

УДК 531.391

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-3-324-334

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ РОТОРНОЙ СИСТЕМЫ
С ЖИДКОСТЬЮ, ОСЬ КОТОРОЙ РАСПОЛОЖЕНА
В АНИЗОТРОПНЫХ ЗАКРЕПЛЕНИЯХ**

© 2021 г.

Дерендяев Д.Н., Дерендяев Н.В.

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

derendyaevdm@mail.ru

Поступила в редакцию 29.04.2021

Ранее одним из авторов был предложен и разработан (совместно с соавторами) оригинальный метод исследования устойчивости стационарного вращения роторных систем, содержащих вязкую жидкость и имеющих привод, поддерживающий угловую скорость вращения постоянной. Предполагалось, что ротор обладает осевой симметрией, закрепления его оси изотропны. Метод основан на двух теоремах, согласно которым изменение степени неустойчивости связано с возможностью осуществления возмущенного движения типа круговой прецессии. При таком движении поле скоростей и форма поверхности жидкости не зависят от времени в специально выбранной неинерциальной системе отсчета, связанной с линией центров. Нахождение условий осуществимости круговой прецессии позволяет эффективно строить границы областей устойчивости режима стационарного вращения в пространстве параметров задач. Кроме того, изучение возникновения круговой прецессии позволяет найти условия, при которых в роторной системе имеет место докритическая (закритическая) бифуркация Андронова – Хопфа, и выделить «опасные» («безопасные») участки границ областей устойчивости. Предложенный ранее метод исследования устойчивости распространен на системы, в которых ось ротора располагается в анизотропных закреплениях лавалевского типа. При исследовании роторных систем указанного типа удалось связать изменение степени неустойчивости с осуществимостью возмущенных движений типа эллиптической прецессии, так как мнимые характеристические числа уравнений в отклонениях от режима стационарного вращения возможны только в случае, когда существует возмущенное движение в виде эллиптической прецессии. Приведен пример исследования устойчивости стационарного вращения типичной роторной системы.

Ключевые слова: роторная система, полость с вязкой жидкостью, режим стационарного вращения, устойчивость, автоколебания.

Введение

Исследованию динамики роторных систем посвящено достаточно большое количество публикаций [1–7]. Задачи динамики роторных систем с жидкостью

представляют интерес как с общетеоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений в различных областях техники. Исследование динамики этих систем сопряжено с большими трудностями, вызванными необходимостью учитывать совместное действие таких факторов, как быстрое вращение, наличие свободной поверхности и вязкости жидкости, а также неконсервативных внешних сил.

В последние годы вызывают большой интерес работы, посвященные исследованию устойчивости вращения многозвенного гибкого ротора, и исследования с использованием теории волнового резонанса [8–14].

В серии статей [15–19] был разработан и описан метод исследования устойчивости стационарного вращения роторных систем, содержащих вязкую жидкость и имеющих привод, поддерживающий угловую скорость вращения постоянной. В основе метода лежат две теоремы, согласно которым изменение степени неустойчивости связано с возможностью осуществления возмущенного движения типа круговой прецессии. Такое движение обладает замечательным свойством: поле скоростей и форма поверхности жидкости не зависят от времени в специально выбранной неинерциальной системе отсчета, связанной с линией центров. Нахождение условий осуществимости круговой прецессии позволяет эффективно строить границы областей устойчивости режима стационарного вращения в пространстве параметров задачи [20].

В настоящей статье предложенный ранее метод исследования устойчивости распространяется на системы, в которых ось ротора располагается в анизотропных закреплениях лавалевского типа [21].

Постановка задачи

На рис. 1 схематически представлен лавалевский ротор и поперечный разрез ротора плоскостью симметрии $O_1x_1x_2$, перпендикулярной оси стационарного вращения. Полость ротора частично заполнена вязкой жидкостью. В режиме стационарного вращения точка O пересечения оси ротора с плоскостью $O_1x_1x_2$ совпадает с точкой пересечения оси стационарного вращения с той же плоскостью, а жидкость располагается в слое постоянной толщины на поверхности цилиндрической полости ротора и вращается вместе с ним как одно целое с угловой скоростью Ω .

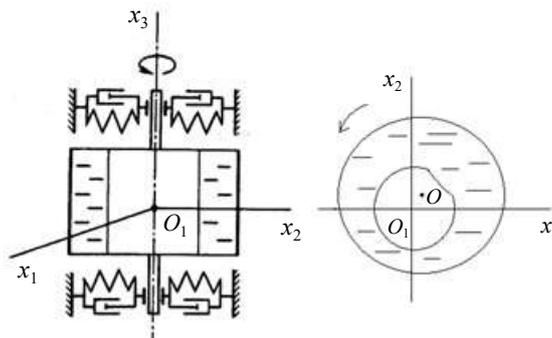


Рис. 1. Лавалевский ротор

Линеаризованные уравнения движения в отклонениях от режима стационарного вращения (в плоской модели) содержат:

1) уравнения поступательного движения цилиндрического ротора в плоскости, параллельной плоскости $O_1x_1x_2$, линеаризованные вблизи его состояния при стационарном вращении:

$$M\ddot{x}_i^O + H_i\dot{x}_i^O + K_ix_i^O = F_i, \quad i = 1, 2,$$

где x_i^O – координаты точки O ; F_i – результирующая сил, с которыми заполняющая жидкость действует по поверхности полости ротора; M – масса ротора; H_1, H_2 и K_1, K_2 – коэффициенты демпфирования и жесткости закреплений по осям x_1, x_2 соответственно;

2) условие постоянства угловой скорости вращения цилиндра вокруг оси O_1x_3 : $\Omega = \text{const}$;

3) уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоскости $O_1x_1x_2$, линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси O_1x_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k^0 \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j^0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \Delta v_j, \\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} &= 0, \quad v_1^0 = -\Omega x_2, v_2^0 = \Omega x_1, \end{aligned}$$

где v_j – отклонение поля скоростей жидкости, p' – отклонение давления от соответствующих величин при квазитвердом вращении, ρ – плотность жидкости, которая принимается постоянной, $j = 1, 2, k = 1, 2, \nu$ – кинематическая вязкость жидкости;

4) условие прилипания жидкости к поверхности цилиндра, условие непрерывности напряжений и кинематическое условие на свободной поверхности, перенесенные в линейном приближении по отклонениям от состояния стационарного вращения на поверхности $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ и $x_1^2 + x_2^2 = b^2$, a – радиус ротора, b – радиус свободной поверхности жидкости при стационарном вращении (жидкость будет иметь форму цилиндра):

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{x}_1^O + \Omega x_2^O, \quad v_2 = \dot{x}_2^O + \Omega x_1^O, \quad x_1^2 + x_2^2 = a^2, \\ \sigma'_{ik} n_k^0 &= -\rho \Omega^2 b s n_i^0, \quad \sigma'_{ik} = -p \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \Omega \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) s &= v_j n_j^0, \quad x_1^2 + x_2^2 = b^2, \end{aligned}$$

где σ'_{ij} – тензор напряжений, n_k^0 – компоненты вектора внешней нормали к свободной поверхности жидкости, μ – динамическая вязкость жидкости, δ_{ij} – символ Кронекера, s – отклонение свободной поверхности жидкости от невозмущенной поверхности по нормали к ней;

5) формулы, определяющие F_1 и F_2 через отклонения давления и компонент поля скоростей жидкости от соответствующих величин при стационарном квазитвердом вращении:

$$\begin{aligned} F_i &= -\oint \sigma'_{jk} n_k dl + \rho \frac{\Omega^2 a^2}{2} x_j^O, \quad j = 1, 2, \\ x_1^2 + x_2^2 &= a^2, \end{aligned}$$

l – длина окружности, образованной поверхностью жидкости.

В рассматриваемой модели закрепления анизотропны, а взаимодействие ротора с жидкостью и закреплениями оси ротора представлено потенциальной, циркулярной, диссипативной и гироскопической силами.

Представленная система уравнений в отклонениях допускает частные решения, пропорциональные $e^{\lambda t}$, где λ – характеристическое число. Будем считать стационарное вращение устойчивым, если все λ лежат слева от мнимой оси, и неустойчивым, если хотя бы одно λ находится справа от мнимой оси.

Гидродинамическая задача в случае анизотропных закреплений

При исследовании роторных систем указанного типа удастся связать изменение степени неустойчивости с осуществимостью возмущенных движений типа эллиптической прецессии. Можно показать, что мнимые характеристические числа уравнений в отклонениях от режима стационарного вращения возможны только в случае, когда существует возмущенное движение в виде эллиптической прецессии. В таком движении точка O описывает эллипс с частотой ω . Оси эллипса, вообще говоря, повернуты относительно осей координатной системы $O_1x_1x_2$ на некоторый угол α . Решение гидродинамической части задачи при движениях типа эллиптической прецессии существенно упрощается, так как поля скоростей, давлений и форма свободной поверхности жидкости в случае эллиптической прецессии описываются в виде суперпозиции соответствующих элементов, отвечающих двум круговым прецессиям с частотами ω и $-\omega$ (радиусы прецессий ε_1 и ε_2) [21]. Это позволяет эффективно находить гидродинамические силы, действующие на ротор. В случае анизотропных закреплений оси ротора теоремы 1 и 2, полученные для изотропного случая [20], дополняются еще двумя теоремами.

Теорема 3. Мнимые значения $\lambda = \pm i\omega$ существуют тогда и только тогда, когда возможно возмущенное движение, в котором точка O (центр сечения цилиндра) описывает эллипс на частоте ω (или $-\omega$), а гидродинамические элементы периодически изменяются во времени в системе $O_1x_1x_2$.

Доказательство этой теоремы строится по следующей схеме:

а) берем комплексное решение уравнений в отклонениях $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{v}, \hat{p}, \hat{s})e^{i\omega t}$ при $\lambda = i\omega$. Здесь $(\hat{x}_0\mathbf{e}_x + \hat{y}_0\mathbf{e}_y)e^{i\omega t} = \mathbf{z}_0(t)$ описывает движение точки O (центра цилиндра): $\mathbf{r}_0(t) = \text{Re } \mathbf{r}_0(t) = \text{Re } (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{i\omega t}$;

б) наряду с решением из а) есть решение, умноженное на комплексную константу $e^{i\theta}$, в котором $\mathbf{r}_0(t) = \text{Re } (\mathbf{z}_0(t)e^{i\theta}) = \text{Re } (\mathbf{a}' + i\mathbf{b}')e^{i\omega t}$. Всегда можно так выбрать θ , что вещественные векторы \mathbf{a}' , \mathbf{b}' будут ортогональными, то есть $(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = 0$;

в) повернув исходные оси координат $O'xy$ на угол α , направим их по векторам \mathbf{a}' , \mathbf{b}' . В новых осях $\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, где a, b – постоянные, а движение точки O будет по эллипсу $x' = a \cos \omega t, y' = b \sin \omega t$. При этом в новой системе координат $O'x'y'$ гидродинамические элементы остаются периодическими функциями от t .

Таким образом, если есть мнимые $\lambda = \pm i\omega$, то существует возмущенное движение в виде эллиптической прецессии, при котором точка O описывает эллипс, а гидродинамические элементы периодически изменяются во времени в лабораторной системе отсчета. В общем случае при наличии комплексно-сопряженной пары $\lambda = \pm i\omega$ есть только одна эллиптическая прецессия на частоте ω (или $-\omega$).

Введем неинерциальную систему отсчета $O_2\xi_1\eta_1$ (рис. 2). Оси системы $O_1x_1x_2'$ направлены по главным осям эллипса. Точка O (центр поперечного сечения ци-

линдра) описывает эллипс в системе $O_1x_1x_2$ на частоте ω . Радиус цикла $O_1O_2 = \varepsilon_2$, радиус эпицикла $O_2O = \varepsilon_1$. Точка O_1 – пересечение оси стационарного вращения с плоскостью поперечного сечения цилиндра.

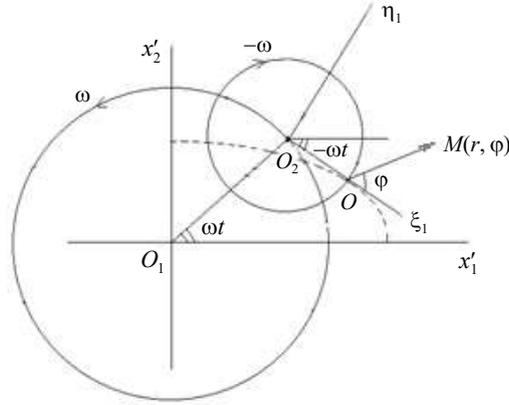


Рис. 2. Неинерциальная система отсчета $O_2\xi_1\eta_1$

Поле сил инерции в пространстве отсчета $O_2\xi_1\eta_1$ в полярной системе координат с полюсом в точке O имеет вид:

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}_r [\omega^2 \varepsilon_2 \cos(2\omega t - \varphi) + \omega^2 (r + \varepsilon_1 \cos \varphi) - 2\omega v] + \mathbf{e}_\varphi [\omega^2 \varepsilon_2 \sin(2\omega t - \varphi) - \omega^2 \varepsilon_1 \sin \varphi + 2\omega u],$$

где u, v – радиальная и азимутальная компоненты поля скоростей в полярной системе координат.

Уравнения движения жидкости в системе $O_2\xi_1\eta_1$, линеаризованные вблизи невозмущенного движения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\varphi(\Omega + \omega)r$, $p = p_0(r)$, записываются в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial u}{\partial \varphi} - (\Omega + \omega)^2 r - 2(\Omega + \omega)v = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + vL_1(u, v) - 2\omega v + \omega^2 \varepsilon_2 \cos(2\omega t - \varphi) + \omega^2 (r + \varepsilon_1 \cos \varphi) - 2\omega(\Omega + \omega)r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + 2u(\Omega + \omega) + (\Omega + \omega) \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \\ & = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + vL_2(u, v) + 2\omega u + \omega^2 \varepsilon_2 \sin(2\omega t - \varphi) - \varepsilon_1 \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0,$$

$$L_1(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi},$$

$$L_2(u, v) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

В стационарном невозмущенном движении $u = v = 0$, $p = p_0(r)$, а значит

$$-(\Omega + \omega)^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \omega^2 r - 2\omega(\Omega + \omega)r,$$

то есть

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \rho\Omega^2 r, \quad p_0(r) = \frac{\rho\Omega^2 r^2}{2} + \text{const.}$$

Обозначив $p' = p - p_0(r)$ – возмущение давления, перепишем уравнения в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + 2\Omega v + \nu L_1(u, v) + \omega^2 \varepsilon_2 \cos(2\omega t - \varphi) + \omega^2 \varepsilon_1 \cos \varphi, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'}{\partial \varphi} - 2\Omega u + \nu L_2(u, v) + \omega^2 \varepsilon_2 \sin(2\omega t - \varphi) - \varepsilon_1 \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

Представим решение системы (1) в виде суммы двух компонент: $u = u_I + u_{II}$, $v = v_I + v_{II}$, $p' = p'_I + p'_{II}$, где компоненты удовлетворяют системам:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_I}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial u_I}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_I}{\partial r} + 2\Omega v_I + \nu L_1(u_I, v_I) + \omega^2 \varepsilon_2 \cos(2\omega t - \varphi), \\ \frac{\partial v_I}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial v_I}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'_I}{\partial \varphi} - 2\Omega u_I + \nu L_2(u_I, v_I) - \omega^2 \varepsilon_2 \sin(2\omega t - \varphi), \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{II}}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial u_{II}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_{II}}{\partial r} + 2\Omega v_{II} + \nu L_1(u_{II}, v_{II}) + \omega^2 \varepsilon_1 \cos \varphi, \\ \frac{\partial v_{II}}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial v_{II}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'_{II}}{\partial \varphi} - 2\Omega u_{II} + \nu L_2(u_{II}, v_{II}) - \omega^2 \varepsilon_1 \sin \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Уравнения неразрывности не выписываем, поскольку форма этого уравнения для компонент I и II сохраняется.

Решение (2) от r , φ , t строим в виде функций от r и $\varphi' = \varphi - 2\omega t$. Получаем:

$$\begin{cases} (\Omega - \omega) \frac{\partial u_I}{\partial \varphi'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_I}{\partial r} + 2\Omega v_I + \nu L_1(u_I, v_I) + \omega^2 \varepsilon_2 \cos \varphi', \\ (\Omega - \omega) \frac{\partial v_I}{\partial \varphi'} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'_I}{\partial \varphi} - 2\Omega u_I + \nu L_2(u_I, v_I) - \omega^2 \varepsilon_2 \sin \varphi'. \end{cases}$$

Но эта же система получается в случае круговой прецессии с частотой ω и радиусом ε_2 ; для этого надо только в соответствующем решении заменить φ на φ' . В системе $O_2 \xi_1 \eta_1$ решение для круговой прецессии на частоте ω надо повернуть против часовой стрелки на $2\omega t$.

Решение (3) строим не зависящим от t , получаем:

$$\begin{cases} (\Omega + \omega) \frac{\partial u_{II}}{\partial \varphi'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_{II}}{\partial r} + 2\Omega v_{II} + \nu L_1(u_{II}, v_{II}) + \omega^2 \varepsilon_1 \cos \varphi', \\ (\Omega + \omega) \frac{\partial v_{II}}{\partial \varphi'} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'_{II}}{\partial \varphi} - 2\Omega u_{II} + \nu L_2(u_{II}, v_{II}) - \omega^2 \varepsilon_1 \sin \varphi'. \end{cases}$$

Эта же система получается в случае круговой прецессии с частотой $-\omega$ и радиусом ε_1 .

Пусть $u = U(r, \varphi, \omega, \varepsilon)$, $v = V(r, \varphi, \omega, \varepsilon)$, $p' = P(r, \varphi, \omega, \varepsilon)$, $s = S(r, \varphi, \omega, \varepsilon)$ – решение гидродинамической задачи в системе $O \xi \eta$ в случае круговой прецессии, записанное в полярных координатах (r, φ) .

В соответствии с вышеприведенными соображениями имеет место:

Теорема 4. Решение гидродинамической задачи в системе $O_2\xi_1\eta_1$ в случае эллиптической прецессии представляет собой суперпозицию решений для двух круговых прецессий:

$$\begin{aligned} u &= U(r, \varphi - 2\omega t, \omega, \varepsilon_2) + U(r, \varphi, -\omega, \varepsilon_1), \\ v &= V(r, \varphi - 2\omega t, \omega, \varepsilon_2) + V(r, \varphi, -\omega, \varepsilon_1), \\ p' &= P(r, \varphi - 2\omega t, \omega, \varepsilon_2) + P(r, \varphi, -\omega, \varepsilon_1), \\ s &= S(\varphi - 2\omega t, \omega, \varepsilon_2) + S(\varphi, -\omega, \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Здесь (r, φ) – полярные координаты в системе $O_2\xi_1\eta_1$ с полюсом в точке O .

Гидродинамические силы, действующие на цилиндр в случае эллиптической прецессии

С использованием полученных выражений для поля скоростей и поля давлений, суммируя напряжения, действующие на поверхности цилиндра $r = a$, получим выражения для компонент силы, с которой жидкость действует на цилиндр в случае эллиптической прецессии:

$$\begin{aligned} F_1 &= (F_\xi(\omega, \varepsilon_2) + F_\xi(-\omega, \varepsilon_1)) \cos \omega t - (F_\eta(\omega, \varepsilon_2) - F_\eta(-\omega, \varepsilon_1)) \sin \omega t, \\ F_2 &= (F_\xi(\omega, \varepsilon_2) - F_\xi(-\omega, \varepsilon_1)) \sin \omega t + (F_\eta(\omega, \varepsilon_2) + F_\eta(-\omega, \varepsilon_1)) \cos \omega t, \end{aligned}$$

где $F_\xi(\omega, \varepsilon)$, $F_\eta(\omega, \varepsilon)$ – проекции гидродинамической силы, действующей на цилиндр в случае круговой прецессии с частотой ω и радиусом ε , на оси системы отсчета $O\xi\eta$ [20]. Эта система изображена на рис. 3.

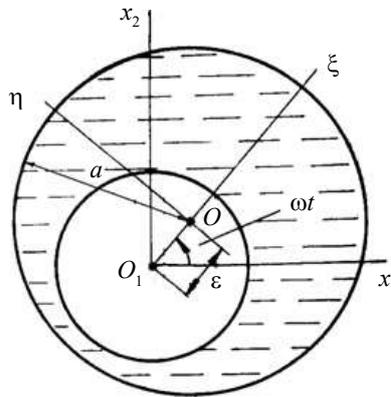


Рис. 3. Круговая прецессия и неинерциальная система отсчета $O\xi\eta$, связанная с линией центров O_1O

Бифуркационные значения параметров

Подставляя в уравнения движения цилиндра в системе $O_1x_1'x_2'$ $x_1'^O = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \times \cos \omega t$, $x_2'^O = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \omega t$ и выражения для гидродинамических сил, действующих на цилиндр в случае эллиптической прецессии [21], получим конечную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -M\omega^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = F_{\xi}(\omega, \varepsilon_2) + F_{\xi}(-\omega, \varepsilon_1) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(K_1 \cos^2 \alpha + K_2 \sin^2 \alpha) + \\ \quad + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\omega/2) \sin 2\alpha(H_1 - H_2), \\ -M\omega^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = F_{\xi}(\omega, \varepsilon_2) - F_{\xi}(-\omega, \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(K_1 \sin^2 \alpha + K_2 \cos^2 \alpha) - \\ \quad - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\omega/2) \sin 2\alpha(H_1 - H_2), \\ F_{\eta}(-\omega, \varepsilon_1) - F_{\eta}(\omega, \varepsilon_2) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)((K_1 - K_2)/2) \sin 2\alpha + \\ \quad + \omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(H_1 \cos^2 \alpha + H_2 \sin^2 \alpha) = 0, \\ F_{\eta}(\omega, \varepsilon_2) + F_{\eta}(-\omega, \varepsilon_1) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)((K_1 - K_2)/2) \sin 2\alpha - \\ \quad - \omega(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(H_1 \sin^2 \alpha + H_2 \cos^2 \alpha) = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь $K_{1,2}$ и $H_{1,2}$ – значения параметров анизотропных жесткости и демпфирования соответственно.

Система (4) соответствует случаю, когда $\operatorname{Re} \lambda = 0$, то есть значения параметров, которые можно из нее получить, являются бифуркационными, то есть соответствуют смене степени неустойчивости системы.

Заключение

Если характеристические числа λ непрерывно зависят от параметров задачи, то переход λ из левой полуплоскости в правую происходит при пересечении мнимой оси, то есть при таких значениях параметров, когда существует хотя бы одно мнимое λ . В этом случае осуществимо возмущенное движение типа эллиптической прецессии. Таким образом, при исследовании устойчивости достаточно рассмотреть не все возмущенные движения, а лишь возмущения специального вида – эллиптические прецессии.

Исследование таких возмущенных движений позволяет эффективно находить бифуркационные значения параметров, при которых существуют мнимые λ , и строить границы областей с различной степенью неустойчивости, в частности, границы областей устойчивости режима стационарного вращения в пространстве параметров задачи.

Список литературы

1. Kliem W., Pommer C., Stoustrup J. Stability of rotor systems: A complex modelling approach. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 1998. Vol. 49. Iss. 4. P. 644–655. DOI: 10.1007/s000000050113.
2. Villa C., Sinou J.-J., Thouverez F. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2008. Vol. 13. Iss. 4. P. 804–821. DOI: 10.1016/j.cnsns.2006.06.012.
3. Sun W., Yan Z., Tan T., Zhao D., Luo X. Nonlinear characterization of the rotor-bearing system with the oil-film and unbalance forces considering the effect of the oil-film temperature. *Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 92. P. 1119–1145. DOI: 10.1007/s11071-018-4113-5.
4. Okabe E.P., Cavalca K.L. Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting pad bearings including turbulence effects. *Nonlinear Dynamics*. 2009. Vol. 57. Iss. 4. P. 481–495.
5. Wang Y., Xiong X., Hu X. Vibration and stability analysis of a bearing-rotor system with transverse breathing crack and initial bending. *Machines*. 2021. Vol. 9. Iss. 4. <https://doi.org/10.3390/machines9040079>.
6. Guo Z., Kirk R. Instability boundary for rotor-hydrodynamic bearing systems. Part 1: Jeffcott rotor with external damping. *ASME. Journal of Vibration and Acoustics*. 2003. Vol. 125. No 4. P. 417–422. DOI: 10.1115/1.1547466.

7. Pietkiewicz P., Banaszek S., Żywica G. The stability loss of the rotor-slide bearings system under random load variations. *Journal of Vibroengineering*. 2017. Vol. 19. Iss. 7. P. 4921–4935. DOI:10.21595/jve.2017.19349.
8. Firouz-Abadi R.D., Permoon M.R., Haddadpour H. On the instability of spinning cylindrical shells partially filled with liquid. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2012. Vol. 12. No 3. Art. No 1250018. DOI: 10.1142/S0219455412500186.
9. Firouz-Abadi R.D., Noorian M.A., Haddadpour H. A fluid-structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*. 2010. Vol. 26. Iss. 5. P. 747–763. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003.
10. Wang H., Chen C. Stability analysis of a rotor system with fluid applying wave resonance theory. *Physics of Fluids*. 2020. Vol. 32. Iss. 5. P. 054106-1–054106-9. DOI:10.1063/5.0011578.
11. Cruz J., Velazquez M., Chavez O. et al. Stability analysis of a rotor systems with flow forces. *Industrial and Robotic Systems: Latin American Symposium on Industrial and Robotic Systems (LASIRS 2019)*. 2020. P. 65–75. DOI: 10.1007/978-3-030-45402-9_8.
12. Бармина О.В., Никифоров А.Н., Татусь Н.А. Двумерное поверхностное движение синхронно и асинхронно вращающейся жидкости внутри ротора с радиальными перегородками. *Вестник научно-технического развития*. 2015. №12(100). С. 3–9.
13. Никифоров А.Н., Татусь Н.А., Шохин А.Е. О волновом резонансе экспериментальных роторов с маловязкой жидкостью и радиальными перегородками. *Вестник научно-технического развития*. 2015. №10(98). С. 51–59.
14. Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н. Волновые резонансы и устойчивость вращения роторных систем, содержащих вязкую жидкость. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. №4(5). С. 2138–2139.
15. Дерендяев Н.В., Сандалов В.М. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частичного заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. *ПММ*. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 578–586.
16. Дерендяев Н.В. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью. *ДАН СССР*. 1983. Т. 272. №5. С. 1073–1076.
17. Дерендяев Н.В., Сеняткин В.А. Условия устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного слоисто-неоднородной вязкой несжимаемой жидкостью. *ПМТФ*. 1984. №1. С. 34–44.
18. Дерендяев Н.В. Бифуркация Андронова – Хопфа в динамике роторной системы, содержащей жидкость. *ДАН СССР*. 1988. Т. 301. №4. С. 798–801.
19. Derendyaev N.V., Vostrukhov A.V., Soldatov I.N. Stability and Andronov – Hopf bifurcation of steady-state motion of rotor system partly filled with liquid: continuous and discrete models. *Journal of Applied Mechanics*. 2006. Vol. 73. No 4. P. 580–589. DOI:10.1115/1.2164514.
20. Дерендяев Н.В. *Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость*. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2014. 154 с.
21. Derendyaev N.V., Derendyaev D.N. Stability of steady rotation of rotor systems with fluid in the case of anisotropic fastening of the rotor axis. *Doklady Physics*. 2018. Vol. 63. Iss 7. P. 293–296. DOI: 10.1134/S1028335818070029.

References

1. Kliem W., Pommer C., Stoustrup J. Stability of rotor systems: A complex modelling approach. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*. 1998. Vol. 49. Iss. 4. P. 644–655. DOI: 10.1007/s000000050113.
2. Villa C., Sinou J.-J., Thouverez F. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system. *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2008. Vol. 13. Iss. 4. P. 804–821. DOI: 10.1016/j.cnsns.2006.06.012.
3. Sun W., Yan Z., Tan T., Zhao D., Luo X. Nonlinear characterization of the rotor-bearing system with the oil-film and unbalance forces considering the effect of the oil-film temperature. *Non-linear Dyn.* 2018. Vol. 92. P. 1119–1145. DOI: 10.1007/s11071-018-4113-5.
4. Okabe E.P., Cavalca K.L. Rotordynamic analysis of systems with a non-linear model of tilting pad bearings including turbulence effects. *Nonlinear Dyn.* 2009. Vol. 57. Iss. 4. P. 481–495.

5. Wang Y., Xiong X., Hu X. Vibration and stability analysis of a bearing-rotor system with transverse breathing crack and initial bending. *Machines*. 2021. Vol. 9. Iss. 4. <https://doi.org/10.3390/machines9040079>.
6. Guo Z., Kirk R. Instability boundary for rotor-hydrodynamic bearing systems. Part 1: Jeffcott rotor with external damping. *J. Vib. Acoust.* 2003. Vol. 125. No 4. P. 417–422. DOI: 10.1115/1.1547466.
7. Pietkiewicz P., Banaszek S., Żywica G. The stability loss of the rotor-slide bearings system under random load variations. *J. Vibroeng.* 2017. Vol. 19. Iss. 7. P. 4921–4935. DOI:10.21595/jve.2017.19349.
8. Firouz-Abadi R.D., Permoon M.R., Haddadpour H. On the instability of spinning cylindrical shells partially filled with liquid. *Int. J. Struct. Stab Dy.* 2012. Vol. 12. No 3. Art. No 1250018. DOI: 10.1142/S0219455412500186.
9. Firouz-Abadi R.D., Noorian M.A., Haddadpour H. A fluid-structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid. *Journal of Fluids and Structures*. 2010. Vol. 26. Iss. 5. P. 747–763. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.003.
10. Wang H., Chen C. Stability analysis of a rotor system with fluid applying wave resonance theory. *Physics of Fluids*. 2020. Vol. 32. Iss. 5. P. 054106-1–054106-9. DOI:10.1063/5.0011578.
11. Cruz J., Velazquez M., Chavez O. et al. Stability analysis of a rotor systems with flow forces. *Industrial and Robotic Systems: Latin American Symposium on Industrial and Robotic Systems (LASIRS 2019)*. 2020. P. 65–75. DOI: 10.1007/978-3-030-45402-9_8.
12. Barmina O., Nikiforov A., Tatus' N. Dvumernoe poverkhnostnoe dvizhenie sinkhronno i asinkhronno vrashchayushcheyasya zhidkosti vnutri rotora s radialnymi peregorodkami [Two-dimensional surface motion of fluid rotating synchronously and asynchronously inside rotor with radial baffles]. 2015. *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya*. 2015. No 12(100). P. 3–9 (In Russian).
13. Nikiforov A., Tatus' N., Shokhin A. O volnovom rezonanse eksperimentalnykh rotorov s malovyazkoy zhidkost'yu i radialnymi peregorodkami [About wave resonance of experimental rotors with low-viscous fluid and radial baffles]. *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya*. 2015. No 10(98). P. 51–59 (In Russian).
14. Derendyaev N.V., Soldatov I.N. Volnovye rezonansy i ustoychivost vrashcheniya rotornykh sistem, sodержashchikh vyazkuyu zhidkost [Wave resonances and rotation stability of rotary systems containing a viscous liquid]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo [Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod]*. 2011. №4 (5). P. 2138–2139 (In Russian).
15. Derendyaev N.V., Sandalov V.M. Ob ustoychivosti statsionarnogo vrashcheniya tsilindra, chastichnogo zapolnennogo vyazkoy neshzhimaemoy zhidkost'yu [On the stability of stationary rotation of a cylinder partially filled with a viscous incompressible liquid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 1982. Vol. 46. Iss. 4. P. 578–586 (In Russian).
16. Derendyaev N.V. Ob ustoychivosti statsionarnogo vrashcheniya tsilindra, zapolnennogo stratifitsirovannoy vyazkoy neshzhimaemoy zhidkost'yu [Stability of steady-state rotation of a cylinder filled with a stratified viscous incompressible fluid]. *Doklady AN SSSR [Doklady Physics]*. 1983. Vol. 272. Iss. 5. P. 1073–1076 (In Russian).
17. Derendyaev N.V., Senyatin V.A. Usloviya ustoychivosti statsionarnogo vrashcheniya tsilindra, zapolnennogo sloisto-neodnorodnoy vyazkoy neshzhimaemoy zhidkost'yu [Stability conditions for stationary rotation of a cylinder full of a layered-inhomogeneous viscous incompressible liquid]. *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mathematics and Technical Physics]*. 1984. No 1. P. 34–44 (In Russian).
18. Derendyaev N.V. Bifurkatsiya Andronova – Khopfa v dinamike rotornoy sistemy, sodержashchey zhidkost [Andronov – Hopf bifurcation in the dynamics of a rotary system containing a liquid]. *Doklady AN SSSR [Doklady Physics]*. 1988. Vol. 301. No 4. P. 798–801 (In Russian).
19. Derendyaev N.V., Vostrukhov A.V., Soldatov I.N. Stability and Andronov – Hopf bifurcation of steady-state motion of rotor system partly filled with liquid: continuous and discrete models. *J. Appl. Mech.* 2006. Vol. 73. No 4. P. 580–589. DOI:10.1115/1.2164514.
20. Derendyaev N.V. *Ustoychivost vrashcheniya rotornykh sistem, sodержashchikh zhidkost*

[*Stability of Rotation of Rotary Systems Containing Liquid*]. Nizhny Novgorod. NNGU Publ. 2014. 154 p. (In Russian).

21. Derendyaev N.V., Derendyaev D.N. Stability of steady rotation of rotor systems with fluid in the case of anisotropic fastening of the rotor axis. *Doklady Physics*. 2018. Vol. 63. Iss 7. P. 293–296. DOI: 10.1134/S1028335818070029.

THE RESEARCH OF STABILITY OF STATIONARY ROTATION A ROTOR SYSTEM WITH A LIQUID, THE AXLE OF WHICH IS LOCATED IN ANISOTROPIC FIXINGS

Derendyaev D.N., Derendyaev N.V.

*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

Earlier, one of the authors proposed and developed (together with coworkers) an original method to study the stability of stationary rotation of rotary systems containing a viscous liquid and having a drive that maintains the angular velocity of rotation constant. It was assumed that the rotor has axial symmetry, the anchors of its axis are isotropic. The method is based on two theorems, according to which a change in the degree of instability is associated with the possibility of a perturbed motion of the circular precession type. This motion has a remarkable property: the velocity field and the shape of the liquid surface do not depend on time in a specially selected non-inertial reference frame associated with the line of centers. Finding the conditions for the feasibility of circular precession makes it possible to effectively construct the boundaries of the stability regions of the stationary rotation regime in the space of problem parameters. In addition, the study of the occurrence of circular precession allows us to find the conditions under which a subcritical (supercritical) Andronov–Hopf bifurcation takes place in the rotor system and to identify "dangerous" ("safe") sections of the boundaries of the stability regions. In this paper, the previously proposed method of stability research applies to systems in which the rotor axis is located in anisotropic Laval type anchors. In the study of rotary systems of this type, it is possible to link the change in the degree of instability with the feasibility of perturbed movements of the elliptical precession type. It can be shown that the imaginary characteristic numbers of the equations in deviations from the stationary rotation mode are possible only in the case when there is a perturbed motion in the form of an elliptical precession. An example of a study of the stability of stationary rotation of a typical rotary system is given. Mechanical effects caused by the fact that gyroscopic stabilization becomes impossible with anisotropic fixing of the rotor axis are noted

Keywords: rotary system, cavity with a viscous liquid, stationary rotation mode, stability and self-oscillation.