УДК 519.6

АНАЛИЗ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАМЕ И ОТВЕЧАЮЩИЙ ОПЕРАТОРУ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Л.Е. Мальцев, Т.В. Мальцева, Т.В. Салтанова

Тюмень

Рассматривается система уравнений эллиптического типа. С помощью квазиэнергетического произведения исследуются основные свойства обобщенного дифференциального оператора Ламе, сформулированные в виде аналогов формул Бетти и Клапейрона. Третья формула Бетти описывает несимметричность обобщённого оператора. Аналог формулы Клапейрона показывает вклад поровой воды в энергию деформации двухфазного тела. Практическое приложение квазиэнергетического произведения заключается в построении нового конечного элемента, что позволяет использовать комплекс программ метода конечного элемента.

1. Введение

Согласно натурным экспериментам (Л.С. Амарян, А.К. Бугров, А.В. Голли, Ф.Ф. Зехниев и др.), на расстоянии от дневной поверхности более одного метра для глины и полутора метров для торфа имеются остаточные избыточные поровые давления после окончания процесса консолидации водонасыщенного грунта, то есть в стабилизированном состоянии, не зависящем от времени. Моделями теории упругости и пластичности (В.В. Соколовский, М.И. Горбунов-Посадов, М.В. Малышев, Г.М. Ломизе, А.Л. Крыжановский и др.) это поровое давление не описывается, потому что грунт рассматривается однофазным. По линейным фильтрационным моделям (К. Терцаги, Н.М. Герсеванов, М. Био, В.А. Флорин, Ю.К. Зарецкий, З.Г. Тер-Мартиросян и др.) остаточные избыточные поровые давления обращаются в нуль. Эти модели описываются системами уравнений параболического типа. В нелинейных фильтрационных моделях (В.А. Флорин, А.В. Костерин и др.), в которых учитывается начальный градиент порового давления, вводятся две зоны – активная и пассивная. В первой зоне остаточные избыточные поровые давления обращаются в нуль, а вторая зона считается абсолютно твердым телом.

В статье рассмотрена модель [1,2] водонасыщенного грунта, в которой избыточные остаточные давления описаны с помощью нового варианта закона уплотнения грунта, не зависящего от времени, $P_{li} = E_{li}\varepsilon^{l}_{ij}\delta_{ij}$, где $P_{li} = h_i \partial_j \sigma^{l}_{ij}\delta_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера. Новые уравнения взаимосвязи между относительными компонентами деформаций по Коши твердой и жидкой фаз $\boldsymbol{\varepsilon}^{s}_{ii} = -\boldsymbol{\aleph}_j \boldsymbol{\varepsilon}^{l}_{ij}\boldsymbol{\delta}_{ij}$ позволяют использовать только деформации твердой фазы. В результате получается система уравнений эллиптического типа, как это принято в механике деформируемого твердого тела и, в частности, теории упругости (уравнения Ламе). Однако в уравнениях типа Ламе за счет наличия жидкой фазы появились младшие производные, что привело к несимметрии оператора и вызвало необходимость адаптировать метод конечных элементов (МКЭ). Аналоги эллиптической модели, по мнению авторов статьи, в литературе отсутствуют. Модель подтверждена новыми лабораторными (В.В. Воронцов, В.А. Демин, А.В. Набоков) и натурным (Ф.Ф. Зехниев) экспериментами.

Обобщенный оператор Ламе представлен в виде суммы $A+B+C$, где A – известный симметричный оператор Ламе. Симметричный оператор B включает в себя новые механические характеристики b_i, которые отражают изменение механических свойств скелета грунта за счет наличия поровой воды. Оператор C, образованный производными первого порядка, описывает разгружающий вклад поровой воды и является несимметричным, то есть $(Cu,v) \neq (u,Cv)$. Энергетические произведения типа $((A+B)u,v)$ введены для симметричных операторов, поэтому произведение (Cu,v) назовем квазиэнергетическим.

В теории упругости формулы Бетти и Клапейрона получены [3] на основе энергетического произведения (Au,u). В статье аналоги этих формул получены путем применения квазиэнергетического произведения $((A+B+C)u,u)$. Третий вариант новой формулы Бетти представляет собой разность двух квазиэнергетических произведений: $((A+B+C)u,v)-(u,(A+B+C)v)$ и описывает несимметричность обобщенного оператора Ламе. Вклад оператора C в удельную работу деформации отражается в новой формуле типа Клапейрона. Новый конечный элемент введен на базе квазиэнергетического произведения.

2. Постановка краевой задачи

Для описания напряженно-деформированного состояния двухфазного тела в стабилизированном состоянии относительно перемещений только твердой фазы u_j получена система дифференциальных уравнений второго порядка с положительными постоянными коэффициентами G, λ, b_i, c_i $(i=1,2,3)$, описывающими механические свойства (модуль сдвига, постоянная Ламе) твердой (индекс опущен) и жидкой (индекс l) фаз:

$$D_{ij}u_j = F_i, \quad b_i = E_{li}/\aleph_i^2, \quad c_i = E_{li}/h_l\aleph_i, \tag{1}$$

$$D_{ij} = -((G+\lambda+b_i\delta_{ij})\partial_i\partial_j + G\delta_{ij}\partial_k\partial_k + c_i\delta_{ij}\partial_j), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Экспериментальное определение механических характеристик жидкой фазы E_{li} (МПа), безразмерных положительных коэффициентов $\aleph_i$, определяющих долю относительных деформаций скелета грунта от относительных деформаций жидкой фазы, и геометрические параметры h_i (м) приводятся в работе [1]. Через F_i обозначены компоненты объемных сил. Дифференциальный оператор представим в виде $D=-(A+B+C)$,

$$A_{ij} = (G+\lambda)\partial_i\partial_j + G\delta_{ij}\partial_k\partial_k, \quad B_{ij} = b_i\delta_{ij}\partial_i\partial_j, \quad C_{ij} = c_i\delta_{ij}\partial_j.$$

Знак минус перед суммой операторов введен потому, что положительно определенным является отрицательный оператор. Здесь A – оператор Ламе, оператор B симметричен, механические постоянные b_i описывают изменение трех диагональных элементов в тензоре четвертого ранга упругих постоянных за счет наличия поровой воды:

$$[E_{A+B}]=\begin{pmatrix} \lambda+2G+b_1 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G+b_2 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G+b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix}.$$

Оператор C моделирует разгружающее влияние жидкой фазы и несимметричен.

Дополним уравнения смешанными граничными условиями:

$$u_i\big|_{S_1}=0,\quad t_{ij}u_j\big|_{S_2}=q_i, \tag{2}$$

$$t_{ij}=\lambda n_i\partial_j+(G+b_i\delta_{ij})n_j\partial_i+G\delta_{ij}n_k\partial_k,$$

t – оператор внутренних напряжений в скелете грунта записан на основе тензора $[E_{A+B}]$, заданная нагрузка q_i приложена к поверхности тела, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности $S=S_1+S_2$. Касательные напряжения по модели действуют только в скелете грунта. Поскольку на дневной поверхности тела S_2 за счет дренирующего покрытия избыточные остаточные поровые давления обращаются в ноль, то остаются только нормальные напряжения в скелете грунта, поэтому статические граничные условия (2) записаны по аналогии с записью, применяемой в теории упругости.

В приложениях под областью V понимается часть полупространства, нижняя граница S_1 которой есть сфера большого конечного радиуса, дневная граница S_2 является плоскостью, поэтому один направляющий косинус равен -1, а два других обращаются в нуль.

3. Анализ обобщенного оператора Ламе

Анализ основан на свойствах квазиэнергетического произведения (Du,u'). Для преобразования интегралов по объему применяется формула Остроградского–Гаусса. Первое слагаемое известно [3]:

$$(-Au,u')=-\int_V u_i'A_{ij}u_j\,dV=2\int_V W^A(u,u')dV-\int_S u_i'l_{ij}u_j\,dS,$$

$$W^A(u,u')=W^A(u',u),\quad l_{ij}=\lambda n_i\partial_j+Gn_j\partial_i+G\delta_{ij}n_k\partial_k.$$

При $u'=u$ получаем известный упругий потенциал

$$W^A(u)=\frac{1}{2}(\lambda\theta^2+2G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}),\quad \theta=\varepsilon_{ij}\delta_{ij}.$$

Два оставшихся слагаемых имеют вид [4]:

$$(-Bu,u')=-\int_V u_i'B_{ij}u_j\,dV=2\int_V W^B(u,u')\,dV-\int_S b_iu_i'\delta_{ij}n_j\partial_iu_j\,dS,$$

$$(-Cu,u')=-\int_V u_i'C_{ij}u_j\,dV=\int_V W^C(u,u')\,dV=-\frac{1}{2}\int_S c_iu_i'\delta_{ij}u_jn_i\,dS, \tag{3}$$

$$W^B(u,u') = \frac{1}{2} b_i \varepsilon_{ii} \varepsilon'_{ii}, \quad W^B(u,u') = W^B(u',u),$$

$$W^C(u,u') = -c_i \varepsilon_{ii} u'_i, \quad W^C(u,u') \neq W^C(u',u).$$

Форма $W^C(u,u')$ не обладает свойством коммутативности аргументов u и u'. Операторы A и B можно объединить на основе тензора Гука $[E_{A+B}]$.

При $u' = u$ объемный интеграл от W^C в (3) положителен, так как на S_2 один направляющий косинус внешней нормали отрицателен. Аналог первой формулы Бетти описывается выражением

$$\int_V u'_i D_{ij} u_j \, dV = 2\int_V \left(W^A(u,u') + W^B(u,u') + \frac{1}{2} W^C(u,u') \right) dV - \int_S u'_i t_{ij} u_j \, dS. \tag{4}$$

Полагая $u' = u$, получим аналог второй формулы Бетти

$$\int_V u_i D_{ij} u_j \, dV = 2\int_V \left(W^A + W^B + \frac{1}{2} W^C \right) dV - \int_S u_i t_{ij} u_j \, dS. \tag{5}$$

Оставляя только упругий потенциал W^A, приходим к известным формулировкам двух формул Бетти.

Покажем несимметричность квазиэнергетического произведения. Вычтем из (4) взаимное выражение и запишем аналог третьей формулы Бетти

$$\int_V (u'_i D_{ij} u_j - u_i D_{ij} u'_j) \, dV = \int_V (W^C(u,u') - W^C(u',u)) \, dV - \int_S (u'_i t_{ij} u_j - u_i t_{ij} u'_j) \, dS. \tag{6}$$

При введении объемных сил по уравнению (1) и учете статических граничных условий (2) имеем

$$\int_V (u'_i F_i - u_i F'_i) dV - \int_{S_2} (u'_i q_i - u_i q'_i) \, dS = \int_V (W^C(u,u') - W^C(u',u)) \, dV. \tag{7}$$

При отсутствии объемных сил и задании в двух точках поверхности S_2 сосредоточенных сил $q(x) = Q\,\delta(x - y_0)$, $q'(x) = Q'\delta(x - y_1)$ получим

$$u'(y_0) \cdot Q = u(y_0) \cdot Q' + \int_V (W^C(u,u') - W^C(u',u)) \, dV. \tag{8}$$

По теореме Бетти о взаимности работ для упругого тела объемный интеграл отсутствует, поэтому несимметричность оператора D описывается этим интегралом.

На основе уравнений (1) и условий (2) введем объемные и поверхностные силы, тогда на основе выражения (5) будем иметь аналог формулы Клапейрона

$$u_i F_i \, dV + \int_S u_i q_i \, dS = 2\int_V \left(W^A + W^B + \frac{1}{2} W^C \right) dV,$$

в котором правая часть описывает энергию деформации двухфазного тела в виде квадратичных и билинейного функционалов. При сохранении только W^A получим в правой части потенциальную энергию и известную запись теоремы Клапейрона.

4. Основная идея МКЭ

Умноженные скалярно уравнения (1) на вектор возможных перемещений u приводят к выражению $(Du, u) = (F, u)$, в котором по принципу Лагранжа работа внутренних сил Du на возможном перемещении u равна работе внешних сил F на том же перемещении:

$$(Au,u)+(Bu,u)+(Cu,u)=(F,u),$$

$$2\int_V(\lambda\theta^2+2G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})\,dV+2\int_V b_i\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\delta_{ij}\,dV+(Cu,u)=\int_V F_iu_i\,dV-\int_S q_iu_i\,dS.$$

Для известного оператора Ламе A имеем [5]:

$$(Au,u)=\int_V(\lambda\theta^2+2G\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})dV-\int_S q_iu_i\,dS,$$

поверхностный интеграл употребляется для граничного конечного элемента. Второй объемный интеграл объединим с первым на основе тензора $[E_{A+B}]$. Работа деформации внутренних сил в жидкой фазе в пределах объема треугольного элемента равна (Cu,u).

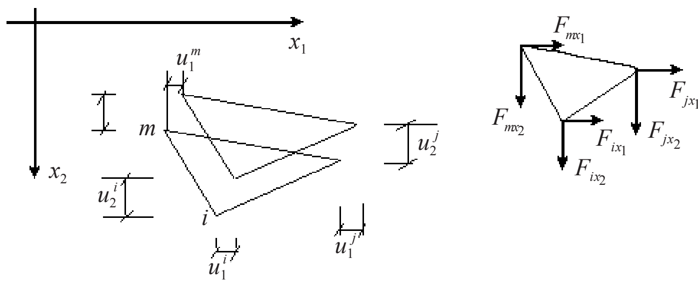
Для случая плоской деформации с использованием коэффициента Пуассона ν для твердой фазы тензор Гука имеет вид:

$$[E_{A+B}]=\begin{pmatrix}\lambda\dfrac{1-\nu}{\nu}+b_1 & 2G\dfrac{\nu}{1-2\nu} & 0\\ 2G\dfrac{\nu}{1-2\nu} & \lambda\dfrac{1-\nu}{\nu}+b_2 & 0\\ 0 & 0 & G\end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Поскольку МКЭ является численным методом, то требуется матричная запись каждого слагаемого, которая для оператора A известна [6].

5. Построение конечного элемента, моделирующего избыточные остаточные поровые давления

Согласно [6], введем стандартный конечный элемент треугольной формы площадью Δ.



Внутри треугольного элемента перемещения $u=(u_1,u_2)$ записываются через узловые перемещения $(u_1^i\ u_2^i\ u_1^j\ u_2^j\ u_1^m\ u_2^m)$ по формулам [6]:

$$u_k=\frac{1}{2\Delta}[(p_i+d_ix_1+n_ix_2)u_k^i+(p_j+d_jx_1+n_jx_2)u_k^j+$$

$$+(p_m+d_mx_1+n_mx_2)u_k^m], \qquad (10)$$

$$p_i = x_1^j x_2^m - x_1^m x_2^j, \quad n_i = x_1^m - x_2^j, \quad d_i = x_2^j - x_2^m, \quad k = 1,2. \tag{11}$$

Узловые перемещения являются искомыми величинами и образуют матрицу-столбец $\{\delta\}$. В дальнейшем фигурные скобки обозначают либо матрицу-столбец, либо матрицу-строку; квадратные скобки – полную матрицу.

На основании уравнений Коши:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2\Delta}(d_i u_1^i + d_j u_1^j + d_m u_1^m), \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1}{2\Delta}(n_i u_2^i + n_j u_2^j + n_m u_2^m),$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2\Delta}(n_i u_1^i + n_j u_1^j + n_m u_1^m + d_i u_2^i + d_j u_2^j + d_m u_2^m),$$

относительные деформации внутри конечного элемента запишем через $\{\delta\}$:

$$\{\varepsilon\} = [N]\{\delta\} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} d_i & 0 & d_j & 0 & d_m & 0 \\ 0 & n_i & 0 & n_j & 0 & n_m \\ n_i & d_i & n_j & d_j & n_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^m \\ u_2^m \end{pmatrix},$$

где матрица $[N]$ образована на основе выражений (11).

Удельная работа внутренних сил для скелета грунта равна

$$2(W^A + W^B) = \{\varepsilon\}^T \{\sigma\}, \quad \{\varepsilon\}^T = \{\delta\}^T [N]^T,$$

индекс T обозначает операцию транспонирования. От удельной работы перейдем к работе внутренних сил в пределах объема элемента, интегрируя по площади элемента Δ и умножая на единичную толщину:

$$\int_S \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dS = \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \cdot \Delta \cdot 1, \quad \int_S dS = \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i \\ 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\{\varepsilon\} = [N]\{\delta\}$, $\{\varepsilon\}^T = \{\delta\}^T[N]^T$ и $\{\sigma\} = [E_{A+B}]\{\varepsilon\}$, то

$$\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \cdot \Delta = \{\delta\}^T [N]^T [E_{A+B}][N]\{\delta\} \cdot \Delta.$$

Работа внешних сил, приложенных в узлах элемента, равна $\{\delta\}^T[F]$. Равенство работ внутренних и внешних сил имеет вид:

$$\{\delta\}^T [N]^T [E_{A+B}][N]\{\delta\} \cdot \Delta + (Cu, u) = \{\delta\}^T \{F\}. \tag{12}$$

Ниже сомножитель $\{\delta\}^T$ будет сокращен, тогда в левой части уравнения первое слагаемое примет вид:

$$\Delta \cdot [N]^T [E_{A+B}] \cdot [N]\{\delta\}.$$

Сомножители перед искомым вектором перемещений $\{\delta\}$ образуют матрицу жесткости для скелета грунта $[k_1] = \Delta \cdot [N]^T [E_{A+B}] \cdot [N]$ или

$$[k_1]=$$

$$=\frac{1}{4\Delta}\begin{pmatrix} d_i & 0 & n_i \\ 0 & n_i & d_i \\ d_j & 0 & n_j \\ 0 & n_j & d_j \\ d_m & 0 & n_m \\ 0 & n_i & d_m \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda\frac{1-\nu}{\nu}+b_1 & 2G\frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 2G\frac{\nu}{1-2\nu} & \lambda\frac{1-\nu}{\nu}+b_2 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d_i & 0 & d_j & 0 & d_m & 0 \\ 0 & n_i & 0 & n_j & 0 & n_m \\ n_i & d_i & n_j & d_j & n_m & d_m \end{pmatrix}.$$

В матричном виде для плоского случая перепишем квазиэнергетическое произведение

$$(-Cu,u)=\int_S\left(c_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}u_1+c_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}u_2\right)dS.$$

На основании нового варианта закона уплотнения внутренние удельные силы $P_l=(\tilde{n}_1\varepsilon_{11},\tilde{n}_2\varepsilon_{22})$, вызванные избыточными остаточными поровыми давлениями в жидкой фазе, описываются произведениями $c_1\varepsilon_{11}$; $c_2\varepsilon_{22}$. Выражение $c_1\varepsilon_{11}u_1+c_2\varepsilon_{22}u_2$ представляет собой удельную работу деформации жидкой фазы, возникшую за счет избыточных остаточных поровых давлений.

При переходе от удельной работы к работе внутренних сил в пределах объема элемента возникают определенные интегралы $\int_S x_1\,dS$ и $\int_S x_2\,dS$. Рассмотрим взятие одного из интегралов на основе известной теоремы о статическом моменте площади, согласно которой статический момент равен произведению площади треугольника Δ на расстояние x_c до центра тяжести треугольника, совпадающего с пересечением его медиан:

$$\int_S x_1\,dS=x_{1c}\cdot\Delta,\quad x_{1c}=\frac{x_1^i+x_1^j+x_1^m}{3},\quad x_{2c}=\frac{x_2^i+x_2^j+x_2^m}{3}.$$

Вместо координат x_1 и x_2 используем координаты центра тяжести x_{1c} и x_{2c}. Перемещения внутри элемента в новых координатах описываются формулами

$$u_k=\frac{1}{2\Delta}[(p_i+d_ix_{1c}+n_ix_{2c})u_k^i+(p_j+d_jx_{1c}+n_jx_{2c})u_k^j+$$

$$+(p_m+d_mx_{1c}+n_mx_{2c})u_k^m].$$

Введем новую матрицу $[M]$ с элементами

$$f_i=p_i+d_ix_{1c}+n_ix_{2c},\quad f_j=p_j+d_jx_{1c}+n_jx_{2c},\quad f_m=p_m+d_mx_{1c}+n_mx_{2c},$$

тогда для перемещений внутри элемента имеем матричную запись:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=[M]\{\delta\}=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} f_i & 0 & f_j & 0 & f_m & 0 \\ 0 & f_i & 0 & f_j & 0 & f_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^m \\ u_2^m \end{pmatrix}=\{\delta\}^T[M]^T.$$

В результате квазиэнергетическое произведение примет вид:

$$(-Cu,u)=\Delta\,\{P_l\}[M]\{\delta\},\qquad \{P_l\}=(c_{11}\varepsilon_{11}\ \ c_{22}\varepsilon_{22}).$$

Согласно левой части формулы (12), сначала используется сомножитель $\{\delta\}^T$, поэтому поменяем местами сомножители $[M]\{\delta\}=\{\delta\}^T[M]^T$ и перенесем сомножитель $\{P_l\}$:

$$(-Cu,u)=\Delta\ \{\delta\}^T[M]\}^T\{P_l\}^T.$$

Необходимо согласовать выражение $[M]^T\{P_l\}^T$ с выражением $[N]^T[E_{A+B}][N]\{\delta\}$ из формулы (12). За счет отсутствия касательных напряжений в жидкой фазе матрица-столбец $\{P_l\}^T$ по размерности на единицу меньше матрицы $\{\sigma\}$. Дополним матрицу $\{P_l\}^T$ нулевым элементом и введем нулевые элементы в матрицу $[E_C]$, что позволит переписать $\{P_l\}^T$ сначала в виде произведения двух матриц, а затем при учете $\{\varepsilon\}=[N]\ \{\delta\}$ – в виде произведения трех матриц:

$$\{P_l\}^T=\begin{pmatrix}c_1\varepsilon_{11}\\ c_2\varepsilon_{22}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1&0&0\\0&c_2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}=[E_C]\{\varepsilon\}=[E_C][N]\{\delta\}.$$

За счет нулевых элементов в матрице $[M]^T$ добьемся одинаковой размерности с $[N]^T$

$$[N]^T=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix}d_i&0&n_i\\0&n_i&d_i\\d_j&0&n_j\\0&n_j&d_j\\d_m&0&n_m\\0&n_m&d_m\end{pmatrix},\quad [M]^T=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix}f_i&0&0\\0&f_i&0\\f_j&0&0\\0&f_j&0\\f_m&0&0\\0&f_m&0\end{pmatrix}.$$

Квазиэнергетическое произведение получило матричную запись:

$$(-Cu,u)=\Delta\ \{\delta\}^T[M]^T[E_C][N]\{\delta\},$$

что позволяет переписать уравнение равенства работ внутренних и внешних сил (12) в двух вариантах:

$$\{\delta\}^T(\Delta[N]^T[E_{A+B}][N]+\Delta[M]^T[E_C][N])\{\delta\}=\{\delta\}^T\{F\},$$

$$([k_1]+[k_2])\{\delta\}=\{F\},$$

и ввести матрицу жесткости для жидкой фазы $[k_2]=\Delta\,[M]^T[E_C][N]$ или

$$[k_2]=\frac{1}{4\Delta}\begin{pmatrix}f_i&0&0\\0&f_i&0\\f_j&0&0\\0&f_j&0\\f_m&0&0\\0&f_m&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\tilde{n}_1&0&0\\0&\tilde{n}_2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}d_i&0&d_j&0&d_m&0\\0&n_i&0&n_j&0&n_m\\n_i&d_i&n_j&d_j&n_m&d_m\end{pmatrix}.$$

С помощью суммарной матрицы жесткости $[k_1]+[k_2]$ записана система линейных алгебраических уравнений МКЭ для нахождения искомых узловых перемещений $\{\delta\}$.

Описанная методика построения матрицы жесткости для двухфазного элемента может быть перенесена на прямоугольный и другие конечные элементы.

Литература

1. *Мальцев, Л.Е.* Кинематическая модель грунта и биоматериалов / Л. Е. Мальцев, В.Ф. Бай, Т.В. Мальцева. – СПб.: Стройиздат, 2002. – 320 с.

2. *Мальцева, Т.В.* Моделирование двухфазного тела с учетом несущей способности жидкой фазы / Т.В. Мальцева, Е.Р. Трефилина // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16, №11. – С. 47–60.

3. *Михлин, С.Г.* Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1957. – 476 с.

4. *Мальцева, Т.В.* Введение функционала для решения обобщенной системы уравнений Ламе / Т.В. Мальцева // Вестник ТГУ. – 2003. – №5. – С. 196–201.

5. *Победря, Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – 344 с.

6. *Тимошенко, С.П.* Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. –575 с.

[4.10.2006]

ANALYSIS OF GENERALIZED LAME OPERATOR AND FINITE ELEMENT CORRESPONDING TO THE OPERATOR

L.Ye. Maltsev, T.V. Maltseva, T.V. Saltanova

An equation system of elliptic type is considered. The basic properties of the generalized differential Lame operator, formulated as the analogues of Betty and Klapeyron formulae, are analyzed using a quasi-energy product. The third Betty formula describes non-symmetry of the generalized operator. The analogue of Klapeyron indicates a contribution of capillary water into the deformation energy of a two-phase body. A practical application of the quasi-energy product consists in constructing a new finite-element, which allows to use a program complex of FEM.