

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-462-470

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ОБЪЕМ ПОР ПРИ ИНДЕНТИРОВАНИИ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ*

© 2021 г.

**Зеленцов В.Б.¹, Загребнева А.Д.¹,
Лапина П.А.¹, Айзикович С.М.¹, Ванг Юн-Че²**

¹*Донской государственной технической университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

²*National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan*

vbzelen@gmail.com

Поступила в редакцию 10.09.2021

Исследование в материале с пустотами или незаполненными порами функции относительного объема незаполненных пор под действием нагрузки проводится на примере решения статической контактной задачи об индентировании слоя из материала с микроструктурой в виде пустот или незаполненных пор. Жесткий полосовой индентор с плоской формой основания вдавливается в слой из материала с пустотами, который сцеплен по нижней поверхности с недеформируемым основанием. Сформулированная пространственная задача об индентировании слоя из материала с незаполненными порами сведена к решению плоской контактной задачи об индентировании полосы из того же материала. Плоская контактная задача сведена к решению интегрального уравнения I рода типа свертки Фурье относительно неизвестных контактных напряжений. Разностное ядро интегрального уравнения имеет логарифмическую особенность. Дифференцированием и обращением сингулярной составляющей уравнение приводится к уравнению II рода, решение которого построено методом последовательных приближений в виде асимптотического разложения по безразмерному параметру задачи. Полученное решение интегрального уравнения (контактные напряжения) и сила, действующая на индентор, позволили исследовать влияние изменения неклассических модулей материала слоя с незаполненными порами – модуля связанности и модуля жесткости пор – как на основные характеристики контакта, так и на распределение функции относительного объема пор. Увеличение модуля связанности приводит к увеличению податливости материала слоя с порами, а увеличение модуля жесткости пор приводит к увеличению жесткости материала слоя с порами, что согласуется со свойствами пористых материалов. Исследования также показали, что максимальное значение функции распределения относительного объема пор в материале слоя с порами достигается под центром основания индентора независимо от изменения неклассических модулей материала с порами.

Ключевые слова: материал с пустотами или незаполненными порами, теория микродилатации, индентирование, контактная задача, контактные напряжения, относительный объем пор, модуль связанности, модуль жесткости пор, параметр диффузии пор.

*Выполнено при поддержке РФФИ (гранты №№19-07-01259-а, 20-07-00949-а, 20-58-53045 ГФЕН_а) и РНФ (грант №22-49-08014).

Введение

Первыми работами в области моделирования сред со сложной структурой являются статьи Р.Д. Миндлина 1960-х годов [1–3], в которых была предложена градиентная теория. Градиентная теория обобщает многие частные случаи: теорию сред Коссера [4], теорию упругости, учитывающую изменение градиента напряжений (strain gradient elasticity theory) [5–7], теорию микродилатации (micro-dilatation theory) [8–13] и другие теории, представленные в [14–16]. Нелинейная теория микродилатации пористых твердых тел впервые была предложена в работе С. Коуина и Дж. Нунциато [8]. Этими же авторами в [9] была опубликована линейная версия микродилатации и там же показана слабая единственность и слабая устойчивость ее решений. Перераспределение пористости в среде под нагрузкой связано с понятием микродилатации. В рамках теории микродилатации были рассмотрены задачи: чистый изгиб стержней [9], объемные и поверхностные волны в пористых материалах [17, 18]. Контактные задачи для пористых сред рассматривались в [19, 20]. В [21] рассмотрена задача о пористой пластине. Задача о трещине, дислоцированной в пористом материале, рассмотрена в [22]. Ряд работ посвящен численному исследованию пористых материалов. Для получения численных решений статических задач для среды с порами использовался метод конечных элементов [23, 24]. В [25] методом Петрова – Галеркина исследовано влияние пористости на напряжения (a meshless local Petrov – Galerkin). Численное трехмерное моделирование композитных ячеистых метаматериалов представлено в [26].

1. Математическая модель индентирования упругого материала с порами

Описание состояния упругой среды с порами в отсутствии массовых сил осуществляется с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \beta\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= 0, \\ \mu\Delta w - (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \beta\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 0, \\ \alpha\Delta\Phi - \xi\Phi - \beta\theta &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

в которой $u(x, z)$ и $w(x, z)$ – горизонтальные и вертикальные смещения упругой среды; $\theta = \partial u / \partial x + \partial w / \partial z$ – объемная деформация; λ и μ – коэффициенты Ламе; β , ξ , α – модуль связанности, модуль жесткости пор, параметр диффузии пор; $\Phi(x, z)$ – функция относительного объема пор [8, 9]. Выполнение последнего уравнения системы (1) гарантируется выполнением условий [17]

$$\alpha > 0, \quad \xi > 0, \quad (3\lambda + 2\mu)\xi > 3\beta^2.\tag{2}$$

Определение упругих модулей материалов с незаполненными порами проводится с помощью наноиндентирования. Математическая модель индентирования материала среды с микроструктурой в виде пустот или незаполненных пор заключается в постановке и решении соответствующей контактной задачи, в результате решения которой определяются все основные характеристики контакта индентора с материалом среды.

Образец из испытуемого материала с наличием незаполненных пор представ-

ляется в виде пространственного слоя $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leq z \leq h$ толщиной h , который жестко сцеплен с недеформируемым основанием по нижней границе при $z = 0$.

Жесткий полосовой индентор ($-a \leq x \leq a$, $-\infty < y < \infty$, $z = h$) шириной $2a$ с плоской формой основания и бесконечный вдоль оси y внедряется на глубину δ ($\delta > 0$) с помощью силы P_o , действующей в направлении, противоположном оси z . В каждом сечении плоскостью $y = \text{const}$, параллельной плоскости zOx , будет наблюдаться одинаковое напряженно-деформированное состояние, не зависящее от координаты y . Проведя сечение слоя $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leq z \leq h$ плоскостью $y = \text{const}$, параллельной плоскости xOz , решение исходной контактной задачи сведется к решению соответствующей контактной задачи в рамках плоской деформации в системе координат xOz для полосы ($-\infty < x < \infty$, $0 \leq z \leq h$) из того же материала с незаполненными порами.

Плоская контактная задача дилатационной теории упругости об осадке под действием силы P_o жесткого индентора с плоской формой основания шириной $2a$ в упругую полосу из материала с незаполненными порами определяется смешанными граничными условиями:

$$z=h: \quad w(x,h)=-\delta, \quad -a < x < a, \quad \sigma_{zz}(x,h)=0, \quad -\infty < x < -a, \quad a < x < \infty, \quad (3)$$

$$\sigma_{zz}(x,h)=-\varphi_0(x), \quad -a < x < a, \quad \sigma_{xz}(x,h)=0, \quad -\infty < x < \infty; \quad (4)$$

$$z=0: \quad u(x,0)=0, \quad -\infty < x < \infty, \quad w(x,0)=0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (5)$$

где $\varphi_0(x)$ – неизвестные контактные напряжения.

В предположении, что функция относительного объема пор $\Phi(x, z)$ ввиду линейности задачи может достигать наибольшего или наименьшего значения на границе полосы при $z = h$ и $z = 0$, то нормальная производная от $\Phi(x, z)$ на границах $z = h$ и $z = 0$ зануляется

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, h) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (6)$$

Совокупность граничных условий (3)–(6) и дифференциальных уравнений среды с незаполненными порами (1) составляют постановку контактной задачи об индентировании полосы из материала с незаполненными порами.

2. Интегральное уравнение контактной задачи и его решение

Для решения сформулированной в п. 1 контактной задачи дилатационной теории упругости используется интегральное преобразование Фурье по продольной координате x , применяемое к (1), (3)–(6).

Интегральное уравнение рассматриваемой контактной задачи имеет вид

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi, \quad |x| < 1, \quad \lambda = \frac{h}{a}, \quad (7)$$

$$k(t) = \int_0^{\infty} K(u) \cos ut \, du, \quad (8)$$

$$K(u) = \kappa_1 \frac{rL(u)}{u\Delta(u)}, \quad (9)$$

$$L(u) = r \operatorname{sh} r [2\gamma_0 u + (\eta H u^2 - \kappa \gamma_0) \operatorname{sh}(2u)] - 2\eta H u^3 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} r, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta(u) = & r^2 \operatorname{sh} r [\kappa_2 \operatorname{sh}^2 u + 4l^2 u^2 + \kappa^2 - 1] + \\ & + \kappa_3 r [2u^3 (\gamma_1 \operatorname{sh} u - 4l^2 u \operatorname{ch} u) + r \operatorname{sh} r (2(u^2 \gamma_1 - \kappa \gamma_0) \operatorname{sh}^2 u - \gamma_0 (1 + \kappa)) + \\ & + 2u^3 \operatorname{ch} r (-\gamma_1 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + 4l^2 u)] + 2\kappa_3^2 u^2 h^{-4} [(-r^2 (4l^2 u^2 - \gamma_0) + \\ & + 2\gamma_0 l^2 u^2) \operatorname{sh} r \operatorname{sh}^2 u + ru (4l^2 u^2 - \gamma_0) \operatorname{ch} r \operatorname{ch} u - 1] \operatorname{sh} u], \quad (11) \end{aligned}$$

где $\varphi(x) = a\delta^{-1}\Delta^{-1}\varphi_0(ax)$ – безразмерные контактные напряжения,

$$\begin{aligned} r = & \sqrt{u^2 + \gamma_0}, \quad \gamma_0 = (\xi + \beta H)h^2\alpha^{-1}, \quad \gamma_1 = 1 - \kappa + l^2(3\kappa - 1), \\ \kappa_1 = & l^2(l^2 - 1)(1 + \kappa)\gamma_0^{-1}, \quad \kappa_2 = 2(l^2 - 1)(1 - \kappa)\kappa, \quad \kappa_3 = \eta H \gamma_0^{-1}, \quad (12) \\ H = & \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}, \quad l^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \eta = \frac{\beta(\kappa - 1)}{\xi}, \quad \kappa = \frac{1 + l^2 - H\beta\xi^{-1}}{1 - l^2 - H\beta\xi^{-1}}. \end{aligned}$$

Решение интегрального уравнения (7) в виде разложения по параметру $\lambda = h/a$ с сохранением членов до λ^{-4} имеет вид [27]:

$$\varphi(x) = \frac{P}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[1 - \frac{2d_1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{2} - x^2 \right) - \frac{4d_2}{\lambda^4} \left(\frac{7}{8} - x^2 - x^4 \right) \right] + O(\lambda^{-6}), \quad (13)$$

в котором коэффициенты $d_k, k = 1, 2, 3, \dots$, представлены формулами

$$d_0 = \int_0^\infty (1 - uK(u) - \exp(-u))u^{-1} du, \quad (14)$$

$$d_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^\infty (1 - uK(u))u^{2k-1} du, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

а постоянная P с сохранением членов до λ^{-4} дается формулой

$$P = \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \pi \left[\ln 2\lambda - d_0 - \frac{d_1}{\lambda^2} - \frac{d_1^2}{4\lambda^2} - \frac{9d_2}{4\lambda^4} \right]^{-1}. \quad (16)$$

Безразмерные смещения свободной поверхности полосы вне области контакта $w_0(x) = \delta^{-1}w(x, h)$ определяются левой частью интегрального уравнения, отнесенной к π :

$$w_0(x) = \frac{w(x, h)}{\delta} = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) k \left(\frac{\xi - x}{\lambda} \right) d\xi, \quad 1 < |x| < \infty, \quad \lambda_0 < \lambda < \infty, \quad (17)$$

где $k(t)$ с сохранением λ^{-4} определяется формулой

$$k(t) = -\ln |t| + d_0 + d_1 t^2 + d_2 t^4 + O(t^6), \quad |t| < \infty, \quad (18)$$

параметр $\lambda_0 \geq 2$.

3. Зависимость характеристик контакта от параметров микроструктуры β и ξ

Механические характеристики контакта при индентировании материалов с незаполненными порами существенно зависят от коэффициента связанности β и

коэффициента жесткости ξ , характеризующих материал. Параметр α , характеризующий размер пор [10], в дальнейшем считается постоянным $\alpha = 5 \text{ ГПа}\cdot\text{м}^2$. Существование решения задач дилатационной теории упругости для материалов с микроструктурой в виде пор определяется неравенствами (2). Коэффициент связности N , введенный Р. Puri и S.C. Cowin в [17] как

$$N = \frac{\beta^2}{\xi(2\mu + \lambda)}, \quad (19)$$

рассматривался и исследовался во многих работах, в том числе в [12, 23, 25]. Коэффициент N [17] изменяется в пределах

$$0 < N \leq N_{\max}, \quad N_{\max} = \frac{2\mu + 3\lambda}{3(2\mu + \lambda)}. \quad (20)$$

Реализация неравенств (2) в плоскости (β, ξ) позволяет определить область существования решения (solution domain, SD) задач дилатационной теории упругости для материалов с незаполненными порами (рис. 1).

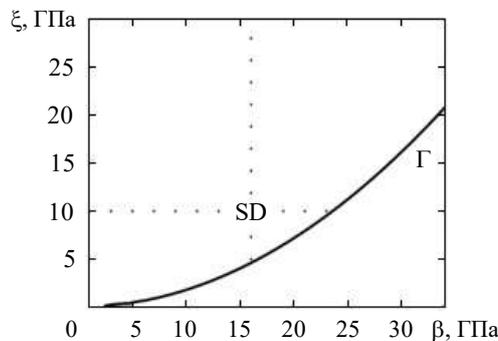


Рис. 1. Область существования решений SD и ее граница Γ в плоскости параметров (β, ξ)

В рассматриваемом в настоящей статье случае материал с порами характеризуется параметрами $E, \nu, \beta, \xi, \alpha$ (соответственно модулем Юнга, коэффициентом Пуассона, коэффициентом связности, параметром жесткости пор, параметром, характеризующим размер незаполненных пор). Для дальнейших расчетов зафиксируем геометрические параметры и некоторые параметры материала с порами: величина осадки индентора $\delta = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, размеры полосы и индентора $h = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $a = 10^{-2} \text{ м}$, модуль Юнга $E = 100 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$, параметр диффузии пор $\delta = 5 \text{ ГПа}\cdot\text{м}^2$. Изменяться будут только параметры ξ и β .

Для исследования контактных напряжений в зависимости от β положим $\xi = 18 \text{ ГПа}$. Контактные напряжения $\varphi(x), |x| < 1$, представлены в зависимости от параметра β на рис. 2а. График функции контактных напряжений $\varphi(x)$ (13) при $\beta = 0 \text{ ГПа}$ соответствует упругому изотропному материалу с $E = 100 \text{ ГПа}$ и $\nu = 0,2$. С ростом параметра β контактные напряжения уменьшаются, материал полосы становится податливее за счет роста незаполненных пор. Падают и соответствующие значения силы P контактного воздействия на индентор (рис. 2б).

Для изучения влияния параметра ξ положим $\beta = 5 \text{ ГПа}$. При увеличении значения параметра жесткости пор ξ наблюдается рост контактных напряжений $\varphi(x), |x| < 1$ (рис. 3а) вплоть до графика, соответствующего изотропному материалу ($\xi = \infty$). Сила P растет с увеличением ξ (рис. 3б) и асимптотически приближается к значению, соответствующему изотропному случаю теории упругости.

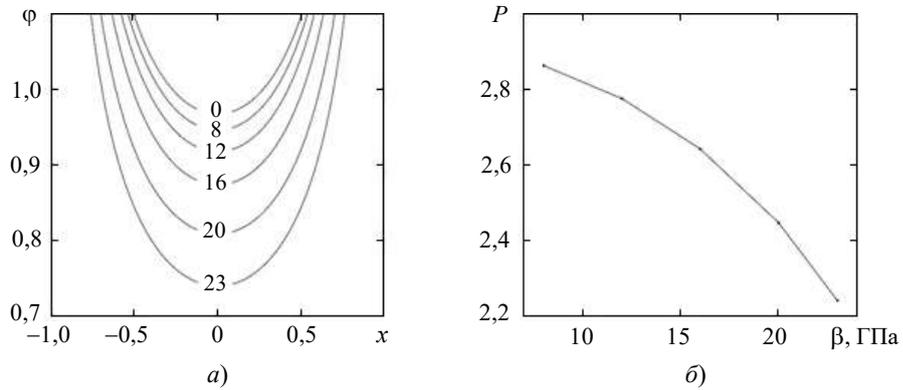


Рис. 2. Графики контактных напряжений $\varphi(x)$, $|x| < 1$, для $\beta = 0, 8, 12, 16, 20, 23$ ГПа (а); график силы P в зависимости от β (б)

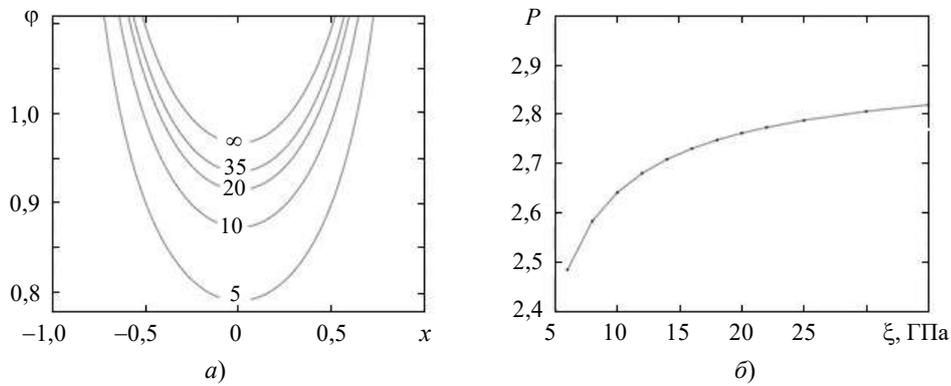


Рис. 3. Графики контактных напряжений $\varphi(x)$, $|x| < 1$, для $\xi = 5, 10, 20, 35, \infty$ ГПа (а); график силы P в зависимости от ξ (б)

4. Функция относительного объема пор $\Phi(x, z)$ в зависимости от параметров β и ξ

На рис. 4а, б представлены графики распределения функции относительного объема пор $\Phi(x, h)$ при $|x| < 2$ как на контакте, так и вне его.

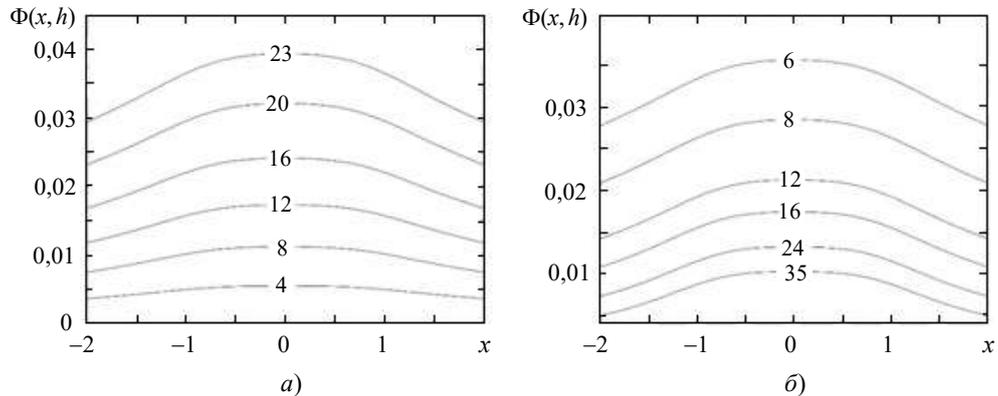


Рис. 4. Графики распределения функции относительного объема пор $\Phi(x, h)$ при различных β и фиксированном $\xi = 10$ ГПа (а); при различных ξ и фиксированном $\beta = 16$ ГПа (б)

При фиксированном $\xi = 10$ ГПа с увеличением параметра $\beta = 4, 8, 12, 16, 20, 23$ ГПа значение функции относительного объема пор $\Phi(0, h)$ под средней точкой основания индентора возрастает от значения 0,005, достигнутого при $\beta = 4$ ГПа, до значения 0,04, достигнутого при $\beta = 23$ ГПа. При фиксированном $\beta = 16$ ГПа с ростом параметра жесткости пор $\xi = 6, 8, 12, 16, 24, 35$ ГПа значения функции $\Phi(0, h)$ под средней точкой контакта убывают со значения 0,035, достигнутого при $\xi = 6$ ГПа, до значения 0,01, достигнутого при $\xi = 35$ ГПа.

Заключение

Проведенное теоретическое исследование процесса индентирования материалов с микроструктурой в виде пустот или незаполненных пор показали существенную зависимость силовых характеристик контакта (контактных напряжений и силы контактного воздействия) от параметров связанности и жесткости пор, формирующих упругие свойства микроструктуры материала. Функция относительного объема пор материала с микроструктурой в виде пустот или незаполненных пор также существенно зависит от неклассических модулей связанности и жесткости пор и независимо от их величины всегда достигает наибольшего значения под центром основания индентора.

References

1. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1964. Vol. 16. Iss. 1. P. 51–78. DOI: 10.1007/BF00248490.
2. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962. Vol. 11. Iss. 1. P. 415–448. DOI: 10.1007/BF00253946.
3. Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 1965. Vol. 1. Iss. 4. P. 417–438. DOI: 10.1016/0020-7683(65)90006-5.
4. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des Corps Déformables*. Paris. Librairie Scientifique A. Hermann et fils. 1909. 228 p.
5. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M. et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*. 2003. Vol. 51. Iss. 8. P. 1477–1508. DOI: 10.1016/S0022-5096(03)00053-X.
6. Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *Int. J. Solids Struct.* 2011. Vol. 48. Iss. 13. P. 1962–1990. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006.
7. Zhou S., Li A., Wang B. A reformulation of constitutive relations in the strain gradient elasticity theory for isotropic materials. *Int. J. Solids Struct.* 2016. Vol. 80. P. 28–37. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.10.018.
8. Nunziato J.W., Cowin S.C. A nonlinear theory of elastic materials with voids. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1979. Vol. 72. Iss. 2. P. 175–201. DOI: 10.1007/BF00249363.
9. Cowin S.C., Nunziato J.W. Linear elastic materials with voids. *J. Elast.* 1983. Vol. 13. Iss. 2. P. 125–147. DOI: 10.1007/BF00041230.
10. Ramézani H., Steeb H., Jeong J. Analytical and numerical studies on penalized micro-dilatation (PMD) theory: macro-micro link concept. *Eur. J. Mech. A/Solids*. 2012. Vol. 34. P. 130–148. DOI: 10.1016/J.EUROMECHSOL.2011.11.002.
11. Bishay P.L., Sladek J., Sladek V., Gao X.W. Analysis of elastic media with voids using a mixed-collocation finite-element method. *J. Eng. Mech.* 2017. Vol. 143. Iss. 4. Article No 04016119. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001193.
12. Lurie S., Solyaev Yu., Volkov A., Volkov-Bogorodskiy D. Bending problems in the theory of elastic materials with voids and surface effects. *Math. Mech. Solids*. 2018. Vol. 23. No 5. P. 787–804. DOI: 10.1177/1081286517691570.
13. Lurie S.A., Kalamkarov A.L., Solyaev Yu., Volkov A.V. Dilatation gradient elasticity theory. *Eur. J. Mech.-A/Solids*. 2021. Vol. 88. Article No 104258. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104258.

14. Solyaev Yu., Lurie S., Barchiesi E., Placidi L. On the dependence of standard and gradient elastic material constants on a field of defects. *Math. Mech. Solids*. 2020. Vol. 25. No 1. P. 35–45. DOI: 10.1177/10812865198618e.
15. Eremeyev V.A., dell'Isola F., Boutin C., Steigmann D. Linear pantographic sheets: Existence and uniqueness of weak solutions. *J. Elast.* 2018. Vol. 132. No 2. P. 175–196. DOI: 10.1007/s10659-017-9660-3.
16. Farajpour A., Ghayesh M.H., Farokhi H. A review on the mechanics of nanostructures. *Int. J. Eng. Sci.* 2018. Vol. 133. P. 231–263. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2018.09.006.
17. Puri P., Cowin S.C. Plane waves in linear elastic materials with voids. *J. Elast.* 1985. Vol. 15. Iss. 2. P. 167–183. DOI: 10.1007/BF00041991.
18. Chandrasekharaiyah D.S. Effects of surface stresses and voids on rayleigh waves in an elastic solid. *Int. J. Eng. Sci.* 1987. Vol. 25. Iss. 2. P. 205–211. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(87\)90006-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(87)90006-1).
19. Scalia A., Sumbatyan M.A. Contact problem for porous elastic half-plane. *J. Elast.* 2000. Vol. 60. Iss. 2. P. 91–102. DOI: 10.1023/A:1010880823544.
20. Scalia A. Contact problem for porous elastic strip. *Int. J. Eng. Sci.* 2002. Vol. 40. No 4. P. 401–410. DOI: 10.1016/S0020-7225(01)00070-2.
21. Lyapin A.A., Vatulyan A.O. On deformation of porous plates. *ZAMM – J. Appl. Math. Mech.: Zeitschrift für Angew. Math. und Mech.* 2018. Vol. 98. No 2. P. 330–340. DOI: 10.1002/zamm.201700151.
22. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A. On stress analysis for cracks in elastic materials with voids. *Int. J. Eng. Sci.* 2003. Vol. 41. Iss. 20. P. 2447–2461. DOI: 10.1016/S0020-7225(03)00236-2.
23. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element analysis of static problems for elastic media with voids. *Comput. Struct.* 2005. Vol. 84. No 1-2. P. 19–24. DOI: 10.1016/j.compstruc.2005.09.002.
24. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element dynamic analysis of anisotropic elastic solids with voids. *Comput. Struct.* 2009. Vol. 87. Iss. 15-16. P. 981–989. DOI: 10.1016/j.compstruc.2008.04.017.
25. Sladek J., Sladek V., Repkaet M., Bishay P.L. Static and dynamic behavior of porous elastic materials based on micro-dilatation theory: A numerical study using the MLPG method. *Int. J. Solids Struct.* 2016. Vol. 96. P. 126–135. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.06.016.
26. Solyaev Yu., Lurie S., Ustenko A. Numerical modeling of a composite auxetic metamaterials using micro-dilatation theory. *Continuum Mech. Therm.* 2019. Vol. 31. Iss. 4. P. 1099–1107. DOI: 10.1007/s00161-018-0730-y.
27. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti [Non-Classical Mixed Problems of the Theory of Elasticity]*. Moscow. Nauka Publ. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury. 1974. 456 p. (In Russian).

RELATIVE PORE VOLUME UNDER INDENTATION OF POROUS MATERIALS

Zelentsov V.B.¹, Zagrebneva A.D.¹, Lapina P.A.¹,
Aizikovich S.M.¹, Wang Yun-Che²

¹Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

²National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan

Investigation of the function of the relative volume of pores under the load action is carried out on the base of the solution of the static contact problem of the indentation of a layer made of a material with voids or unfilled pores. A rigid strip indenter with a flat base is pressed into a porous layer that is adhered to a non-deformable base along the lower boundary. The formulated 3D problem of the indentation of a porous layer is reduced to solving the plane contact problem of the indentation of a porous strip. The plane contact problem is reduced to solving an integral equation for unknown contact stresses, the solution of which is constructed by the method of successive approximations in the form of an asymptotic expansion in the dimensionless parameter of the

problem. The obtained contact stresses and the force acting on the indenter made it possible to study the influence of the nonclassical moduli of the layer porous material (the connectivity modulus and pore rigidity modulus) on the main contact characteristics and on the distribution of the function of the relative pore volume. The connectivity modulus increase leads to an increase in the compliance of the layer porous material, the pore rigidity modulus increase leads to an increase in the rigidity of the layer porous material. The maximum value of the distribution function of the relative pore volume in the porous material of the layer is achieved under the indenter base centre, regardless of the change in the porous material non-classical moduli.

Keywords: material with voids or unfilled pores, microdilatation theory, indentation, contact problem, contact stresses, relative pore volume, connectivity modulus, pore stiffness modulus, pore diffusion parameter.