken into account using the Boltzmann–Volterra linear integral relation, and the Poisson's ratio of the material is considered time-independent. The integral Laplace transform in time is applied to the initial problem and the analysis of the solution in images is carried out. In the case when the hereditary kernel is exponential two-parameter, originals of the displacement and stresses are constructed in a form of series. Asymptotic formulas for the stresses behind the front that first came from the loaded boundary are obtained. The constructed solution to the non-stationary problem is valid over the entire time range and does not require that the viscosity be small. With the help of constructed solution for the case of an exponential relaxation kernel, investigations of wave process in cylinder cross-section with various initial parameters are carried out. It is established that in the case of a compressive external load, significant tensile stresses occur at certain moments at the contact boundary with a rigid inclusion. They decrease with the growth of the parameter characterizing the viscosity of the material. With a stepwise change in time of the external load, the dependence of the maximum tensile stresses at the boundary with a rigid inclusion on the inclusion relative radius and the viscosity parameter of the material is investigated.

Keywords: viscoelastic body, non-stationary wave process, relaxation kernels, waves in a cylinder, Laplace transform.

****Acknowledgments.** The reported study was performed within the bilateral project funded by the Russian Foundation for Basic Research (project number 20-58-18002) and by the Bulgarian National Science Fund (project number KP-06-Russia/5 from 11.12.2020).