

УДК 539.3

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ УКЛАДКАХ ЛОКАЛЬНО ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА В КРУГЛЫХ ПЛАСТИНКАХ

Н.В. Баничук, С.Ю. Иванова, Е.В. Макеев
Москва

А.А. Барсук
Кишинев (Молдова)

Работа посвящена решению задач оптимального проектирования круглых ортотропных пластин, имеющих экстремальную фундаментальную частоту свободных колебаний. В качестве переменной проектирования принимается угол ортотропии, характеризующий способ укладки материала. Обсуждаются основные соотношения, необходимые для решения задач ориентационного проектирования. Описываются результаты расчетов оптимальных проектов круглых пластин с шарнирным и жестким закреплением граничного контура. Для сравнения приводятся также результаты расчетов однопараметрических проектов с постоянным (не зависящим от радиуса) способом укладки материала.

1. Основные соотношения для задач проектирования пластин с экстремальной фундаментальной частотой колебаний

Для описания колебаний пластинки введем полярную систему координат (r, θ) , полюс которой совпадает с центром пластинки. Ориентацию локально ортотропного материала в точке (r, θ) будем характеризовать углом наклона α оси ортотропии ξ_1 к радиус-вектору этой точки. Упругие свойства ортотропного материала в осях локальной симметрии ξ_1, ξ_2 характеризуются значениями модулей Юнга, сдвига и коэффициентов Пуассона $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{11}$ ($E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21}$). Переменную проектирования α будем считать функцией радиуса, то есть $\alpha = \alpha(r)$, и в соответствии с предполагаемой симметрией ограничимся рассмотрением только осесимметричных свободных колебаний, то есть $w = w(r)$. Гипотеза о том, что осесимметричная форма колебаний соответствует фундаментальной частоте, проверяется непосредственно для искомого оптимального проекта пластинки. Для нахождения оптимальных проектов воспользуемся представлением Рэлея для квадрата фундаментальной частоты свободных колебаний

$$J = \omega_0^2(\alpha) = \min_{w \in B_w} \left(\frac{V(\alpha, w)}{T(w)} \right). \quad (1)$$

Здесь B_w – класс функций, удовлетворяющих заданным граничным условиям. Выражения для функционалов амплитудной потенциальной энергии $V(\alpha, w)$ и амплитудной кинетической энергии $T(w)$ записываются в виде:

$$V(\alpha, w) = \pi \int_0^R \left[D_{11}(\alpha) w_{rr}^2 + 2D_{12}(\alpha) w_{rr} \frac{1}{r} w_r + D_{22}(\alpha) \left(\frac{1}{r} w_r \right)^2 \right] r dr, \quad (2)$$

$$T(w) = \pi \rho h \int_0^R w^2 r dr,$$

где ρ – плотность материала, h – толщина пластинки, а постоянные $D_{ij}(\alpha)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} D_{11}(\alpha) &= D_x \cos^4 \alpha + 2D_3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + D_y \sin^4 \alpha, \\ D_{12}(\alpha) &= D_1 + (D_x + D_y - 2D_3) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha, \\ D_{22}(\alpha) &= D_x \sin^4 \alpha + 2D_3 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + D_y \cos^4 \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

$$D_1 = \frac{E_1 \nu_{21} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_3 = D_1 + 2D_{xy}, \quad D_x = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})},$$

$$D_y = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{xy} = \frac{G_{12} h^3}{12}, \quad E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21}.$$

Искомая укладка материала определяется из условия экстремума функционала фундаментальной частоты колебаний

$$\alpha(r): J = \omega_0^2(\alpha) \rightarrow \max_{\alpha}(\min_{\alpha}). \quad (4)$$

2. Условия экстремума фундаментальной частоты колебаний

Для рассматриваемой задачи оптимизации применим классическую технику вывода необходимых условий экстремума. В результате будем иметь:

$$\frac{\partial D_{11}(\alpha)}{\partial \alpha} (w_{rr})^2 + 2 \frac{\partial D_{12}(\alpha)}{\partial \alpha} w_{rr} \frac{1}{r} w_r + \frac{\partial D_{22}(\alpha)}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{r} w_r \right)^2 = 0. \quad (5)$$

Необходимые условия экстремума также можно записать в виде:

$$(\kappa_r - \kappa_{\theta}) [\kappa_r A(\alpha) - \kappa_{\theta} B(\alpha)] \sin 2\alpha = 0, \quad (6)$$

если ввести следующие обозначения:

$$A(\alpha) = -\frac{1}{2}(D_x - D_y) - \frac{1}{2}(D_x + D_y - 2D_3) \cos 2\alpha, \quad \kappa_r = -w_{rr},$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{2}(D_x - D_y) - \frac{1}{2}(D_x + D_y - 2D_3) \cos 2\alpha, \quad \kappa_{\theta} = -\frac{1}{r} w_r.$$

Анализ необходимых условий экстремума (6) приводит к следующим четырем способам ориентации ортотропного материала:

$$\alpha(r) = 0, \quad (7)$$

$$\alpha(r) = \pi/2, \quad (8)$$

$$\kappa_r = \kappa_\theta, \quad (9)$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{D_x - D_y}{D_x + D_y - 2D_3} \cdot \frac{\kappa_r + \kappa_\theta}{\kappa_r - \kappa_\theta}. \quad (10)$$

Для стационарных распределений угла ортотропии уравнения свободных колебаний существенно упрощаются и могут быть записаны следующим образом:

– для способа ориентации (7) имеем

$$-M_r = D_x w_{rr} + D_1 \frac{1}{r} w_r, \quad -M_\theta = D_1 w_{rr} + D_y \frac{1}{r} w_r,$$

и уравнения колебаний записываются в форме:

$$(r w_{rr})_{rr} - \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{1}{r} w_r \right)_r = \omega^2 \frac{\rho h}{D_x} w r, \quad \kappa^2 = \frac{D_y}{D_x}; \quad (11)$$

– для способа ориентации (8) аналогично предыдущему случаю имеем

$$\left(\frac{1}{r} w_{rr} \right)_{rr} - \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{1}{r} w_r \right)_r = \omega^2 \frac{\rho h}{\kappa^2 D_x} w r, \quad \kappa^2 = \frac{D_y}{D_x}; \quad (12)$$

– в случае способа ориентации (9) распределение угла анизотропии α определяется соотношением между кривизнами κ_1, κ_θ . Функция $w(r)$ находится в этом случае из дифференциального уравнения

$$w_{rr} = \frac{1}{r} w_r$$

и записывается в виде $w(r) = C_0 + C_1 r^2$. Подстановка этого выражения в уравнение колебаний приводит к уравнению для определения угла анизотропии α ;

– для способа ориентации (10) приходим к выражениям для моментов M_r, M_θ изгибаемой изотропной пластинки с эффективными жесткостями D^*, D_{12}^* :

$$M_r = D^* \kappa_r + D_{12}^* \kappa_\theta, \quad M_\theta = D_{12}^* \kappa_r + D^* \kappa_\theta, \quad (13)$$

$$D^* = \frac{D_x D_y - D_3^2}{D_x + D_y - 2D_3}, \quad D_{12}^* = \frac{D_x D_y + D_1(D_x + D_y - 2D_3) - D_3(D_x + D_y) + D_3^2}{D_x + D_y - 2D_3}$$

и к уравнению свободных колебаний пластинки

$$(r w_{rr})_{rr} - \left(\frac{1}{r} w_r \right)_r = \frac{\omega^2 \rho h}{D_x} r w. \quad (14)$$

Интересно заметить, что способ ориентации (10) приводит к уравнению (14), совпадающему с уравнением колебаний изотропной пластинки.

3. Описание результатов расчетов для опертых и заземленных круглых пластин

Численное решение задач оптимального проектирования ортотропных пластин с экстремальными значениями фундаментальной частоты осуществлялось с использованием алгоритмов последовательной оптимизации [1, 2] для построения улучшающих вариаций и метода Коллатца [3] для решения проблемы собственных зна-

чений. При проведении расчетов полагалось $D_x = 1, D_y = 0,33, D_{xy} = 0,16, D_1 = 0,08, \rho = 1, h = 1, R = 1$. Все расчеты на отрезке $0 \leq r \leq 1$ проводились с удвоенной точностью. Тестирование результатов расчетов фундаментальной частоты колебаний в случае изотропного материала по сравнению с точным решением показывало расхождение в третьем знаке после запятой.

Представим сначала некоторые результаты параметрических расчетов, полагая при этом, что угол ориентации $\alpha(r)$ не меняется с изменением радиуса r ($\alpha(r) = \text{const}$). Зависимость $\omega_0(\alpha)$ фундаментальной частоты колебаний от угла ориентации материала показана кривой 1 на рис. 1 для шарнирно закрепленной пластинки. Из проведенных расчетов видно, что для шарнирно закрепленной пластинки фундаментальная частота колебаний возрастает монотонно с увеличением угла ортотропии. Для защемленной пластинки зависимость фундаментальной частоты колебаний от угла ортотропии, показанная кривой 2 на рис. 1, является монотонно убывающей. Укажем полученные в результате расчетов для $\alpha = \alpha_1 = 0, \alpha = \alpha_2 = \pi/4, \alpha = \alpha_3 = \pi/2$ значения квадратов фундаментальных частот свободных колебаний шарнирно закрепленных пластинок:

$$\omega_0^2(\alpha_1) = 0,90811, \quad \omega_0^2(\alpha_2) = 1,1764, \quad \omega_0^2(\alpha_3) = 1,3945$$

и жестко защемленных пластинок:

$$\omega_0^2(\alpha_1) = 6,7832, \quad \omega_0^2(\alpha_2) = 4,7786, \quad \omega_0^2(\alpha_3) = 4,4045.$$

Сравнение максимальных и минимальных значений, которые допускаются представленными на рис. 1 однопараметрическими зависимостями $\omega_0^2(\alpha)$, показывает, что чувствительность фундаментальной частоты к изменению угла ортотропии является значительной. Так, для шарнирно закрепленной пластинки $\omega_0^2(\pi/2)/\omega_0^2(0) = 1,53$, а для жестко закрепленной $\omega_0^2(0)/\omega_0^2(\pi/2) = 1,54$. Таким образом, представленные параметрические зависимости обуславливают целесообразность решения сформулированных выше оптимизационных задач и отыскания распределений $\alpha = \alpha(r)$.

Расчеты проводились как для задач максимизации, так для задач минимизации фундаментальной частоты колебаний. Полученные в результате расчетов зависимости $\alpha_* = \alpha_*(r)$, доставляющие экстремальное значение рассматриваемому функционалу, представлены на рис. 2. Сплошной кривой 1 показан график функции $\alpha_* = \alpha_*(r)$, максимизирующей величину ω_0^2 в случае жесткого защемления пластинки. В качестве началь-

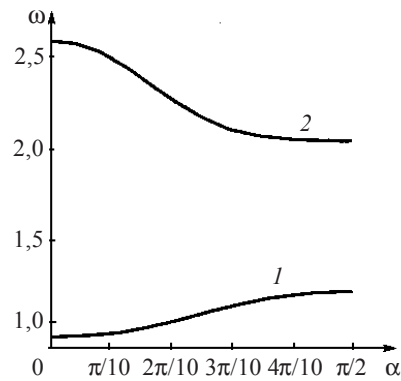


Рис. 1

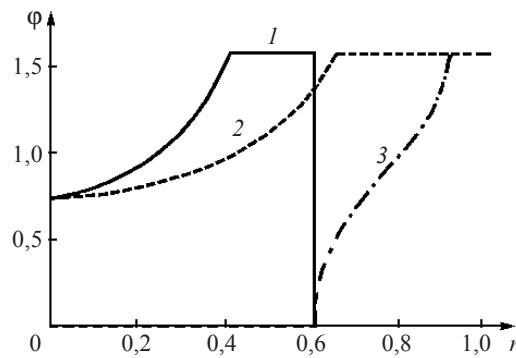


Рис. 2

ного приближения для применяемого метода последовательной оптимизации рассматривалось распределение $\alpha_0(r) = \pi/4$, для которого $\omega_0^2(\pi/4) = 4,7786$. Найденное в результате оптимизации значение квадрата фундаментальной частоты равно $\omega_0^2(\alpha_*) = 7,8328$. Отметим, что для оптимального проекта жестко защемленной пластины в интервале $0 \leq r \leq r_*$ ($r_* = 0,44$ – координата точки, в которой достигается максимальное значение угла ортотропии, $\alpha_*(r_*) = \pi/2$) с высокой степенью точности выполняется способ ориентации, задаваемый соотношением (9). Решение задачи минимизации фундаментальной частоты свободных колебаний жестко защемленной пластинки приводит к значению $\omega_0^2 = 3,4925$. Распределение угла ортотропии, соответствующее данному случаю, показано штрихпунктирной кривой 3 на рис. 2.

Оптимальное распределение угла ортотропии $\alpha_*(r)$, доставляющее максимум фундаментальной частоте свободных колебаний шарнирно закрепленной пластинки, показано штриховой линией 2 на рис. 2. Оптимальному распределению угла ортотропии $\alpha_*(r)$ отвечает значение квадрата фундаментальной частоты $\omega_0^2 = 1,4176$. Для начального распределения материала $\alpha_0(r) = \pi/4$ величина рассматриваемого функционала равнялась $\omega_0^2 = 1,1764$. Заметим, что в интервале $0 \leq r \leq r_*$ ($r_* = 0,64$) с достаточной степенью точности выполняется зависимость $dw/dr = Cr$ и, следовательно, на данном интервале реализуется способ ориентации, задаваемый соотношением (9) ($d^2w/dr^2 = (dw/dr)/r$). Решение задачи минимизации фундаментальной частоты свободных колебаний приводит в случае опертой пластинки к распределению угла ортотропии $\alpha_*(r) \equiv 0$ ($0 \leq r \leq 1$), характеризующемуся величиной функционала $\omega_0^2 = 0,90811$. Вычисление квадратов частот $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots$ высших гармоник для найденных проектов показало, что во всех рассмотренных случаях приведенные значения ω_0^2 являются наименьшими. Отметим также, что как для защемленных, так и для шарнирно закрепленных пластинок, оптимальные решения, обеспечивающие максимум фундаментальной частоты свободных колебаний, оказываются подобными в окрестности центра пластинки.

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ № 05-08-18094-а.

Литература

1. Баничук, Н.В. Оптимизация форм упругих тел / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
2. Баничук, Н.В. Введение в оптимизацию конструкций / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1986. – 303 с.
3. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М.: Наука, 1987. – 584 с.

[9.02.2006]

ON OPTIMAL LAYOUT OF LOCALLY ORTHOTROPIC MATERIAL IN CIRCULAR PLATES

N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova, Ye.V. Makeev, A.A. Barsuk

The paper is devoted to solving the problems of optimal design of the circular orthotropic plates, having extreme fundamental frequency of free vibrations. An angle of orthotropy, characterizing a way of the material layout, is assumed as a design variable. The fundamental relations, necessary for solving the problems of orientation design, are discussed. The computation results are described for the optimal projects of the circular plates with a boundary contour hinged or rigid. The computational results of one-parametric projects with a constant way of the material layout (independent of the radius) are also given for comparison.