

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-471-480

ИЗНОС ПОКРЫТИЯ С ПРОИЗВОЛЬНО ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПО ГЛУБИНЕ МОДУЛЕМ СДВИГА*

© 2021 г.

**Зеленцов В.Б., Лапина П.А.,
Митрин Б.И., Зеленцов Л.Б.**

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

vbzelen@gmail.com

Поступила в редакцию 18.08.2021

Защита рабочих поверхностей механизмов и машин в условиях скользящего контакта часто осуществляется нанесением защитных многослойных и функционально-градиентных покрытий, препятствующих износу рабочих поверхностей и снижающих температурный разогрев контакта. Задача обработки шлифованием поверхности оксидированных и других материалов с функционально-градиентным изменением свойств по глубине изделия приводит к необходимости контроля скорости износа и разогрева контакта от трения. Эффективности исследования процессов износа, шлифования, полирования и ранней диагностики термоупругой неустойчивости скользящего контакта способствует математическое моделирование процесса износа изделий из функционально-градиентных материалов. В качестве математической модели рассматривается контактная задача термоупругости об износе жестким абразивом функционально-градиентного покрытия с произвольно меняющимся по глубине покрытия модулем сдвига с учетом разогрева контакта от трения. Решения задачи (контактные напряжения, температура на скользящем контакте) с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени построены в виде сверток от закона внедрения и оригинала в виде контурного интеграла обратного преобразования Лапласа. Анализ полученных решений в комплексной плоскости позволяет определить области термоупругой устойчивости и неустойчивости полученных решений в пространстве безразмерных параметров задачи. Неустойчивые решения порождают понятие термоупругой неустойчивости скользящего контакта. Кроме того, построенные аналитические решения позволили исследовать влияние коэффициента функционально-градиентной неоднородности материала покрытия (безразмерного параметра задачи, характеризующего функционально-градиентный материал покрытия) на возникновение и изменение границ областей термоупругой неустойчивости скользящего контакта, а также степень его влияния на температуру, смещения, напряжения и износ функционально-градиентного материала покрытия.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, термоупругость, скользящий контакт, износ, разогрев от трения, термоупругая неустойчивость.

*Выполнено при поддержке РФФИ (гранты №№19-07-01259-а, 20-07-00949-а, 20-58-53045 ГФЕН_а).

Введение

Математическому моделированию контакта тел с функционально-градиентными покрытиями посвящено довольно много исследований [1–3]. Тем не менее внимания проблеме моделирования износа или шлифования функционально-градиентных покрытий уделяется недостаточно. Известно небольшое количество работ в этом направлении, одной из которых является [4].

При решении задач износа наиболее часто используются соотношения Арчарда [5]. Одними из первых соотношение Арчарда при исследовании износа в условиях тепловыделения от трения использовали Т.А. Dow и R.A. Burton в [6], где с помощью метода малых возмущений были исследованы условия возникновения термоупругой неустойчивости скольжения лезвия по поверхности полупространства. В.М. Александровым и Г.К. Аннакуловой были рассмотрены контактные задачи с учетом тепловыделения от трения и износа покрытия [7], а также задача о взаимном износе покрытий [8]. Попытка разработки термодинамической модели термомеханических явлений на контакте, учитывающей трение и износ, была предпринята в [9, 10]. В [11–15] для решения контактных задач термоупругости об износе использовалось интегральное преобразование Лапласа с решением в виде функциональных рядов по полюсам подынтегральных функций. Метод решения позволил установить параметрические границы термоупругой неустойчивости скользящего контакта. В [16] методом интегральных преобразований контактная задача о скольжении упругого покрытия по поверхности другого покрытия с учетом трения, износа и тепловыделения от трения сведена к решению дифференциального уравнения, рассмотрены условия возникновения термоупругой неустойчивости. Квазистатическая и динамическая несвязанные контактные задачи термоупругости о трении и износе стержня рассматривались в [17]. Условия возникновения термоупругой неустойчивости при взаимном износе поверхностей из различных материалов рассматривались в [18, 19]. Связанностью полей деформаций и температуры в перечисленных публикациях пренебрегали и рассматривали задачи несвязанной термоупругости. Связанная задача термоупругости об износе покрытия с учетом фрикционным тепловыделения в квазистатической постановке рассматривалась в [20].

1. Постановка задачи износа

Для исследования влияния функционально-градиентной неоднородности материала покрытия на процесс его износа рассматривается квазистатическая контактная задача о скольжении жесткой теплоизолированной полуплоскости-абразива I ($h \leq x < \infty$), движущейся с постоянной скоростью V по верхней поверхности ($x = h$) упругого теплопроводящего покрытия (полосы) толщиной h ($0 \leq x \leq h$), нижняя грань которого жестко сцеплена с недеформируемой, нетеплопроводной подложкой в виде полуплоскости II ($\infty < x < 0$). Модуль сдвига упругого покрытия $\mu(x)$, $0 \leq x \leq h$, является функцией глубины x . В процессе скольжения полуплоскости-абразива I по верхней грани упругого покрытия происходит износ поверхности. Поток тепла, образующийся на контакте за счет трения, направлен в покрытие. С начального момента времени движущаяся вдоль оси y полуплоскость-абразив I деформирует верхнюю ($x = h$) грань упругого покрытия, смещаясь в направлении, противоположном оси x , по закону $\Delta(t)$. До начального момента покрытие находилось в покое, а его температура равнялась нулю.

Распределения температуры, напряжений и смещений в покрытии, согласно постановке задачи, являются функциями только координаты x и времени t [11–15]. Дифференциальные уравнения теории упругости в отсутствие массовых сил имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (1)$$

при этом напряжения $\sigma_{xx}(x, t)$, $\sigma_{xy}(x, t)$ определяются соотношениями Дюамеля – Неймана

$$\sigma_{xx} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \mu(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T \right), \quad \sigma_{xy} = \mu(x) \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ – вертикальные и горизонтальные смещения в покрытии, $T(x, t)$ – распределение температуры в покрытии, $\mu(x)$ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного расширения материала покрытия.

Распределение температуры T описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (3)$$

где κ – коэффициент теплопроводности.

Граничные условия задачи термоупругости ($t > 0$) имеют вид:

$$u(h, t) = -\Delta(t) + u_w(t), \quad \sigma_{xy}(h, t) = -f \sigma_{xx}(h, t), \quad (4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad w(0, t) = 0, \quad (5)$$

в которых f – коэффициент трения, $u_w(t)$ – осадка полуплоскости-абразива I за счет износа покрытия. Используется модель абразивного износа [5] в интегральной форме

$$u_w(t) = -fVK^* \int_0^t \sigma_{xx}(h, \tau) d\tau, \quad t > 0, \quad (6)$$

где $\sigma_{xx}(h, \tau)$ – нормальные напряжения сжатия на контакте, K^* – коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного с контакта материала.

Температурные граничные условия ($t > 0$) имеют вид:

$$K \frac{\partial T(h, t)}{\partial x} = Q(t), \quad (7)$$

$$K \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = kT(0, t), \quad (8)$$

в которых K – коэффициент теплопроводности материала покрытия, k – коэффициент теплообмена, $Q(t) = fV(-\sigma_{xx}(h, t))$ – количество тепла, образующегося на контакте из-за трения [21].

Начальные условия, налагаемые на смещения и температуру в покрытии, нулевые:

$$u(x, 0) = w(x, 0) = T(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq h. \quad (9)$$

Заметим, что вертикальные смещения $u(x, t)$, нормальные напряжения $\sigma_{xx}(h, t)$ и температура $T(x, t)$ в покрытии определяются независимо от горизонтальных сме-

щений $w(x, t)$. Горизонтальные смещения $w(x, t)$ определяются из (1), (4), (5) через нормальные напряжения $\sigma_{xx}(h, t)$.

2. Точное решение задачи для произвольного закона $\mu(x)$

Решение поставленной контактной задачи строится с помощью интегрального преобразования Лапласа [22] и имеет вид:

$$T(x, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{\hat{V}}{\alpha} \cdot \frac{B'(h)}{B(h)} \sum_{k=0}^{\infty} C_T(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$u(x, t) = -\frac{B(x)}{B(h)} \Delta(t) + \sum_{k=0}^{\infty} C_u(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{xx}(x, t) = \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)B(h)} \left(\Delta(t) - \sum_{k=0}^{\infty} C_\sigma(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t) \right), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (12)$$

где

$$B(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\mu(\xi)}, \quad 0 \leq x \leq h, \quad C_\alpha(x, z) = \frac{N_\alpha(x, z)}{t_k R'(z)}, \quad \alpha = T, u, \sigma,$$

$$D(z, t) = \int_0^t \Delta(\tau) \exp(z(t-\tau)/t_k) d\tau, \quad t > 0,$$

$$N_T(x, z) = \sqrt{z} \left(Bi \cdot \operatorname{sh} \sqrt{z} \frac{x}{h} + \sqrt{z} \operatorname{ch} \sqrt{z} \frac{x}{h} \right), \quad N_\sigma(x, z) = zr(h, z) - R(z),$$

$$N_u(x, z) = zr(h, z) \frac{B(x)}{B(h)} - \hat{V} \frac{hB'(h)}{B(h)} (r(x, z) - Bi) - \frac{B(x)}{B(h)} R(z),$$

$$r(x, z) = Bi \cdot \operatorname{ch} \sqrt{z} \frac{x}{h} + \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} \frac{x}{h}, \quad R(z) = zr(h, z) - \hat{V} \eta ((1 - k_w) r(h, z) - Bi),$$

$$z = pt_\kappa, \quad t_\kappa = \frac{h^2}{\kappa}, \quad Bi = \frac{kh}{K}, \quad k_w = \frac{1-\nu}{1+\nu} \cdot \frac{K \cdot K^*}{\alpha \kappa}, \quad \hat{V} = \frac{fV\alpha}{K} \cdot \frac{2\mu(1+\nu)h}{1-2\nu}, \quad \eta = \frac{hB'(h)}{B(h)}.$$

Значения ζ_k определяются из решения уравнения $R(z) = 0$ в комплексной плоскости z . Износ $u_w(t)$ материала покрытия на контакте вычисляется по формуле

$$u_w(t) = k_w \hat{V} \frac{hB'(h)}{B(h)} \sum_{k=0}^{\infty} C_w(\zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad t > 0. \quad (13)$$

Горизонтальные смещения $w(x, t)$ определяются из (1), (4), (5) и после интегрирования в (1) записываются формулой

$$w(x, t) = -fB(x)\sigma_{xx}(h, t), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0. \quad (14)$$

3. Области устойчивых и неустойчивых решений

Исследование решений задачи $T(x, t)$, $u(x, t)$, $\sigma_{xx}(x, t)$, представленных формулами (10)–(12), показывает, что при $\operatorname{Re} \zeta_k < 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, решения задачи устойчивы и с увеличением времени t стремятся к стационарному состоянию. Если хотя бы у одного ζ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) $\operatorname{Re} \zeta_k > 0$, то амплитуда решения неограниченно возрастает

при $t \rightarrow \infty$ и осциллирует с частотой $\text{Im } \zeta_k \neq 0$, что свидетельствует о неустойчивости решения задачи.

Области I–IV устойчивых и неустойчивых решений задачи компактно представляются в пространстве безразмерных параметров \hat{V} , k_w , Bi , η . На рис. 1 на плоскости \hat{V} , k_w для $Bi = 100$ представлены области устойчивых I, II и неустойчивых III, IV решений задачи с указанием границ для значений $\eta = 0,1; 1,0; 10,0$. Расчеты показывают, что при фиксированных k_w , \hat{V} , η влияние параметра Bi на расположение границ областей устойчивых и неустойчивых решений заключается в основном в том, что точка пересечения границ I–IV, лежащая на оси \hat{V} (см. рис. 1), сдвигается в зависимости от значения Bi и имеет координату $\hat{V}_* = 2Bi \cdot \eta^{-1} (2 + Bi)^{-1}$ ($k_w = 0$). При $\eta = 1$ это совпадает с результатами [15, 23].

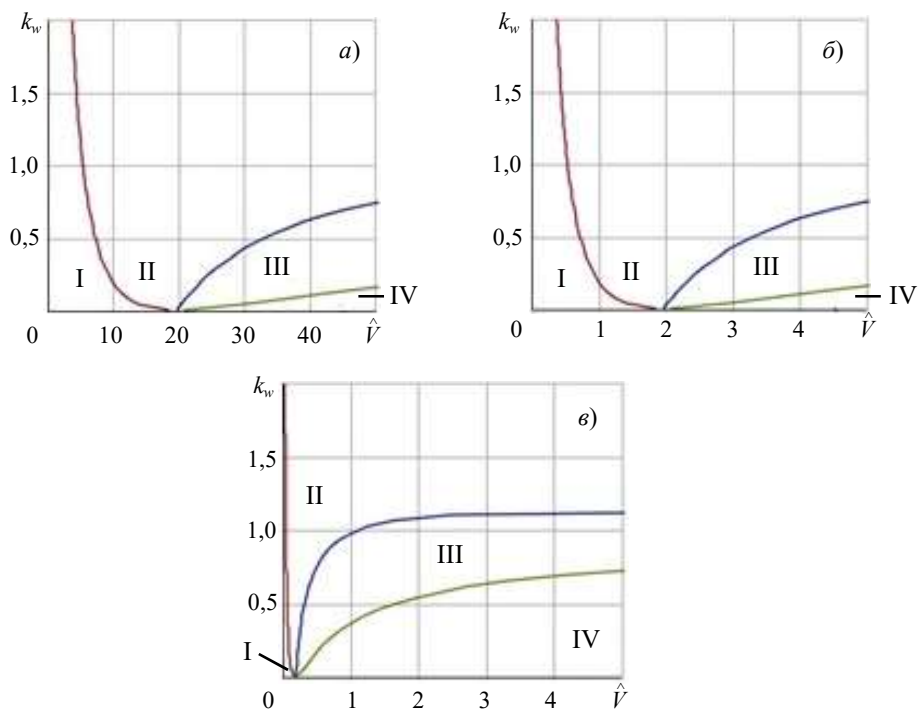


Рис. 1. Области устойчивых I, II и неустойчивых III, IV решений при $Bi = 100$ и η : а) 0,1, б) 1,0, в) 10,0

Приведенная для \hat{V}_* формула показывает влияние параметра η (см. рис. 1) на расположение границ областей I–IV. С уменьшением параметра η увеличивается область устойчивых решений задачи.

4. Особенности износа функционально-градиентного материала покрытия

В п. 2 были получены точные формулы для основных параметров: температуры $T(x, t)$ (10), смещений $u(x, t)$ (11), напряжений $\sigma_{xx}(x, t)$ (12), а также износа $u_w(t)$ (13) на скользящем контакте. Эти формулы зависят от произвольного модуля сдвига $\mu(x)$ покрытия и связаны с ним через $B(x)$ и параметр η . Для численной реализации

решений (10)–(13) предполагается, что модуль сдвига $\mu(x)$ покрытия изменяется по параболическому закону

$$\mu(x) = \mu_0 \left(a \left(\frac{x}{h} \right)^2 + b \frac{x}{h} + c \right), \quad 0 \leq x \leq h, \quad (15)$$

где

$$a = 2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 2 \frac{\mu_{1/2}}{\mu_0} + 1 \right), \quad b = - \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 4 \frac{\mu_{1/2}}{\mu_0} + 3 \right),$$

$$c = 1, \quad \mu_0 = \mu(0), \quad \mu_1 = \mu(h), \quad \mu_{1/2} = \mu(h/2).$$

При $\mu_{1/2} = (\mu_1 + \mu_0)/2$ зависимость (15) становится линейной. Закон $\Delta(t)$ внедрения жесткой полуплоскости-абразива I в покрытие задается формулой

$$\Delta(t) = \Delta_0 (e^{\varepsilon t} H(1-t) + H(t-1)), \quad t > 0, \quad \varepsilon = \ln 2, \quad (16)$$

в которой интервал $0 < t \leq 1$ – активный временной участок внедрения, интервал $t > 1$ – пассивный временной участок внедрения, а $H(t)$ – функция Хевисайда.

Изучается влияние параметра η рассматриваемой задачи термоупругости об износе жесткой полуплоскостью-абразивом I упругой полосы из функционально-градиентного материала (алюминий с градиентным содержанием оксида алюминия), на основные характеристики контакта: температуру $T(h, t)$ из (10), контактные напряжения $p(t) = -\sigma_{xx}(h, t)$ из (12), а также на износ покрытия $u_w(t)$ из (13). Функционально-градиентный материал покрытия характеризуется значением модуля сдвига $\mu_1 = \mu(h) = 125,0$ ГПа, соответствующим оксиду материала на контакте, и значением на границе с подложкой $\mu_0 = \mu(0) = 25,0$ ГПа, а также параметрами $\nu = 0,34$, $\kappa = 88,1 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\alpha = 22,9 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $K = 209,3$ Вт/(м·К), $f = 0,47$, $h = \Delta_0 = 10$ мм. Рассматриваются три разных значения модуля сдвига на середине покрытия $\mu_{1/2} = \mu(h/2)$, которые вместе с соответствующими им значениями η представлены в таблице 1.

Таблица 1

Зависимость параметра η от значений $\mu_{1/2}$			
$\mu_{1/2}$, ГПа	50	75	100
η	0,361287	0,497067	0,619564

Износ поверхности покрытия на глубину Δ_0 заканчивается при $t = t_w$, когда износ покрытия $u_w(t)$ совпадает с Δ_0 , а контактные напряжения обращаются в ноль ($p(t) = -\sigma_{xx}(h, t) = 0$). Время t_w называется временем износа толщины Δ_0 рассматриваемого покрытия. Положив коэффициент износа $K^* = 1,0 \cdot 10^{-11}$ м²/Н, получаем значения безразмерных параметров задачи $k_w = 0,511$ и $Bi = 10^5$. Влияние параметра η на основные параметры скользящего контакта иллюстрируется на рис. 2а–в.

Зависимости 1, 2, 3 построены при $\mu_{1/2} = 50, 75, 100$ ГПа соответственно. Графики на рис. 2 показывают, что регулирование параметров модуля сдвига $\mu(x)$ по толщине покрытия позволяет увеличить или уменьшить износ покрытия, управлять амплитудой напряжений и температуры на контакте.

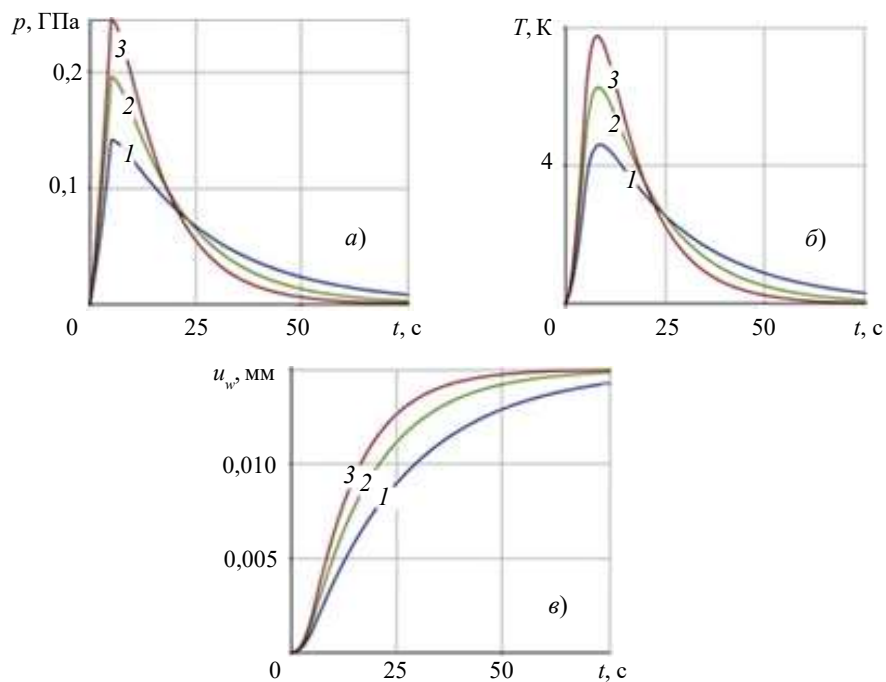


Рис. 2. Зависимость от времени: а) контактного давления $p(t) = -\sigma_{xx}(h, t)$, б) температуры на контакте $T(h, t)$, в) износа $u_w(t)$

Заключение

Рассмотренная контактная задача термоупругости об износе на термофрикционном скользящем контакте покрытия в виде полосы из функционально-градиентного материала с произвольно меняющимся по глубине покрытия модулем сдвига позволила установить: формулу функционального параметра, характеризующего функционально-градиентный материал покрытия с переменным по глубине модулем сдвига; влияние функционального параметра материала покрытия на изменение границ областей термоупругой неустойчивости; степень влияния функционального параметра материала покрытия на его разогрев и износ.

Список литературы

1. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2007. Vol. 49. Iss. 2. P. 161–182. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006.
2. Altenbach H., Eremeyev V.A. Eigen-vibrations of plates made of functionally graded material. *Computers, Materials and Continua*. 2009. Vol. 9. No 2. P. 153–177. DOI: 10.3970/cmcc.2009.009.153.
3. Selvadurai A.P.S., Katebi A. The Boussinesq–Mindlin problem for a non-homogeneous elastic halfspace. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. Vol. 67. Iss. 3. P. 68-1 – 68-15. DOI: 10.1007/s00033-016-0661-z.
4. Singh S., Singh R. Wear modelling of Al-Al₂O₃ functionally graded material prepared by FDM assisted investment castings using dimensionless analysis. *Journal of Manufacturing Processes*. 2015. Vol. 20. Pt. 3. P. 507–514. DOI: 10.1016/j.jmapro.2015.01.007.
5. Archard J.F. Contact and rubbing of flat surfaces. *Journal of Applied Physics*. 1953. Vol. 24. Iss. 8. P. 981–988. <https://doi.org/10.1063/1.1721448>.

6. Dow T.A., Burton R.A. The role of wear in the initiation of thermoelastic instabilities of rubbing contact. *Journal of Lubrication Technology*. 1973. Vol. 95. Iss. 1. P. 71–75. DOI: 10.1115/1.3451739.
7. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Контактная задача термоупругости с учетом износа и тепловыделения от трения. *Трение и износ*. 1990. Т. 11. №1. P. 24–28.
8. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения. *Трение и износ*. 1992. Т. 13. №1. С. 154–160.
9. Zmitrowicz A. A thermodynamical model of contact, friction and wear: I governing equations. *Wear*. 1987. Vol. 114. Iss. 2. P. 135–168. DOI: 10.1016/0043-1648(87)90086-X.
10. Zmitrowicz A. A thermodynamical model of contact, friction and wear: II constitutive equations for materials and linearized theories. *Wear*. 1987. Vol. 114. Iss. 2. P. 169–197. DOI: 10.1016/0043-1648(87)90087-1.
11. Евтушенко А.А., Пырьев Ю.А. Влияние изнашивания на развитие термоупругой неустойчивости фрикционного контакта. *Изв. РАН. МТТ*. 1997. №1. С. 114–121.
12. Пырьев Ю.А., Грилицкий Д.В. Нестационарная задача фрикционного контакта для цилиндра с учетом тепловыделения и износа. *ПМ и ТФ*. 1996. Т. 37. № 6. С. 99–104.
13. Awrejcewicz J., Pyryev Yu. Thermoelastic contact of a rotating shaft with a rigid bush in conditions of bush wear and stick-slip movements. *International Journal of Engineering Science*. 2002. Vol. 40. Iss. 10. P. 1113–1130. DOI:10.1016/S0020-7225(02)00008-3.
14. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Lubyagin I.A. Effect of wear on frictional heating and thermoelastic instability of sliding contact. *Computational Continuum Mechanics*. 2016. Vol. 9. No 4. P. 430–442. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.36.
15. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Lubyagin I.A. Wear resistance of coating materials under the frictional heating conditions. *Journal of Friction and Wear*. 2017. Vol. 38. Iss. 4. P. 265–271. DOI: 10.3103/S1068366617040158.
16. Belyakov N.S., Nosko A.P. Thermoelastic problem of friction of plane-parallel layers with allowance for nonstationarity of thermal processes. *Journal of Friction and Wear*. 2010. Vol. 31. Iss. 5. P. 317–325. DOI: 10.3103/S1068366610050016.
17. Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M. Frictional wear of a thermoelastic beam. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2000. Vol. 242. Iss. 2. P. 212–236. DOI: 10.1006/jmaa.1999.6652.
18. Papangelo A., Ciavarella M. The effect of wear on ThermoElastic Instabilities (TEI) in bimaterial interfaces. *Tribology International*. 2020. Vol. 142. P. 105977–105983. DOI: 10.1016/j.triboint.2019.105977.
19. Papangelo A., Ciavarella M. Can wear completely suppress thermoelastic instabilities? *Journal of Tribology. ASME*. 2020. Vol. 142. Iss. 5. P. 051501-1–051501-3. DOI: 10.1115/1.4045818.
20. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Lubyagin I.A., Kudish I.I. Diagnostics of wear thermoelastic instability based on sliding contact parameter monitoring. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2019. Vol. 84. Iss. 2. P. 345–365. DOI: 10.1093/imamat/hxy061.
21. Bowden F.P., Tabor D. *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1988. 374 p.
22. Диткин В.Ф., Прудников А.П. *Операционное исчисление*. М.: Высшая школа, 1975. 407 с.
23. Zelentsov V.B., Mitrin B.I. Thermoelastic instability in the quasi-static coupled thermoelasticity problem dealt with the sliding contact with frictional heating. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. Iss. 1. P. 58–69. DOI: 10.3103/S0025654419010059.

References

1. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci*. 2007. Vol. 49. Iss. 2. P. 161–182. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006.
2. Altenbach H., Eremeyev V.A. Eigen-vibrations of plates made of functionally graded material. *Computers, Materials and Continua*. 2009. Vol. 9. No 2. P. 153–177. DOI: 10.3970/cm.2009.009.153.

3. Selvadurai A.P.S., Katebi A. The Boussinesq–Mindlin problem for a non-homogeneous elastic halfspace. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. Vol. 67. Iss. 3. P. 68–1–68–15. DOI: 10.1007/s00033-016-0661-z.
4. Singh S., Singh R. Wear modelling of Al–Al₂O₃ functionally graded material prepared by FDM assisted investment castings using dimensionless analysis. *J. Manuf. Process*. 2015. Vol. 20. Pt. 3. P. 507–514. DOI: 10.1016/j.jmapro.2015.01.007.
5. Archard J.F. Contact and rubbing of flat surfaces. *J. Appl. Phys.* 1953. Vol. 24. Iss. 8. P. 981–988. <https://doi.org/10.1063/1.1721448>.
6. Dow T.A., Burton R.A. The role of wear in the initiation of thermoelastic instabilities of rubbing contact. *Journal of Lubrication Technology*. 1973. Vol. 95. Iss. 1. P. 71–75. DOI: 10.1115/1.3451739.
7. Alexandrov V.M., Annakulova G.K. Kontaktnaya zadacha termouprugosti s uchetom iznosa i teplovydeleniya ot treniya [Contact problem of thermoelasticity under the conditions of wear and heat release induced by friction]. *Trenie i iznos [Journal of Friction and Wear]*. 1990. Vol. 11. No 1. P. 24–28 (In Russian).
8. Alexandrov V.M., Annakulova G.K. Vzaimodeystvie pokrytiy tel s uchetom deformiruемости, iznosa i teplovydeleniya ot treniya [Interaction of the coatings of bodies allowing for deformability, wear and heat release due to friction]. *Trenie i iznos [Journal of Friction and Wear]*. 1992. Vol. 13. No 1. P. 154–160 (In Russian).
9. Zmitrowicz A. A thermodynamical model of contact, friction and wear: I governing equations. *Wear*. 1987. Vol. 114. Iss. 2. P. 135–168. DOI: 10.1016/0043-1648(87)90086-X.
10. Zmitrowicz A. A thermodynamical model of contact, friction and wear: II constitutive equations for materials and linearized theories. *Wear*. 1987. Vol. 114. Iss. 2. P. 169–197. DOI: 10.1016/0043-1648(87)90087-1.
11. Evtushenko A.A., Pyryev Yu.A. Vliyaniye iznashivaniya na razvitiye termouprugoy neustoychivosti friktsionnogo kontakta [Influence of wear on the development of thermoelastic instability of a frictional contact]. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1997. No 1. P. 114–121 (In Russian).
12. Pyryev Yu.A., Grilitsky D.V. Nestatsionarnaya zadacha friktsionnogo kontakta dlya tsilindra s uchetom teplovydeleniya i iznosa [The non-stationary problem of the frictional contact for a cylinder taking into account heat release and wear]. *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika [Applied Mathematics and Technical Physics]*. 1996. Vol 37. No 6. P. 99–104 (In Russian).
13. Awrejcewicz J., Pyryev Yu. Thermoelastic contact of a rotating shaft with a rigid bush in conditions of bush wear and stick-slip movements. *Int. J. Eng. Sci.* 2002. Vol. 40. Iss. 10. P. 1113–1130. DOI:10.1016/S0020-7225(02)00008-3.
14. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Lubyagin I.A. Effect of wear on frictional heating and thermoelastic instability of sliding contact. *Computational Continuum Mechanics*. 2016. Vol. 9. No 4. P. 430–442. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.4.36.
15. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Lubyagin I.A. Wear resistance of coating materials under the frictional heating conditions. *Journal of Friction and Wear*. 2017. Vol. 38. Iss. 4. P. 265–271. DOI: 10.3103/S1068366617040158.
16. Belyakov N.S., Nosko A.P. Thermoelastic problem of friction of plane-parallel layers with allowance for nonstationarity of thermal processes. *Journal of Friction and Wear*. 2010. Vol. 31. Iss. 5. P. 317–325. DOI: 10.3103/S1068366610050016.
17. Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M. Frictional wear of a thermoelastic beam. *J. Math. Anal. Appl.* 2000. Vol. 242. Iss. 2. P. 212–236. DOI: 10.1006/jmaa.1999.6652.
18. Papangelo A., Ciavarella M. The effect of wear on ThermoElastic Instabilities (TEI) in bimaterial interfaces. *Tribol. Int.* 2020. Vol. 142. P. 105977–105983. DOI: 10.1016/j.triboint.2019.105977.
19. Papangelo A., Ciavarella M. Can wear completely suppress thermoelastic instabilities? *J. Tribol-T. ASME*. 2020. Vol. 142. Iss. 5. P. 051501-1–051501-3. DOI: 10.1115/1.4045818.
20. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Lubyagin I.A., Kudish I.I. Diagnostics of wear thermoelastic instability based on sliding contact parameter monitoring. *J. Appl. Math.* 2019. Vol. 84. Iss. 2. P. 345–365. DOI: 10.1093/imamat/hxy061.

21. Bowden F.P., Tabor D. *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford. Clarendon Press. 1988. 374 p.

22. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operatsionnoe ischislenie [Operational Calculus]*. Moscow. Vyshaya shkola Publ. 1975. 407 p. (In Russian).

23. Zelentsov V.B., Mitrin B.I. Thermoelastic instability in the quasi-static coupled thermoelasticity problem dealt with the sliding contact with frictional heating. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. Iss. 1. P. 58–69. DOI: 10.3103/S0025654419010059.

WEAR OF COATING WITH A SHEAR MODULE ARBITRALLY CHANGING BY DEPTH

Zelentsov V.B., Lapina P.A., Mitrin B.I., Zelentsov L.B.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

The protection of the working surfaces of mechanisms in sliding contact conditions is often carried out by applying protective multilayer and functionally graded coatings, which prevent wear of the working surfaces and reduce the temperature heating of the contact. The problem of grinding the surface of oxidized and other materials with a functionally graded change in properties along the depth of the product leads to the need to control the wear rate and contact heating from friction. The effectiveness of studying the processes of wear, grinding, polishing and early diagnostics of thermoelastic instability of sliding contact is facilitated by mathematical modeling of the process of wear of products made of functionally graded materials. The thermoelastic contact problem of the wear of a functionally graded coating with an arbitrarily varying shear modulus with a hard abrasive, taking into account the heating of the contact from friction, is considered. The solutions of the problem are constructed in the form of Laplace convolutions. Analysis of the obtained solutions in the complex plane makes it possible to determine the regions of thermoelastic stability and instability of the solutions in the space of dimensionless parameters of the problem. Unstable solutions give rise to the concept of thermoelastic instability of a sliding contact. The constructed analytical solutions made it possible to study the effect of the functionally graded inhomogeneity coefficient of the coating material on the thermoelastic instability regions of the sliding contact, temperature, displacements, stresses and wear of the functionally graded coating material.

Keywords: functionally graded materials, thermoelasticity, sliding contact, wear, heating from friction, thermoelastic instability.