

УДК 539.37

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-4-433-450

**ИНДИКАТОРЫ ПРИМЕНИМОСТИ И МЕТОДИКА
ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ
ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ ТИПА МАКСВЕЛЛА
ПО ДВОЙНЫМ КРИВЫМ
ОБРАТНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛА**

© 2021 г.

Хохлов А.В.

*НИИ механики Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация
Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова,
Якутск, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 20.09.2021

На основе аналитического исследования общих свойств семейства двойных кривых обратной ползучести, порождаемых физически нелинейным определяющим соотношением с двумя произвольными материальными функциями при нагружениях двумя прямоугольными импульсами с полной разгрузкой и отдыхом между ними, выявлен набор необходимых признаков (индикаторов) применимости соотношения по свойствам кривых обратной ползучести и «двойных» кривых обратной ползучести материала и разработаны две общие методики идентификации модели. Более сложная четырехступенчатая программа испытаний позволяет сократить количество опытов и используемых образцов в два раза и получить более богатую систему индикаторов применимости. Выведены явные формулы для прямого (и независимого) определения массивов значений материальных функций в любых заданных точках по минимальным наборам регистрируемых величин, предотвращающие накопление погрешности. Рассмотрены разные варианты методик, их достоинства и недостатки и возможные модификации. Для реономных материалов со степенной зависимостью скорости установившейся ползучести от напряжения разработан способ быстрой идентификации модели в классе степенных материальных функций по одной двойной кривой обратной ползучести, требующий измерения только четырех деформаций образца, и указаны специфические индикаторы (не)применимости степенной модели.

Выявление удобных для проверки индикаторов применимости и разработка эффективных методик идентификации определяющего соотношения, сочетающего в себе богатство спектра моделируемых эффектов и широту области применимости с относительной простотой структуры, открывает возможности для его подключения к пакетам прикладных программ и приложений в моделировании поведения конструкционных, изоляционных и отделочных материалов, применяемых в промышленном, гражданском и дорожном строительстве (полимеры, композиты, асфальтобетоны, синтетические нити, тросы и полотна, геоткани, стали и другие пластичные сплавы), и проектировании конструкций, изготовленных из них.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, физическая нелинейность, ползучесть, восстановление, кривые обратной ползучести, пластическая деформация, индикаторы применимости, полимеры, металлы и сплавы, асфальтобетон, синтетические нити, геоткани.

Введение

Из-за быстрого роста количества новых материалов и моделей для описания их свойств и повышения требований к весу, размерам и экономичности элементов конструкций и механизмов первостепенную роль играют вопросы построения или выбора адекватных определяющих соотношений (ОС), анализа их возможностей и области применимости, сфер влияния их материальных функции (МФ) и феноменологических ограничений на них, разработки методик испытаний образцов материала, определения МФ по их результатам (идентификации ОС) и верификации. В силу своей фундаментальной сложности эти вопросы плохо разработаны и часто игнорируются, что приводит к недостоверности результатов расчетов. Для обоснованного выбора ОС и определения его арсенала возможностей, для грамотной обработки данных испытаний и идентификации материальных функций и параметров выбранного ОС необходимо системное аналитическое изучение общих свойства теоретических кривых деформирования, релаксации, ползучести, длительной прочности, циклического нагружения, порождаемых ОС с произвольными МФ, исследование влияния на них параметров программ нагружения и характеристик материальных функций, выявление необходимых условий (индикаторов) применимости (или неприменимости) ОС к моделируемому материалу.

В цикле статей [1–7] такой анализ проведен для физически нелинейного ОС

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau)) d\tau \quad \text{или} \quad \dot{\varepsilon} = E^{-1}F'(\sigma)\dot{\sigma} + \eta^{-1}V(\sigma), \quad t > 0, \quad (1)$$

описывающего изотермические процессы деформирования нестареющих реономных материалов, связывая деформацию $\varepsilon(t)$ с историей изменения напряжения $\sigma(\tau)$, $\tau \in [0; t]$ (в одномерном случае). Соотношение нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью и пластичностью, высокой скоростной чувствительностью и, возможно, разносопротивляемостью, и основано на разложении полной деформации в сумму упругой и вязкопластической компонент:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v, \quad \varepsilon_e = \frac{F(\sigma)}{E}, \quad \dot{\varepsilon}_v = \frac{V(\sigma)}{\eta}.$$

В ОС (1) входят две МФ: $F(x)$, $V(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, и две постоянные: E , $\eta > 0$. Модуль упругости E и коэффициент вязкости η выделены из МФ для учета влияния температуры в форме $E = E(T)$, $\eta = \eta(T)$ [3]. Если ω_+ и ω_- конечны, они могут быть интерпретированы как пределы прочности при растяжении и сжатии (как материальные параметры ОС).

В случае $F(x) = 0$, $V(x) = x|x|^{n-1}$, $n > 1$, ОС (1) дает степенной закон течения (Norton-Bailey model), самый популярный (в силу простоты) в теории ползучести, вязкопластичности, реологии полимеров и гидродинамике неньютоновских жидкостей. Он используется для моделирования зависимости скорости установившейся ползучести от напряжения, течения степенных жидкостей и сверхпластического те-

чения материалов [8–35]. Задав $F(x) = x$ и $V(x) = x|x|^{n-1}$, получим модель с линейной упругостью и степенной вязкостью, которая применялась в ряде работ для описания экспериментальных кривых ползучести, моделирования сверхпластичности и решения конкретных задач [6, 7, 12, 28, 31–35]. Модель с произвольными МФ $F(x)$ и $V(x)$ системному исследованию и аттестации не подвергалась.

Настоящая статья продолжает цикл статей [1–7] по системному исследованию ОС (1) с целью определения комплекса адекватно моделируемых им реологических эффектов, наблюдаемых в испытаниях реономных материалов, и границ области применимости, сфер влияния материальных функций и феноменологических ограничений на них, способов идентификации настройки и верификации. В [1–7] аналитически изучены свойства базовых квазистатических кривых, порождаемых ОС (1) с произвольными МФ (кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения до заданного уровня, ползучести при ступенчатых нагружениях, длительной прочности, диаграмм нагружения и разгрузки при постоянных скоростях нагружения, при циклическом нагружении) и их зависимости от характеристик МФ и параметров программ нагружения. Сопоставление обнаруженных свойств теоретических кривых с типичными качественными свойствами кривых испытаний широкого класса вязкоупругопластичных материалов (с целевым списком механических эффектов) позволило вывести необходимые дополнительные ограничения на МФ, обеспечивающие адекватное моделирование основных реологических эффектов, и выявить те эффекты, которые оно принципиально не может описать ни при каких МФ. Математические свойства оператора (1), обзоры литературы и родственных (1) моделей, применяемых в теории ползучести, сверхпластичности и механике полимеров, учет влияния температуры и обобщение ОС (1) на трехосное напряженное состояние приведены в [1–7].

Цель настоящей статьи – разработка способов идентификации ОС (1) по кривым обратной ползучести, то есть откликам (см. ниже) на прямоугольный импульс нагрузки длительностью t_*

$$\sigma(t, \bar{\sigma}, t_*) = \bar{\sigma}[h(t) - h(t - t_*)], \quad t_* > 0, \quad \bar{\sigma} > \sigma_+ \geq 0 \quad (2)$$

($h(t)$ – функция Хевисайда, $\sigma(t) = 0$ при $t > t_*$), и по двойным кривым обратной ползучести, то есть откликам (материала и ОС) на четырехступенчатую программу нагружения

$$\sigma(t; \sigma_1, \sigma_3, t_1, t_2, t_3) = \sigma_1[h(t) - h(t - t_1)] + \sigma_3[h(t - t_2) - h(t - t_3)] \quad (3)$$

из двух прямоугольных импульсов (с полной разгрузкой и отдыхом после каждого из них), зависящую от пяти параметров: напряжений $\sigma_1, \sigma_3 > 0$ и длительностей ступеней $T_i = t_i - t_{i-1}$. Более сложная программа испытаний (3) не является стандартной (скорее – перспективным нововведением). В статье показано, что программа обладает рядом преимуществ по сравнению с идентификацией по обычным кривым обратной ползучести материала.

1. Об ограничениях на материальные функции ОС и области его применимости

МФ F определяет в (1) упругую деформацию $\varepsilon_e(\sigma)$. Минимальные первичные ограничения на нее: $F(x), x \in (\omega_-, \omega_+)$, – непрерывная (строго) возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной, такая, что $F(0) = 0$. Эти условия обеспе-

чивают совпадение знаков напряжения и упругой деформации $\varepsilon_e(\sigma)$ и соблюдение условия $\varepsilon_e(0) = 0$. Из строгого возрастания $F(x)$ следует возрастание $\varepsilon_e(|\sigma|)$ и энергии упругой деформации с ростом $|\sigma|$ и существование обратной к F функции f . Функция вязкости $V(x)/\eta$ в ОС (1) управляет вязкопластическими свойствами: она регулирует память материала, вязкость, скорость диссипации, релаксации, ползучести и накопления пластической деформации, чувствительность напряжения (в частности, мгновенного модуля и предела текучести) к скорости деформации, длительную прочность [1–7]. Минимальные первичные ограничения на нее: $V(x)$ – непрерывная (нестрого) возрастающая функция на интервале (ω_-, ω_+) , такая, что $V(x) = 0$. Эти ограничения на МФ обеспечивают, в частности, возрастание диаграмм деформирования и кривых ползучести, убывание кривых релаксации и длительной прочности и термодинамическую согласованность модели, то есть положительность работы напряжения $\sigma(\tau)$ в произвольном процессе деформирования и неотрицательность и возрастание диссипации $W[t, \sigma(\tau)]$ в любой момент времени: $\dot{W}(t) = \sigma(t)V(\sigma(t))/\eta > 0$.

Анализ свойств основных теоретических кривых, порождаемых ОС (1), обнаружил, что следует различать два основных случая, в которых ОС (1) (моделируемый материал) ведет себя по-разному: 1) $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$, 2) $V(x) = 0$ на некотором отрезке $Z = [\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$ (по определению σ_- и σ_+ – нижняя и верхняя грани множества нулей МФ $V(x)$).

Во втором случае, пока $\sigma(t) \in Z$, ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала: диссипации и гистерезиса нет, релаксация и ползучесть отсутствуют, кривая деформирования не зависит от скорости нагружения (или деформации) при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$, где $\varepsilon_{\pm} = F(\varepsilon_{\pm})/E$); σ_- , σ_+ играют роль пределов упругости (и порогов ползучести) материала при сжатии и растяжении, а при $\sigma > \sigma_+$ (или $\sigma < \sigma_-$) начинают проявляться диссипативные и вязкопластические свойства.

2. Кривые ползучести и обратной ползучести, порождаемые ОС (1)

При $\sigma(t) = \bar{\sigma} = \text{const}$, $t > 0$, ОС (1) порождает семейство кривых ползучести (КП)

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = r(\bar{\sigma})t + cF(\bar{\sigma}) = E^{-1}[V(\bar{\sigma})\tau_r^{-1}t + F(\bar{\sigma})], \quad (4)$$

где $r(\bar{\sigma}) = \gamma V(\bar{\sigma})$, $\gamma = 1/\eta$, $c = 1/E$, $\tau_r = \eta/E = c/\gamma$ – время релаксации линейной модели Максвелла (с $V(x) = F(x) = x$); τ_r удобно использовать для приведения времени к безразмерному виду.

Если $V(x) = 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+]$, $\sigma_- < 0$, $\sigma_+ > 0$, то при $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$ ОС (1) моделирует нелинейно упругое поведение материала и ползучесть отсутствует.

Если $V(\bar{\sigma}) \neq 0$, то все КП линейны по времени при $t > 0$, то есть ОС (1) моделирует только ползучесть с постоянной скоростью $r(\bar{\sigma})$ (как и линейная модель Максвелла). ОС (1) не способно описывать стадии замедленной и ускоренной ползучести, а также ограниченную ползучесть, свойственную, например, многим полимерам. Так как $V(\bar{\sigma}) > 0$, при $\bar{\sigma} > \sigma_+ \geq 0$ и возрастает, то КП (4) возрастает по t (при $\bar{\sigma} > 0$) и по $\bar{\sigma}$, что совпадает с типичными качественными свойствами КП структурно стабильных однородных материалов.

Выраженная стадия установившейся ползучести характерна для асфальтобетонов, фторопластов и композитов на их основе, полимеров в вязкотекучем состоянии, углерод-углеродных композитов при температурах выше 1500 °С, многих пластичных металлов и сплавов и материалов в состоянии сверхпластичности [26–29].

Отклики ОС (1) на прямоугольные импульсы нагрузки (2) длительностью t_* ($\sigma(t) = 0$ при $t > t_*$), то есть кривые обратной ползучести (КОП), имеют вид:

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_*) = r(\bar{\sigma})t + cF(\bar{\sigma}) \text{ при } t < t_*, \quad \varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_*) = p(\bar{\sigma}, t_*) \text{ при } t > t_*, \quad (5)$$

$$r(\bar{\sigma}) = \gamma V(\bar{\sigma}), \quad p(\bar{\sigma}, t_*) = \gamma V(\bar{\sigma})t_* = cV(\bar{\sigma})t_*\tau_r^{-1}. \quad (6)$$

Скачок деформации в точке $t = t_*$ равен $-cF(\bar{\sigma})$, при $t > t_*$ деформация не меняется и равна накопленной за время t_* деформации ползучести $p(\bar{\sigma}, t_*)$. При полной разгрузке исчезает лишь упругая деформация $\varepsilon(+0) = cF(\bar{\sigma})$, а вся деформация ползучести оказывается необратимой, пластической. Именно такое поведение демонстрируют многие металлы и сплавы (например, стали) и другие материалы при достаточно высоких температурах. Таким образом, ОС (1) не описывает «обратную ползучесть» («упругое последствие»). На рис. 1 приведены КОП (5) модели (1) с $F(x) = x$, $V(x) = x|x|$, $E = 10$, $\eta = 10$ (тогда $\tau_r = 1$) для $t_* = 10$ и $\bar{\sigma} = 0,1$ (кривая 1), $\bar{\sigma} = 0,05$ (кривая 2) и $\bar{\sigma} = 0,01$ (кривая 3), а также для $t_* = 5$, $\bar{\sigma} = 0,1$ (кривая 4).

Для сравнения на рис. 2 приведены КОП линейной модели вязкоупругости с функцией ползучести $\Pi = At^u + \alpha t$, $u \in (0; 1)$, $A, \alpha > 0$, при трех разных (малых) показателях (КОП 1–3 соответствуют $\alpha = 0,05, A = 1$ и $u = 0,1; 0,05; 0,01$) для $t_* = 10$, $\bar{\sigma} = 0,01$. КОП модели с $\Pi = At^u + \alpha t$ (их вид типичен) описывают восстановление при любых u, A, α и непрерывны в точке $t = t_*$ (так как $\Pi(0) = 0$), но при $u \rightarrow 0+$ их семейство сходится к разрывной КОП модели Максвелла с $\Pi = 1 + \alpha t$ (штриховая кривая 4) при $t \neq t_*$, а скачок деформации моделируется свойствами $\dot{\varepsilon}(0) = +\infty$ и $\dot{\varepsilon}(t_*) = -\infty$ (вытекающими из $\dot{\Pi}(0) = +\infty$).

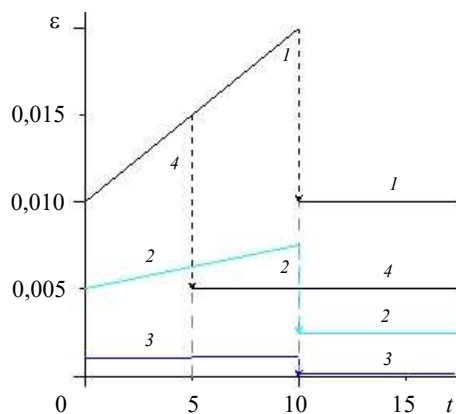


Рис. 1

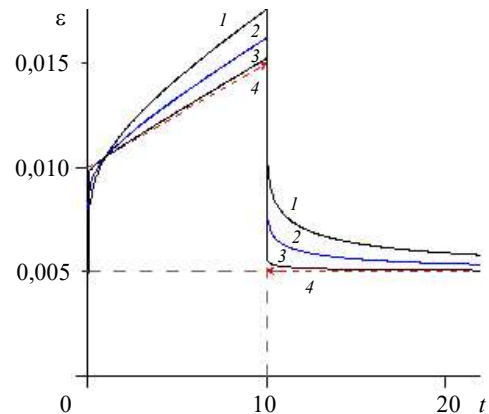


Рис. 2

3. Индикаторы применимости и идентификация ОС (1) по серии кривых обратной ползучести материала

Из обнаруженных общих свойств КОП (5), порождаемых ОС (1) с произвольными МФ, вытекают необходимые признаки применимости ОС (1), которые удобно проверять при анализе экспериментальных КОП материалов и использовать как индикаторы (не)применимости ОС (1) для моделирования этих материалов.

Постоянство скорости ползучести $\dot{\varepsilon}(t) = r(\bar{\sigma}) = \gamma V(\bar{\sigma})$ при $t \in (0; t_*)$ (мы полагаем, что в (2) $\bar{\sigma} > \sigma_+ \geq 0$ и потому $V(\bar{\sigma}) > 0$) и постоянство деформации $\varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_*) = p(\bar{\sigma}, t_*)$ при $t \geq t_*$ (отсутствие восстановления) – два важнейших атрибутивных свойства ОС (1) и, следовательно, два необходимых признака применимости ОС (1)

для моделирования поведения некоторого материала, легко проверяемых в испытаниях. Пропорциональность остаточной деформации (6) длительности t_* прямоугольного импульса нагружения (2) – третий индикатор применимости ОС (1); для любых МФ ОС (1) предсказывает, что в двух испытаниях с одинаковым уровнем напряжения должно быть $p''/p' = t''_*/t'_*$.

Еще одна характерная точка на КОП (5) – при $t = t_*$, когда деформация максимальна:

$$\varepsilon_* = \varepsilon(t_* - 0; \bar{\sigma}, t_*) = cF(\bar{\sigma}) + \gamma V(\bar{\sigma})t_* = cF(\bar{\sigma}) + p(\bar{\sigma}, t_*). \quad (7)$$

Из (7) следует, что для любых $\bar{\sigma}, t_*$ разность $\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*)$ не зависит от t_* и МФ V :

$$\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*) = cF(\bar{\sigma}). \quad (8)$$

Первое свойство – еще один качественный индикатор применимости ОС (1). Его можно записать (и проверять по испытаниям (2) с фиксированным $\bar{\sigma}$ и различными t_*) в формах

$$\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t''_*) - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t'_*) = p(\bar{\sigma}, t''_*) - p(\bar{\sigma}, t'_*), \quad \frac{\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t''_*) - p(\bar{\sigma}, t''_*)}{\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t'_*) - p(\bar{\sigma}, t'_*)} = 1. \quad (9)$$

Эти формулы связывают только измеряемые характерные величины деформации и не зависят от МФ. Отсутствие МФ V в формуле (8) позволяет напрямую определить МФ F отдельно от V по испытаниям с разными $\bar{\sigma}$ (см. ниже). Кроме того, из (8) следует, что

$$\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t''_*) - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t'_*) = \gamma V(\bar{\sigma})(t''_* - t'_*). \quad (10)$$

Следовательно, значение МФ $\gamma V(\bar{\sigma})$ можно определить как по измеренным величинам остаточной деформации (6), так и по разности величин максимальных деформаций (7) в испытаниях с одинаковым $\bar{\sigma}$ и разными t_* .

Таким образом, прежде, чем применять ОС (1) для моделирования поведения некоторого материала, следует провести несколько испытаний на нагружение вида (2) с разными величинами t_* и $\bar{\sigma}$ и проверить наличие у КОП материала таких же качественных свойств, что и у теоретических КОП (5) для любых $\bar{\sigma}, t_* > 0$ (индикаторов применимости ОС (1)):

1) постоянства скорости ползучести $r(\bar{\sigma}) = [\varepsilon(t''_*; \bar{\sigma}, t_*) - \varepsilon(t'_*; \bar{\sigma}, t_*)]/(t''_* - t'_*)$ для всех $t', t'' < t_*$;

2) постоянства деформации $\varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_*) = p(\bar{\sigma}, t_*)$ при $t \geq t_*$;

3) пропорциональности остаточной деформации длительности нагружения t_* : $p(\bar{\sigma}, t_*)/t_*$ не зависит от t_* или $p''/p' = t''_*/t'_*$ в любых двух испытаниях с $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ и разными $t'_*, t''_* > 0$;

4) справедливости равенств (9) при любых $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}, t'_*, t''_* > 0$;

5) пропорциональности разности максимальных деформаций (10) в испытаниях с одинаковым $\bar{\sigma}$ и различными t_* разности длительностей нагружения $t''_* - t'_*$, то есть выполнения пропорций $(\varepsilon''_* - \varepsilon'_*)/(\varepsilon''_* - \varepsilon'_*) = (t''_* - t'_*)/(t''_* - t'_*)$ при любых $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}, t'_*, t''_*, t'''_* > 0$.

Естественно, когда речь идет о проверке постоянства функции измеряемых величин (ее независимости от аргумента), имеется в виду приближенное равенство в пределах допустимой погрешности. Если какой-то из пяти указанных признаков явно отсутствует у КОП материала, то применять ОС (1) для его моделирования

нельзя. Если все проверки дают положительный результат, можно переходить к идентификации.

Проведенный анализ позволяет предложить несколько способов прямого определения значений двух материальных функций $\gamma V(x)$ и $cF(x)$ в любом заданном наборе точек $s_k > \sigma_+ \geq 0$ из рабочего диапазона напряжений (например, $s_k = \sigma_+ + kh$) по серии кривых обратной ползучести материала при растяжении и сжатии (при фиксированной температуре).

По формуле (8) можно найти массив значений функции $cF(s_k)$, если измерить величины максимальной деформации $\varepsilon_*(s_k, t_*)$ и остаточной деформации $p_k = p(s_k, t_{*k})$ в серии экспериментов с разными уровнями напряжений $\bar{\sigma} = s_k$:

$$cF(\bar{\sigma}) = \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*). \quad (11)$$

Найти $\gamma V(s_k)$ можно тремя способами. По измеренной остаточной деформации из (6):

$$\gamma V(\bar{\sigma}) = \frac{p(\bar{\sigma}, t_*)}{t_*}, \quad \bar{\sigma} = s_k. \quad (12)$$

Из формулы для скорости ползучести

$$\gamma V(\bar{\sigma}) = \frac{\varepsilon(t''; \bar{\sigma}, t_*) - \varepsilon(t'; \bar{\sigma}, t_*)}{t'' - t'}, \quad t', t'' \leq t_*, \quad (13)$$

где величины деформации в любые выбранные моменты времени $t', t'' \leq t_*$ измеряются по КП материала для заданного уровня напряжения $\bar{\sigma}$. Третий способ следует из формулы (10):

$$\gamma V(\bar{\sigma}) = \frac{\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t'') - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t')}{t'' - t'}, \quad (14)$$

где величины максимальной деформации в моменты времени t', t'' измеряются по двум КОП материала для заданного уровня напряжения $\bar{\sigma}$ и двух разных t_* .

Таким образом, для полного определения значений МФ в K узловых точках s_k по формулам (11), (12) необходимо провести K испытаний материала вида (2) с разными $\bar{\sigma} = s_k$ и t_{*k} , измеряя в каждом из них всего два характерных значения деформации $p_k = p(s_k, t_{*k})$ и $\varepsilon_{*k} = \varepsilon_*(s_k, t_{*k})$. Так как левые части (11), (12) не зависят от t_* , то можно проводить испытания как при одинаковых t_{*k} , так и при разных. Если вместо (12) использовать формулу (13), то в указанных K испытаниях с $\bar{\sigma} = s_k$ надо измерить только два значения деформации $\varepsilon(t'; s_k, t_{*k})$ и $\varepsilon(t''; s_k, t_{*k})$, $t', t'' \leq t_{*k}$, на участке установившей ползучести. Если же использовать формулу (14), то количество испытаний увеличивается в два раза, но появится возможность тщательно проверить соблюдение признаков применимости 3–5.

Казалось бы, большое количество испытаний ограничивает эффективность методики, но следует учесть, что каждый эксперимент с прямоугольным импульсом нагрузки может иметь малую длительность. Существенно, что значения МФ определяются по отдельности, последовательно, и из той же серии испытаний (хотя более длинной), по которой проверяются индикаторы применимости ОС (1), а не из испытаний другого типа. Ниже будет показано, как можно значительно уменьшить количество испытаний и используемых образцов за счет усложнения программы нагружения, увеличения количества регистрируемых данных и развития методики их обработки.

4. Двойные кривые обратной ползучести ОС (1)

Для любых $\sigma_i \in (\omega_-, \omega_+)$ и $t_i > 0$ ОС (1) переводит программу нагружения из N ступеней

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i [h(t - t_{i-1}) - h(t - t_i)] + \sigma_N h(t - t_{N-1}) \quad (15)$$

в сумму откликов на импульсы σ_i , получающихся из КОП (5) сдвигами по времени на t_{i-1} :

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{N-1} S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1}, \sigma_i) + [\gamma V(\sigma_N)(t - t_{N-1}) + cF(\sigma_N)]h(t - t_{N-1}),$$

$$S(t; t_*, \bar{\sigma}) = [\gamma V(\bar{\sigma})t + cF(\bar{\sigma})][h(t) - h(t - t_*)] + \gamma V(\bar{\sigma})t_* h(t - t_*)$$

– отклик (5) на прямоугольный импульс напряжения $\bar{\sigma}$ с носителем $[0; t_*]$. Так как все слагаемые кусочно-линейны, то $\varepsilon(t)$ кусочно-линейна и на интервалах $(t_{i-1}; t_i)$ имеет вид

$$\varepsilon(t) = \gamma V(\sigma_i)(t - t_{i-1}) + cF(\sigma_i) + p_{i-1}, \quad t \in (t_{i-1}; t_i), \quad (16)$$

$$p_{i-1} = \gamma \sum_{m=1}^{i-1} V(\sigma_m)(t_m - t_{m-1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (17)$$

где $\gamma = 1/\eta$, $c = 1/E$, $p_0 = 0$. Если $\sigma_i = 0$, то из (16) и ограничений $F(0) = 0$ и $V(0) = 0$ следует, что $\varepsilon(t) = p_{i-1}$, то есть деформация постоянна при $t \in (t_{i-1}; t_i)$ и p_{i-1} приобретает смысл остаточной деформации после $(i - 1)$ ступени нагружения. В общем случае накопленная пластическая деформация (17) выражает влияние предыдущих $(i - 1)$ ступеней нагружения (15). Скачки деформации и ее скорости в точках $t = t_i$, порожденные скачками напряжения $\sigma_{i+1} - \sigma_i$, равны $cF(\sigma_{i+1}) - cF(\sigma_i)$ и $\gamma V(\sigma_{i+1}) - \gamma V(\sigma_i)$, то есть зависят только от σ_i и σ_{i+1} и не зависят от предыстории (от всех t_k и σ_k при $k < i$) и даже от t_i . Модуль скачков $\varepsilon(t)$ и $\dot{\varepsilon}(t)$ не меняется при смене знака скачка нагрузки $\sigma_{i+1} - \sigma_i$.

При перестановке ступеней нагружения (например, первой и второй) величины p_i с большими номерами не меняются и потому на интервалах $t \in (t_{i-1}; t_i)$ с $i \geq 3$ КП (16) не меняется, то есть ОС (1) обладает свойством коммутативности при ступенчатых нагружениях [9, с. 217] (в отличие от линейного ОС вязкоупругости и нелинейного ОС Работнова [36, 37]).

Рассмотрим нагружения вида (15) с четырьмя ступенями ($N = 4$), уровнями напряжения $\sigma_3 \geq \sigma_1 > \sigma_+ \geq 0$, $\sigma_2 = \sigma_4 = 0$ и произвольными длительностями ступеней $T_i = t_i - t_{i-1}$, то есть семейство нагружений двумя прямоугольными импульсами (3) (оно зависит от пяти параметров: $t_1, t_2, t_3, \sigma_1, \sigma_3$). Полагаем, что $\sigma_1 > \sigma_+ \geq 0$, где σ_+ – предел упругости при растяжении, и потому $V(\sigma_1) > 0$ и $V(\sigma_3) > 0$. Отклик ОС (1) на нагружение вида (3) будем называть двойной кривой обратной ползучести. По формуле (17)

$$p_1 = \gamma V(\sigma_1)T_1 = p_2, \quad p_3 = \gamma V(\sigma_1)T_1 + \gamma V(\sigma_3)T_3 = p_1 + \gamma V(\sigma_3)T_3, \quad (18)$$

и КП (16), порождаемая ОС (1), состоит из двух участков установившейся ползучести

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \gamma V(\sigma_1)t + cF(\sigma_1) \quad \text{при } t \in (0; t_1), \\ \varepsilon(t) &= \gamma V(\sigma_3)(t - t_2) + cF(\sigma_3) + p_1 \quad \text{при } t \in (t_2; t_3) \end{aligned} \quad (19)$$

со скоростями $r_1 = \gamma V(\sigma_1)$ и $r_3 = \gamma V(\sigma_3)$ и двух участков постоянной деформации

$$\varepsilon(t) = p_1 \text{ при } t \in (t_1; t_2), \quad \varepsilon(t) = p_3 \text{ при } t > t_3, \quad (20)$$

где p_1 и p_3 – пластические деформации (18) после одной и трех ступеней нагружения (которые можно измерить в испытаниях).

Для иллюстрации на рис. 3 приведены три двойные КОП (19), (20) модели (1) с $F(x) = x$, $V(x) = x|x|$, $E = 10$, $\eta = 10$ ($\tau_r = 1$) для трех программ нагружения с $t_1 = 10$, $t_2 = 15$, $t_3 = 20$, $\sigma_1 = 0,1$ и разными σ_3 : $\sigma_3 = 0,1$ (кривая 1), $\sigma_3 = 0,15$ (кривая 2) и $\sigma_3 = 0,05$ (кривая 3).

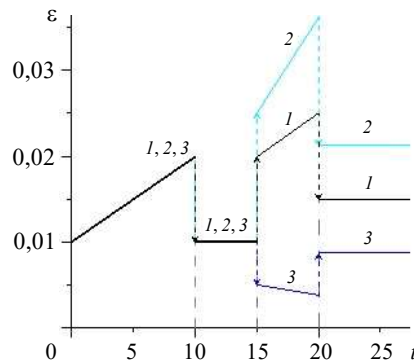


Рис. 3

Максимальные деформации на участках установившейся ползучести $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1-0)$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon(t_3-0)$ вычисляются по формулам

$$\varepsilon_1 = \gamma V(\sigma_1)T_1 + cF(\sigma_1) = p_1 + cF(\sigma_1), \quad (21)$$

$$\varepsilon_3 = p_1 + \gamma V(\sigma_3)T_3 + cF(\sigma_3) = p_3 + cF(\sigma_3).$$

Как и пластические деформации (18), ε_1 , ε_3 не зависят от времени отдыха T_2 . Перестановка ступеней нагружения σ_1 и σ_3 не влияет на p_3 , но меняет величину ε_3 .

5. Индикаторы применимости и идентификация ОС по двойным кривым обратной ползучести материала

Из формул (18) и (21) следуют связи между МФ и характерными (измеряемыми) деформациями p_1 , p_3 , ε_1 , ε_3 , позволяющие вычислить значения МФ при $x = \sigma_1$ и $x = \sigma_3$:

$$p_1 = \gamma V(\sigma_1)T_1, \quad p_3 - p_1 = \gamma V(\sigma_3)T_3, \quad \varepsilon_1 - p_1 = cF(\sigma_1), \quad \varepsilon_3 - p_3 = cF(\sigma_3). \quad (22)$$

Из (22) следует, что величины $\varepsilon_1 - p_1$, $\varepsilon_3 - p_3$, $D = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 + p_1 - p_3$ и $S = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - p_1 - p_3$ не зависят от длительностей ступеней нагружения T_i :

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = p_3 - p_1 + cF(\sigma_3) - cF(\sigma_1), \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - p_1 - p_3 = cF(\sigma_3) + cF(\sigma_1). \quad (23)$$

В случае $\sigma_3 = \sigma_1$ из (22) можно исключить обе МФ и получить дополнительные индикаторы применимости ОС по свойствам двойной КОП материала:

$$\frac{p_3 - p_1}{p_1} = \frac{T_3}{T_1}, \quad \varepsilon_3 - p_3 = \varepsilon_1 - p_1, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = p_3 - p_1, \quad r_3 = r_1, \quad (24)$$

а из (23) получаются формулы для определения значений МФ через ε_1 , ε_3 :

$$\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = p_3 - p_1 = \gamma V(\sigma_3)T_3 \text{ и } 2cF(\sigma_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - p_1 - p_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \gamma V(\sigma_3)(T_3 + 2T_1).$$

Если и $T_3 = T_1$, то первый индикатор (24) принимает вид $p_3 = 2p_1$, а второй $\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = p_1$.

Таким образом, прежде чем применять ОС (1) для моделирования поведения некоторого материала, следует провести несколько испытаний на нагружение вида (3) с разными величинами T_i и σ_1, σ_3 (из рабочего диапазона напряжений) и проверить наличие у двойных КОП материала таких же качественных свойств (индикаторов применимости ОС (1)), что и у теоретических двойных КОП (19), (20) для любых $T_i > 0$ и $\sigma_3, \sigma_1 > \sigma_+ \geq 0$:

1) постоянства скоростей ползучести на интервалах $(0; t_1)$ и $(t_2; t_3)$, то есть независимости от выбора пары точек t', t'' отношений

$$r(\sigma_1) = \frac{\varepsilon(t'') - \varepsilon(t')}{t'' - t'} \text{ при } \{t'' - t'\} \subset (0; t_1), \quad r(\sigma_3) = \frac{\varepsilon(t'') - \varepsilon(t')}{t'' - t'} \text{ при } \{t'' - t'\} \subset (t_2; t_3);$$

2) независимости скорости установившейся ползучести от предыстории нагружения (зависимость лишь от текущего напряжения), то есть независимости r_3 от σ_1, T_1, T_2 ;

3) постоянства деформации (20) при $t \in (t_1; t_2)$ и при $t > t_3$;

4) пропорциональности остаточной деформации p_1 после первой ступени нагружения ее длительности T_1 и пропорциональности разности $p_3 - p_1$ длительности третьей ступени нагружения T_3 (см. (22)), то есть независимости p_1/T_1 от T_1 и $(p_3 - p_1)/T_3$ от T_3 (проверяется в испытаниях с фиксированными σ_1, σ_3 и варьируемыми T_1 и T_3);

5) независимости разностей $\varepsilon_3 - p_3$ и $p_3 - p_1$ от σ_3, T_1, T_2 (см. (22));

6) независимости величин $\varepsilon_1 - p_1, \varepsilon_3 - p_3, D = \varepsilon_3 - \varepsilon_1 + p_1 - p_3$ и $S = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 - p_1 - p_3$ от длительностей T_i всех ступеней нагружения (3) (см. (23));

7) независимости характерных деформаций $p_1, p_3, \varepsilon_1, \varepsilon_3$ от времени отдыха T_2 (см. (18), (21));

8) неизменяемости остаточной деформации p_3 при перестановке ступеней нагружения σ_1 и σ_3 ;

9) для двойных КОП (19), (20) с $\sigma_3 = \sigma_1$ соблюдения дополнительных индикаторов (24) (в частности, $D = 0$) и пропорциональности разности $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ длительности третьей ступени T_3 , а при $T_3 = T_1$ еще и свойства $\varepsilon_3 - \varepsilon_1 = p_1$ и $p_3 = 2p_1$.

Естественно, когда речь идет о проверке постоянства функции измеряемых величин (ее независимости от аргумента), имеется в виду приближенное равенство в пределах допустимой погрешности. Если какие-то из указанных признаков явно отсутствуют у КОП-2 материала, то применять ОС (1) для его моделирования нельзя. Если все проверки дают положительный результат, можно переходить к идентификации. Система индикаторов применимости ОС (1) по двойным КОП значительно богаче, чем по обычным КОП.

Для определения значений МФ удобно использовать формулы (22), в явной форме выражающие их через параметры программы нагружения (3) $\sigma_1, T_1, \sigma_3, T_3$ и четыре измеряемые величины деформации $\varepsilon_1, p_1, \varepsilon_3$ и p_3 :

$$\gamma V(\sigma_1) = \frac{p_1}{T_1}, \quad \gamma V(\sigma_3) = \frac{p_3 - p_1}{T_3}, \quad (25)$$

$$cF(\sigma_1) = \varepsilon_1 - p_1, \quad cF(\sigma_3) = \varepsilon_3 - p_3. \quad (26)$$

Если $\sigma_3 \neq \sigma_1$, то по двойной КОП материала находятся значения МФ при двух значениях аргумента. Таким образом, для полного определения массивов значений обеих МФ в $2K$ точках $s_k > \sigma_+$, $k = 1, \dots, 2K$, из рабочего диапазона напряжений необходимо провести K испытаний материала на нагружение двумя прямоугольными импульсами (15) с разными $\sigma_1, \sigma_3 \in \{s_k\}$ (и любыми t_1, t_2, t_3), по каждой двойной КОП зарегистрировать четыре деформации $\varepsilon_1, p_1, \varepsilon_3$ и p_3 и подставить в формулы (25), (26). Деформации $p_1, p_3, \varepsilon_1, \varepsilon_3$ и значения МФ (25), (26) не зависят от времени отдыха T_2 , и потому его можно выбирать малым, но все же достаточным для надежной регистрации постоянной величины p_1 .

Для определения значений $\gamma V(s_k)$ вместо формул (25) можно воспользоваться формулами для скоростей ползучести $r_1 = \gamma V(\sigma_1)$ и $r_3 = \gamma V(\sigma_3)$ при $t \in (0; t_1)$ и $t \in (t_2; t_3)$:

$$\gamma V(\sigma_1) = r_1 = \frac{\varepsilon(t'') - \varepsilon(t')}{t'' - t'}, \quad \gamma V(\sigma_3) = r_3 = \frac{\varepsilon(t'') - \varepsilon(t')}{t'' - t'}, \quad (27)$$

где $t', t'' \in (0; t_1)$ или $t', t'' \in (t_2; t_3)$, $\varepsilon(t')$ и $\varepsilon(t'')$ – измеренные деформации в выбранные моменты времени t' и t'' . Применение (27) предпочтительнее (25), так как немгновенность нагружения и разгрузки вносит погрешность в (25), но не в (27): все формулы получены в предположении мгновенности нагрузки и разгрузки (скачка напряжения), величины деформаций $\varepsilon_1, p_1, \varepsilon_3$ и p_3 существенно зависят от длительностей стадий нагрузки и разгрузки (ненулевых в испытаниях), но скорость установившейся ползучести от них не зависит. Лучше взять в (27) базу измерений $t'' - t'$ на участке установившейся ползучести как можно большей для более надежного вычисления r_1 и r_3 . Однако надо учитывать, что формулы с максимальной базой

$$\gamma V(\sigma_1) = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{T_1}, \quad \gamma V(\sigma_3) = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{T_3},$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(0+0)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon(t_2+0)$ – минимальная деформация на каждом участке установившейся ползучести, потеряют нечувствительность к немгновенности нагружения и разгрузки.

В случае испытания с $\sigma_3 = \sigma_1$ можно выразить значение $\gamma V(\sigma_1)$ только через $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ или только через p_1 и p_3 : $\gamma V(\sigma_1) = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)/T_3$, $\gamma V(\sigma_1) = (p_3 - 2p_1)/(T_3 - T_1)$.

Разработаны и другие способы идентификации (и верификации) ОС (1), помимо описанных выше, например: по кривым ползучести с начальной стадией нагружения, по двум кривым нагружения материала (образца) с постоянными скоростями, по кривой нагружения-разгрузки или по одной кривой ползучести при ступенчатом нагружении [5–7]. Рациональный выбор конкретного способа зависит от того, есть ли возможность планировать эксперименты по идентификации и верификации ОС (1) (в рамках имеющихся ресурсов времени, оборудования, изготовления образцов и т.п.) или приходится пользоваться уже имеющимися данными испытаний некоторого материала (возможно, весьма ограниченными).

6. Идентификация модели со степенными МФ по двойной кривой обратной ползучести

Выбор некоторых семейств аппроксимаций для МФ значительно сокращает количество базовых испытаний, так тогда определению подлежат лишь несколько параметров, индивидуализирующих функцию, а не ее значения в узлах сетки, покрывающей рабочий диапазон напряжений. Рассмотрим алгоритм определения степенных МФ

$$F = x^m, \quad V = x^n, \quad m \geq 1, \quad n > m - 1 \quad (28)$$

($n > m - 1$ следует из критерия выпуклости вниз $|V'(x)/V(x)| > |F''(x)/F'(x)|$ кривых релаксации ОС (1)). Тогда каждая МФ $F(x)/E$, $V(x)/\eta$ задается двумя параметрами η , n и m , E , и систему четырех независимых уравнений для их определения можно получить по результатам одного испытания вида (3) с $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_+ \geq 0$, то есть по одной двойной КОП материала. В самом деле, теоретическая двойная КОП задается уравнением (19), (20), где формулы для скоростей ползучести, остаточной деформации и максимальной деформации (18) и (21) принимают для МФ (28) вид

$$r_1 = \gamma \sigma_1^n, \quad r_3 = \gamma \sigma_3^n, \quad (29)$$

$$p_1 = \eta^{-1} \sigma_1^n T_1, \quad p_3 - p_1 = \eta^{-1} \sigma_3^n T_3, \quad \varepsilon_1 - p_1 = E^{-1} \sigma_1^m, \quad \varepsilon_3 - p_3 = E^{-1} \sigma_3^m. \quad (30)$$

Отсюда

$$(p_3 - p_1) p_1^{-1} T_1 T_3^{-1} = \frac{\sigma_3^n}{\sigma_1^n}, \quad \frac{\varepsilon_3 - p_3}{\varepsilon_1 - p_1} = \frac{\sigma_3^m}{\sigma_1^m}$$

и

$$n = \frac{\ln [(p_3 - p_1) p_1^{-1} T_1 T_3^{-1}]}{\ln (\sigma_3 \sigma_1^{-1})}, \quad m = \frac{\ln [(\varepsilon_3 - p_3) / (\varepsilon_1 - p_1)]}{\ln (\sigma_3 \sigma_1^{-1})}, \quad (31)$$

$$\eta = \sigma_1^n T_1 p_1^{-1}, \quad E = \sigma_1^m (\varepsilon_1 - p_1)^{-1}.$$

Эти формулы в явной форме выражают η , n и m , E через четыре измеряемые величины деформации $\varepsilon_1, p_1, \varepsilon_3$ и p_3 и параметры $\sigma_1, T_1, \sigma_3, T_3$ программы нагружения (3). Величины σ_1, σ_3 лучше выбирать так, чтобы отношение σ_3/σ_1 в (31) больше отличалось от единицы (а знаменатель $\ln (\sigma_3/\sigma_1)$ – от нуля). Найти η, n можно также из системы уравнений (29), измерив скорости ползучести r_1, r_3 .

Применять модель (1) со степенными МФ (28) и определять их параметры следует только после проверки выполнения специфических индикаторов применимости моделей со степенными МФ (28), помимо общих индикаторов применимости ОС (1), обнаруженных ранее. Из формул (29), (30) следует, что для степенных МФ зависимости всех шести характерных величин (29), (30) от σ_1 и σ_3 степенные, то есть $\ln r_1, \ln p_1$ и $\ln (\varepsilon_1 - p_1)$ связаны линейными зависимостями с $\ln \sigma_1$, а $\ln r_3, \ln (p_3 - p_1)$ и $\ln (\varepsilon_3 - p_3)$ – с $\ln \sigma_3$. Линейная связь логарифмов легко проверяется по данным серии испытаний с различными парами σ_1 и σ_3 : экспериментальные точки должны располагаться вдоль прямой (показатели n и m – угловые коэффициенты прямых). Линейность шести указанных зависимостей от $\ln \sigma_1$ и $\ln \sigma_3$ – специфические индикаторы применимости ОС (1) со степенными МФ. Если эти свойства не выполняются у экспериментальных данных, то ОС (1) со степенными МФ не может описать поведение материала. Если выполняется, то можно переходить к их идентификации и последующему моделированию.

С целью уменьшения погрешности (и оценки разброса) можно вычислить параметры η, n, m, E как средние значения по результатам нескольких испытаний вида (3) с разными парами σ_1 и σ_3 , то есть найти константы, минимизирующие среднеквадратичные отклонения от последовательностей вычисленных по формулам (31) значений $n_i, \eta_i, m_i, E_i, i = 1, \dots, K - 1$. Для этого придется провести дополнительные испытания, но они нужны и для проверки выполнения указанных необходимых условий применимости степенной модели (1), (28).

Заключение

На основе анализа общих свойств кривых ползучести, порождаемых определяющим ОС (1) с произвольными материальными функциями при ступенчатых нагружениях (15) (в частности, «двойных» кривых обратной ползучести (19), (20), то есть откликов на программу нагружения (3) из двух прямоугольных импульсов), выявлены несколько систем необходимых признаков применимости ОС (1), которые удобно проверять по данным испытаний материалов и использовать как индикаторы (не)применимости ОС (1) для моделирования этих материалов, и разработаны две общие методики идентификации ОС (1). Они позволяют определить массивы значений обеих материальных функций ОС (1) в любых выбранных точках, не требуют задания конкретных аппроксимаций, минимизации среднеквадратичного отклонения для определения их параметров, численного решения системы нелинейных уравнений (ее решение построено аналитически) и использования рекуррентных формул и итерационных методов. В качестве системы базовых испытаний материала для проверки применимости ОС и его идентификации предложено использовать одну из следующих: 1) серию испытаний по программе (3) с разными уровнями напряжения и длительностями стадий нагружения, дающую семейство двойных кривых обратной ползучести (КОП); 2) серию обычных КОП материала с различными напряжениями и длительностями нагружения. В каждом случае указаны минимальные наборы регистрируемых величин и выведены явные формулы для прямого (независимого) определения значений материальных функций в любых заданных точках из рабочего диапазона напряжения, предотвращающие накопление погрешности, рассмотрены разные варианты методик, их достоинства и недостатки и возможные модификации. Оптимальной (по многим причинам) представляется методика идентификации по двойным КОП материала: не только потому, что она требует в два раза меньшего числа испытаний (и образцов), чем идентификация по обычным КОП, но и потому, что испытание по программе (3) является более гибким и информативным, позволяет проверить качество моделирования большего количества эффектов, а система индикаторов применимости ОС (1) по двойным КОП значительно богаче, чем по обычным КОП.

Для материалов со степенной зависимостью скорости установившейся ползучести и пластической деформации от напряжения разработана методика быстрого определения степенных материальных функций (28) по минимальному набору базовых испытаний и регистрируемых величин. Показано, что для определения всех параметров степенных функций достаточно одной двойной кривой обратной ползучести с $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_+ \geq 0$, получены явные формулы (31) для четырех параметров степенных функций (28) через параметры программы нагружения (3) $\sigma_1, T_1, \sigma_3, T_3$ и четыре измеряемые деформации. Указаны специфические индикаторы применимости (или неприменимости) модели (1), (28) по двойным кривым обратной ползучести материала.

Список литературы

1. Khokhlov A.V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2016. Vol. 71. Iss. 6. P. 132–136. DOI: 10.3103/S0027133016060029.
2. Хохлов А.В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагру-

жениях. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2016. Т. 20. №3. С. 524–543. DOI: 10.14498/vsgtu1512.

3. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2017. Т. 21. №1. С. 160–179. DOI: 10.14498/vsgtu1524.

4. Khokhlov A.V. A nonlinear Maxwell-type model for rheonomic materials: Stability under symmetric cyclic loadings. *Moscow University Mechanics Bulletin.* 2018. Vol. 73. No 2. P. 39–42. DOI: 10.3103/S0027133018020036.

5. Хохлов А.В. Индикаторы применимости и методики идентификации нелинейной модели типа Максвелла для реономных материалов по кривым ползучести при ступенчатых нагружениях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки.* 2018. №6. С. 92–112. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-92-112.

6. Khokhlov A.V. Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading-unloading curves. *Mechanics of Composite Materials.* 2019. Vol. 55. Iss. 2. P. 195–210. DOI: 10.1007/s11029-019-09809-w.

7. Хохлов А.В. О возможности описания знакопеременности и немонотонности зависимости от времени коэффициента Пуассона при ползучести с помощью нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла. *Деформация и разрушение материалов.* 2019. №3. С. 16–24. DOI: 10.31044/1814-4632-2019-3-16-24.

8. Kennedy A.J. *Processes of Creep and Fatigue in Metals.* London: Olyver & Boyd, 1962. 480 p.

9. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций.* М.: Наука, 1966. 752 с.

10. Бугаков И.И. *Ползучесть полимерных материалов.* М.: Наука, 1973. 287 с.

11. Шестериков С.А., Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. В кн.: *Итоги науки и техники. Сер. Мех. деформ. тверд. тела.* Т. 13. М.: ВИНТИ, 1980. С. 3–124.

12. Малинин Н.Н. *Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций.* М.: Машиностроение, 1981. 220 с.

13. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. *Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях.* М.: Машиностроение, 1984. 256 с.

14. Никитенко А.Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов.* Новосибирск: НГАСУ, 1997. 278 с.

15. Betten J. *Creep Mechanics.* Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 367 p.

16. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials.* Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 461 p.

17. Радченко В.П., Кичаев П.Е. *Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов.* Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2011. 157 с.

18. Bergström J.S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling.* Amsterdam: William Andrew Publ., 2015. 520 p.

19. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* М.: Физматлит, 2016. 502 с.

20. Fatemi A., Yang L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue.* 1998. Vol. 20. Iss 1. P. 9–34. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(97\)00081-9](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(97)00081-9).

21. Launay A., Maitournam M.H., Marco Y., Raoult I., Szymtka F. Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide: Experimental study and constitutive equations. *International Journal of Plasticity.* 2011. Vol. 27. Iss. 8. P. 1267–1293. DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.02.005.

22. Darabi M.K., Al-Rub R.K.A., Masad E.A., Huang C.-W., Little D.N. A modified viscoplastic model to predict the permanent deformation of asphaltic materials under cyclic-compression loading at high temperatures. *International Journal of Plasticity.* 2012. Vol. 35. P. 100–134. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.03.001.

23. Быков Д.Л., Казаков А.В., Коновалов Д.Н. и др. О законе накопления поврежденности и критерии разрушения в высоконаполненных полимерных материалах. *Изв. РАН. МТТ.* 2014. №5. С. 76–97.

24. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling. *Materials Transactions.* 2014. Vol. 55. Iss. 2. P. 275–284. DOI: 10.2320/MATERTRANS.M2013370.

25. Петухов Д.С., Келлер И.Э. Двойственные задачи плоских ползущих течений степенной несжимаемой среды. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2016. Т. 20. №3. С. 496–507. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1508>.
26. Кайбышев О.А. *Сверхпластичность промышленных сплавов*. М.: Металлургия, 1984. 263 с.
27. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in Metals and Ceramics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 287 p.
28. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 363 p.
29. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York: Nova Science Pub. Inc., 2010. 548 p.
30. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests. *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2007. Vol. 11. Iss. 2. P. 159–172. DOI: 10.1007/s11043-007-9033-6.
31. Megahed M., Ponter A.R.S., Morrison C.J. An experimental and theoretical investigation into the creep properties of a simple structure of 316 stainless steel. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1984. Vol. 26. Iss. 3. P. 149–164. DOI: 10.1016/0020-7403(84)90050-X.
32. Еникеев Ф.У. Экспериментальная оценка скоростной чувствительности сверхпластичного материала с сильно неоднородным напряженно-деформированным состоянием. *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2007. Т. 73. №10. С. 44–50.
33. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Математическая модель ползучести микронеоднородного нелинейно-упругого материала. *ПМТФ*. 2008. Т. 49. №3. С. 157–163.
34. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep analysis with a stress range dependent constitutive model. *Archive of Applied Mechanics*. 2009. Vol. 79. P. 619–630.
35. Lu L.Y., Lin G.L., Shih M.H. An experimental study on a generalized Maxwell model for nonlinear viscoelastic dampers used in seismic isolation. *Engineering Structures*. 2012. Vol. 34. P. 111–123. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.09.012.
36. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. №3. С. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123.
37. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2017. Т. 21. №2. С. 326–361. DOI: 10.14498/vsgtu1533.

References

1. Khokhlov A.V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2016. Vol. 71. Iss. 6. P. 132–136. DOI: 10.3103/S0027133016060029.
2. Khokhlov A.V. Krivye dlitelnoy prochnosti nelineynoy modeli vyazkouprugoplastichnosti tipa Maksvella i pravilo summirovaniya povrezhdennosti pri stupenchatykh nagruzheniyakh [Long-term strength curves generated by the nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials and the linear damage rule under step loading]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. 2016. No 3. P. 524–543. DOI: 10.14498/vsgtu1512 (In Russian).
3. Khokhlov A.V. Nelineynaya model vyazkouprugoplastichnosti tipa Maksvella: modelirovanie vliyaniya temperatury na krivye deformirovaniya, relaksatsii i polzuchesti [The nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials: simulation of temperature influence on creep, relaxation and strain-stress curves]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. 2017. Vol. 21. No 1. P. 160–179. DOI: 10.14498/vsgtu1524 (In Russian).
4. Khokhlov A.V. A nonlinear Maxwell-type model for rheonomic materials: Stability under

symmetric cyclic loadings. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2018. Vol. 73. No 2. P. 39–42. DOI: 10.3103/S0027133018020036.

5. Khokhlov A.V. Indikatory primenimosti i metodiki identifikatsii nelineynoy modeli tipa Maksvella dlya reonomnykh materialov po krivym polzuchesti pri stupenchatykh nagruzheniyakh [Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elasto-viscoplastic model using multi-step creep curves]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki* [*Herald of the Bauman Moscow State Technical University: Series Natural Sciences*]. 2018. No 6. P. 92–112. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-92-112 (In Russian).

6. Khokhlov A.V. Applicability indicators and identification techniques for a nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model using loading-unloading curves. *Mech. Compos. Mater.* 2019. Vol. 55. Iss. 2. P. 195–210. DOI: 10.1007/s11029-019-09809-w.

7. Khokhlov A.V. Possibility to describe the alternating and nonmonotonic time dependence of Poisson's ratio during creep using a nonlinear Maxwell-type viscoelastoplasticity model. *Russian Metallurgy (Metally)*. 2019. No 10. P. 956–963. DOI: 10.1134/S0036029519100136.

8. Kennedy A.J. *Processes of Creep and Fatigue in Metals*. London. Olyver & Boyd. 1962. 480 p.

9. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest elementov konstruksiy* [*Creep Problems in Structural Members*]. Moscow. Nauka Publ. 1966. 752 p. (In Russian).

10. Bugakov I.I. *Polzuchest polymernikh materialov* [*Creep of Polymer Materials*]. Moscow. Nauka Publ. 1973. 287 p. (In Russian).

11. Shesterikov S.A., Lokoschenko A.M. Polzuchest i dlitelnaya prochnost metallov [Creep and long-term strength of metals]. In: *Itogi nauki i tekhniki. Seriya Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [*Results of Science and Technology Series: Mechanics of Deformable Solid*]. Vol. 13. Moscow. VINITI Publ. 1980. P. 3–124. (In Russian).

12. Malinin N.N. *Raschety na polzuchest elementov mashinostroitelnykh konstruksiy* [*Calculations on Creep of Elements of Machine-Building Structures*]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1981. 221 p. (In Russian).

13. Gokhfeld D.A., Sadakov O.S. *Plastichnost i polzuchest elementov konstruksii pri povtornykh nagruzheniyakh* [*Plasticity and Creep in Structural Elements under Repeated Loading*]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1984. 256 p. (In Russian).

14. Nikitenko A.F. *Polzuchest i dlitelnaya prochnost metallicheskih materialov* [*Creep and Long-Term Strength of Metallic Materials*]. Novosibirsk. NGASU Publ. 1997. 278 p. (In Russian).

15. Betten J. *Creep Mechanics*. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag. 2008. 367 p.

16. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge. Cambridge University Press. 2009. 461 p.

17. Radchenko V.P., Kichaev P.Ye. *Energeticheskaya kontseptsiya polzuchesti i vibropolzuchesti metallov* [*Energy Concept of Creep and Vibrocreep*]. Samara. SGTU Publ. 2011. 157 p. (In Russian).

18. Bergström J.S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. Amsterdam. William Andrew Publ. 2015. 520 p.

19. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest i dlitelnaya prochnost metallov* [*Creep and Long-Term Strength of Metals*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2016. 504 p. (In Russian).

20. Fatemi A., Yang L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials. *Int. J. Fatigue*. 1998. Vol. 20. Iss 1. P. 9–34. [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(97\)00081-9](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(97)00081-9).

21. Launay A., Maitournam M.H., Marco Y., Raoult I., Szymtka F. Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide: Experimental study and constitutive equations. *Int. J. Plasticity*. 2011. Vol. 27. Iss. 8. P. 1267–1293. DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.02.005.

22. Darabi M.K., Al-Rub R.K.A., Masad E.A., Huang C.-W., Little D.N. A modified viscoplastic model to predict the permanent deformation of asphaltic materials under cyclic-compression loading at high temperatures. *Int. J. Plasticity*. 2012. Vol. 35. P. 100–134. DOI:10.1016/j.ijplas.2012.03.001.

23. Bykov D.L., Kazakov A.V., Peleshko V.A. et al. Law of damage accumulation and fracture criteria in highly filled polymer materials. *Mechanics of Solids*. 2014. Vol. 49. No 5. P. 543–560. DOI: 10.3103/S0025654414050069.

24. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling. *Mater. Trans.* 2014. Vol. 55. Iss. 2. P. 275–284. DOI: 10.2320/MATERTRANS.M2013370.

25. Petukhov D.S., Keller I.E. Dvoystvennye zadachi ploskikh polzushchikh techeniy stepennoy neszhimaemoy sredy [Dual hlane problems for creeping flows of power-law incompressible medium]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]. 2016. Vol. 20. No 3. P. 496–507. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1508> (In Russian).
26. Kaibishev O.A. *Sverkhplastichnost promyshlennykh splavov* [Superplasticity of Industrial Alloys]. Moscow. Metallurgiya Publ. 1984. 264 p. (In Russian).
27. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in Metals and Ceramics*. Cambridge. Cambridge University Press. 1997. 287 p.
28. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics*. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag. 2001. 363 p.
29. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. New York. Nova Science Pub. Inc. 2010. 548 p.
30. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests. *Mech. Time-Depend. Mat.* 2007. Vol. 11. Iss. 2. P. 159–172. DOI: 10.1007/s11043-007-9033-6.
31. Megahed M., Ponter A.R.S., Morrison C.J. An experimental and theoretical investigation into the creep properties of a simple structure of 316 stainless steel. *Int. J. Mech. Sci.* 1984. Vol. 26. Iss. 3. P. 149–164. DOI: 10.1016/0020-7403(84)90050-X.
32. Enikeev F.U. Eksperimentalnaya otsenka skorostnoy chuvstvitelnosti sverkhplastichnogo materiala s silno neodnorodnym napryazhenno-deformirovannym sostoyaniem [Experimental evaluation of speed sensitivity of superplastic material in strongly nonuniform deformed mode]. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory]. 2007. Vol. 73. No 10. P. 44–50 (In Russian).
33. Radchenko V.P., Shapievsii D.V. Mathematical model of creep for a microinhomogeneous nonlinearly elastic material. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2008. Vol. 49. No 3. P. 478–483.
34. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep analysis with a stress range dependent constitutive model. *Arch. Appl. Mech.* 2009. Vol. 79. P. 619–630.
35. Lu L.Y., Lin G.L., Shih M.H. An experimental study on a generalized Maxwell model for nonlinear viscoelastic dampers used in seismic isolation. *Eng. Struct.* 2012. Vol. 34. P. 111–123. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.09.012.
36. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzenii, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem Rabotnova dlya vyazkoprugoplastichnykh materialov [Analysis of creep curves general properties under step loading generated by the Rabotnov nonlinear relation for viscoelastic plastic materials]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University: Series Natural Sciences]. 2017. No 3. P. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123 (In Russian).
37. Khokhlov A.V. Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences]. 2017. Vol. 21. No 2. P. 326–361. DOI: 10.14498/vsgtu1533 (In Russian).

**APPLICABILITY INDICATORS AND IDENTIFICATION TECHNIQUE
FOR A NONLINEAR MAXWELL-TYPE ELASTO-VISCOPLASTIC MODEL
USING REPEATED CREEP RECOVERY TESTS**

Khokhlov A.V.

*Lomonosov Moscow State University, Institute of Mechanics, Moscow, Russian Federation
M.K. Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russian Federation*

A physically non-linear Maxwell-type constitutive relation for non-aging elasto-viscoplastic materials is considered. General properties of repeated creep recovery curves generated by the relation under

four-step uni-axial loadings consisting of two rectangular pulses of stress and two rest periods at zero stress are studied analytically assuming two material functions of the relation are arbitrary. The analysis reveals several characteristic features of the theoretic creep recovery curves and repeated creep recovery curves that can be employed as the relation applicability (or non- applicability) indicators which are convenient for check using test data of a material. Two effective general identification techniques are developed. The first one is based on a set of creep recovery tests at various stress levels and implies measurement of two strain magnitudes in each test. The second one is based on a set of repeated creep and recovery tests and implies measurement of four strain magnitudes in each test. More complex loading program enables to reduce the number of tests and samples twice and to obtain more information on a material behavior and to check a number of additional applicability indicators. The explicit expressions are derived in each case to determine the material functions values at arbitrarily chosen points in stress domain. The identification techniques enable separate and direct evaluation of the material functions values via test data without error accumulation. A number of the identification technique versions are considered and their advantages and shortcomings are discussed.

In the case of materials exhibiting creep rate power dependence on stress, a specific rapid procedure is developed for the model identification in the class of power material functions and additional applicability indicators are found. In this case only one repeated creep recovery test and four measured magnitudes of strain are sufficient to determine four material parameters through the explicit expressions obtained.

Keywords: viscoplasticity, viscoelasticity, physical non-linearity, creep, recovery, creep recovery curves, plastic strain, applicability indicators, polymers, metallic alloys, asphalt concrete, synthetic fibers and fabrics, geotextile, geogrids.