

УДК 539.3

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ МАТЕРИАЛА НА ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Л.А. Игумнов, А.А. Белов, С.Ю. Литвинчук

Нижний Новгород

Методом граничных элементов решается начально-краевая задача трехмерных теорий упругости и вязкоупругости. Гранично-элементная техника используется совместно с интегральным преобразованием Лапласа по времени. Рассматривается задача удара по призматической консоли. Вязкоупругие свойства материалов описываются соотношениями классических и модифицированных регулярных моделей (Максвелла, Фойгта, стандартного вязкоупругого тела) или классических и модифицированных слабосингулярных моделей. Численные результаты для упругого случая сравниваются с соответствующими результатами, полученными методом гранично-временных элементов.

1. Постановка задачи

Рассматривается однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Границу тела обозначим через Γ . Предполагаем, что Ω является изотропным вязкоупругим телом [1, 2], для которого ρ – плотность материала, $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ – функции Ламе материала. Динамическое состояние тела Ω описывается системой дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\mu(t) * \Delta u(x, t) + (\lambda(t) + \mu(t)) * \text{grad div } u(x, t) = \rho \ddot{u}(x, t), \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – вектор перемещений точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t , символ "*" означает свертку Стильтьеса по времени. Физические и геометрические соотношения имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda * \varepsilon_{kk} + 2\mu * \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial u_i} + \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \right),$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) – тензоры напряжений и деформаций. Пусть вектор перемещений и функции Ламе материала удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} u^k(x, 0) = \dot{u}^k(x, 0) = 0, \\ \mu(t - \tau) = 0, \quad \lambda(t - \tau) = 0, \quad \forall t < \tau, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \dot{\mu}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \dot{\lambda}(t) = 0. \end{aligned}$$

Конкретный вид функций $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ определяется вязкоупругой моделью материала. Будем рассматривать случай пропорциональных функций памяти, тогда достаточно описать физические соотношения для случая $i \neq j$:

$$\sigma_{ij} = 2\mu * \varepsilon_{ij} = 2 \int_0^t G(t-\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau),$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = -R(t), \quad R(t) \equiv K(t) - \int_0^t K(t-\tau)K(\tau) d\tau + \dots, \quad \frac{dJ(t)}{dt} = K(t),$$

где $G(t)$ – функция памяти материала, $R(t)$, $K(t)$ – ядра релаксации и ползучести материала. Функции памяти классических и модифицированных вязкоупругих моделей можно найти в [1].

Отметим, что модифицированная теория вязкоупругости предполагает использование ядер следующего типа:

$$K(t) = \varphi(t) + \frac{1}{4} \varphi(t) * \varphi(t).$$

В качестве слабосингулярной модели выбрана следующая модель (степенная):

$$\varphi(t) = k \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad k = \text{const}.$$

Введем вектор напряжений $t_n(x, t)$ в точке x на элементарной площадке с единичной нормалью $n(x)$:

$$t_n(x, t) \equiv T_{n(x)} u(x, t) = n(x) \lambda(t) * \text{div} u(x, t) + 2\mu(t) * \frac{\partial u(x, t)}{\partial n(x)} + \mu(t) * [n(x) \times \text{rot} u(x, t)]. \quad (2)$$

Если $x \in \Gamma$, то под $n(x)$ будем понимать единичный вектор внешней (по отношению к Ω) нормали к границе Γ .

Будем рассматривать следующие типы граничных условий для Ω :

$$u_l(x, t) = f_l(x, t), \quad x \in \Gamma^u, \quad t_l(x, t) = g_l(x, t), \quad x \in \Gamma^\sigma, \quad l = \overline{1, 3}. \quad (3)$$

Здесь Γ^u и Γ^σ – части границы Γ тела Ω , по которым заданы соответственно перемещения и поверхностные силы.

2. Интегральная формулировка

Применим к исходным уравнениям интегральное преобразование Лапласа:

$$f(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-ipt} dt,$$

где p – параметр преобразования Лапласа.

Вектор перемещений во внутренних точках области связан с граничными значениями перемещений и усилий следующим образом:

$$u_l(x, p) = \int_{\Gamma_k} U_{lj}(x, y, p) t_j(y, p) d_y S - \int_{\Gamma_k} T_{lj}(x, y, p) u_j(y, p) d_y S,$$

$$l=1,2,3, \quad x \in \Omega_k. \quad (4)$$

Здесь U_{ij} и T_{ij} – соответственно компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений уравнения (1). Тензор T выражается из (2) через тензор U с помощью оператора напряжений T_n :

$$T(x, y, p) = [T_{n(x)}U(x, y, p)]^T,$$

где верхний значок T означает транспонирование. Компоненты тензоров U и T имеют вид:

$$U_{ij}(x-y, p) = \sum_{m=1}^2 \left[U_{ij}^m(x-y) - \frac{1}{ipr^2} U_{ij}^3(x-y) \left(-\frac{1}{ip} + \frac{ir}{c_m} \right) (-1)^{m+1} \right] e^{-pr/c_m},$$

$$T_{ij}(x, y, p) = \sum_{m=1}^2 \left[pT_{ij}^{1,m}(x, y) + T_{ij}^m(x, y) + \frac{1}{(ipr)^2} T_{ij}^3(-1)^m \left(\frac{pr}{c_m} + 1 \right) \right] e^{-pr/c_m},$$

где $U_{ij}^m, U_{ij}^3, T_{ij}^{1,m}, T_{ij}^m, T_{ij}^3$ – соответствующие функции координат [1]. Для задач вязкоупругости величины $c_1 = c_1(p)$ и $c_2 = c_2(p)$ являются операторами скоростей продольных и поперечных волн соответственно.

Формула (4) дает следующее ГИУ:

$$k_{ij}(x)u_j(x, p) + \int_{\Gamma_k} T_{ij}(x, y, p)u_j(y, p)d_y S = \int_{\Gamma_k} U_{ij}(x-y, p)t_j(y, p)d_y S, \quad (5)$$

$$l=1,2,3, \quad x \in \Gamma.$$

Интеграл в левой части (5) является сингулярным, то есть понимается в смысле главного значения по Коши, а коэффициент при внеинтегральном члене определяется формулой

$$k_{ij}(x) = \frac{1-\alpha_\Omega}{2} \delta_{ij} - \int_{\Gamma} T_{ij}^0(x, y)d_y S,$$

где

$$T_{ij}^0(x, y) = T_{ij}^1(x, y) + T_{ij}^2(x, y) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) * T_{ij}^3(x, y),$$

α_Ω равна 1, если область Ω конечна, и -1 для бесконечной области Ω . Если в точке x поверхность имеет единственную касательную плоскость, то $k_{ij}(x) = \delta_{ij}/2$. Граничные интегральные уравнения (ГИУ) (5) позволяют разработать эффективную численную методику для определения неизвестных амплитуд граничных перемещений и поверхностных сил. Решением исходной начально-краевой задачи будет вектор-функция $u(x, t)$, полученная путем применения к решению системы уравнений (4), (5) обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(p)e^{ipt} dp. \quad (6)$$

Для численного обращения (6) будем использовать алгоритм, предложенный Дурбином.

3. Численная методика

Граница тела Ω аппроксимируется совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов S_k ($k = 1, \dots, N$). Декартовы координаты произвольной точки $y = (y_1, y_2, y_3)$ элемента S_k выражаются через координаты узловых точек этого элемента с помощью функций формы N^l ($l = 1, \dots, 8$), которые зависят от локальных координат $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\chi(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где $\chi(k, l)$ – глобальный номер узла, имеющего в k -м элементе локальный номер l . Соотношение (7) позволяет найти необходимые характеристики элемента (нормаль, площадь). Для аппроксимации граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоянные элементы. При этом для расчетного значения параметра p будем иметь следующие выражения граничных перемещений и поверхностных сил внутри элемента S_k :

$$u_i(y) = \sum_{l=1}^4 R^l(\xi) u_i^{\chi(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3; \quad y \in S_k,$$

$$t_i(y) = t_i^{\chi(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3; \quad y \in S_k.$$

Здесь $R^l(\xi)$ – функции формы для линейного четырехугольного элемента.

Для получения дискретного аналога ГИУ применим метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m будем выбирать узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируются системы линейных алгебраических уравнений для каждой подконструкции:

$$\frac{1 - \alpha_\Omega}{2} u_i^m + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} u_j^{\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^N B_{ij}^{m,k} t_j^k, \quad (8)$$

$$\frac{1 - \alpha_\Omega}{8} u_i^m + \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} u_j^{\chi(k,l)} = \sum_{k=1}^N B_{ij}^{m,k} t_j^k, \quad (9)$$

N – число элементов границы. Уравнения (8) записаны в узлах аппроксимации перемещений, уравнения (9) записаны в узлах аппроксимации усилий:

$$A_{ij}^{m,k,l} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R^l(\xi) T_{ij}(x^m, y^k(\xi), \partial) - \delta_{\chi(k,l),m} T_{ij}^0(x^m, y^k(\xi))] J^k(\xi) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$B_{ij}^{m,k} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}(x^m, y^k(\xi), \partial) J_k(\xi) d\xi_1 d\xi_2.$$

Разрешающая система линейных алгебраических уравнений решается методом Гаусса.

4. Численные эксперименты

Численные результаты приведены в безразмерных величинах:

$$\bar{u} = Eu/p_0 a, \quad \bar{p} = p/p_0, \quad \bar{\sigma} = \sigma/p_0, \quad \bar{t} = t/t_0,$$

где a – характерный геометрический размер, E – модуль Юнга, p_0 – характерное значение параметра нагрузки, t_0 – значение характерного времени поведения нагрузки.

Рассмотрим задачу о торцевом ударе силой $p = 1 \text{ Н/м}^2$ призматического тела с жестко закрепленным концом (рис. 1) и параметрами материала: плотность $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0$, модуль Юнга $E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ Па}$. Задача имеет аналитическое решение, и известно ее МГЭ-решение в сочетании с методом Либиха [3].

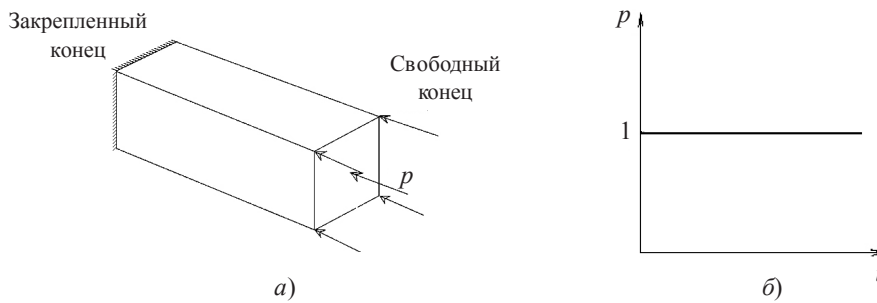


Рис.1

В [3] использовались три неравномерные гранично-элементные сетки из 42, 112 и 324 треугольных граничных элементов (на рис. 2 им соответствуют кривые 6, 5 и 4). Проведенные нами расчеты показали, что для достижения не меньшей точности, чем в [3], достаточно взять равномерную сетку с 224 граничными элементами (рис. 2, кривая 3). Кривая 2 на рис. 2 соответствует гранично-элементному решению, а кривая 1 – аналитическому решению.

Поведение перемещений для стойко вязкого тела продемонстрировано на рис. 3 ($\beta = 0,05$ для кривой 1; $\beta = 0,5$ для кривой 2; $\beta = 3$ для кривой 3; $\beta = 100$ для кривой 4; $\beta = 500$ для кривой 5). С уменьшением характерного времени ползучести τ_e или ростом $\beta = 1/\tau_e$ материал все более отчетливо начинает вести себя как упругий материал на длительных модулях, и колебательный процесс по перемещениям имеет лишь затухание по амплитудам и сглаженные углы. При $\beta \rightarrow \infty$ ($\tau_e \rightarrow 0$) получим чисто упругий случай.

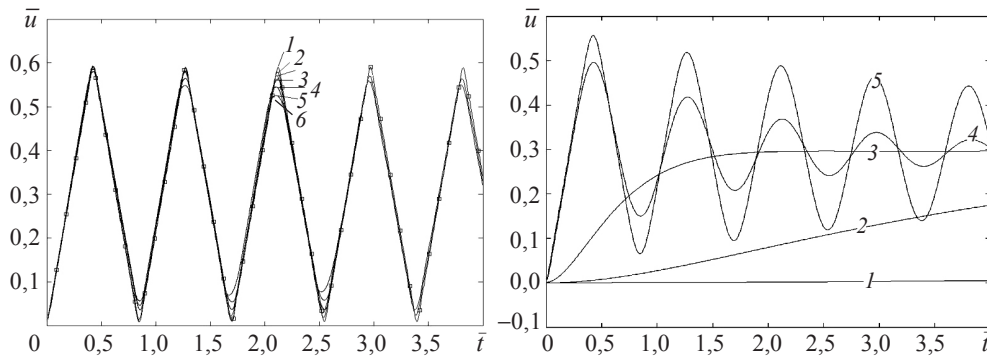


Рис. 2

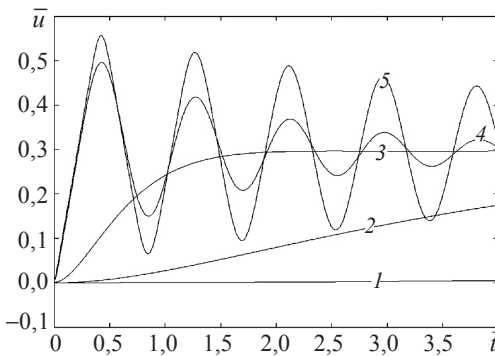


Рис. 3

Поведение перемещений для вязкоупругого тела с мгновенной упругостью продемонстрировано на рис. 4 ($\gamma = 0,01$ для кривой 1; $\gamma = 0,3$ для кривой 2; $\gamma = 0,3$ для кривой 3; $\gamma = 100$ для кривой 4). С уменьшением характерных времен релаксации τ_r или ростом $\gamma = 1/\tau_r$ материал все более отчетливо начинает вести себя как упругий материал на длительных модулях. На рис. 4 показано, как перестраивается картина отклика в перемещениях. Отклик перемещений на длительных модулях имеет и

большую амплитуду, и большой период колебаний.

Поведение перемещений для классических моделей Кельвина–Фойгта и стандартного вязкоупругого тела аналогичны. В [4] было показано, что отклики функций Грина для классических и модифицированных моделей могут полностью совпадать при соответствующем наборе параметров.

Перемещения для модифицированной степенной модели показаны на рис. 5 (при $k = 17$ $\alpha = 0,3$ для кривой 1; $\alpha = 0,7$ для кривой 2; $\alpha = 0,95$ для кривой 3). С приближением наследственного ядра к ядру Больцмана отклик и качественно, и количественно описывает упругий отклик с затуханием размаха колебаний и сглаживанием острых углов “пилы”.

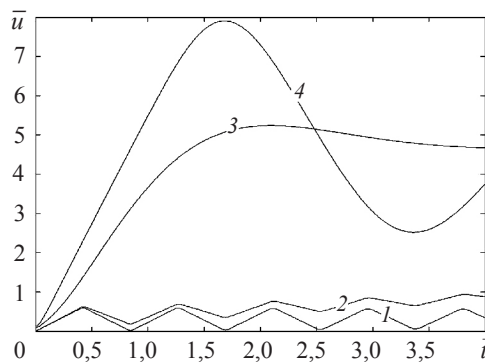


Рис. 4

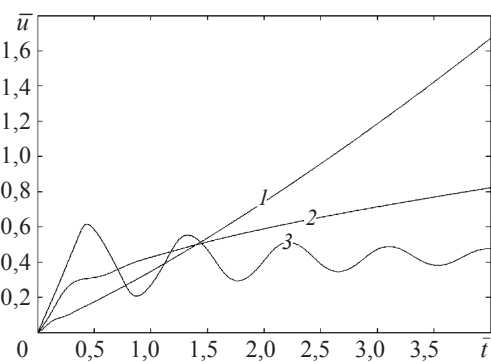


Рис. 5

Соответствующий отклик напряжений $\bar{p} \equiv \bar{\sigma}_{11}$ в упругом случае, полученный для равномерной гранично-элементной сетки с 224 элементами, представлен на рис. 6. На аналитическое решение (кривая 1) наложено решение из [4] (кривая 3), построенное на сетке из 324 треугольных граничных элементов, и полученное нами (кривая 2), построенное на равномерной сетке из 224 четырехугольных граничных элементов.

Влияние вязкости на отклик напряжений представлено на рис. 7–9 соответственно для моделей Кельвина–Фойгта ($\beta = 0,05$ для кривой 1; $\beta = 3$ для кривой 2; $\beta = 100$ для кривой 3; $\beta = 500$ для кривой 4), стандартного вязкоупругого тела ($\gamma = 0,01$ для кривой 1; $\gamma = 0,3$ для кривой 2; $\gamma = 10$ для кривой 3; $\gamma = 100$ для кривой 4) и степенной модели (при $k = 17$ $\alpha = 0,3$ для кривой 1; $\alpha = 0,7$ для кривой 2; $\alpha = 0,95$ для кривой 3).

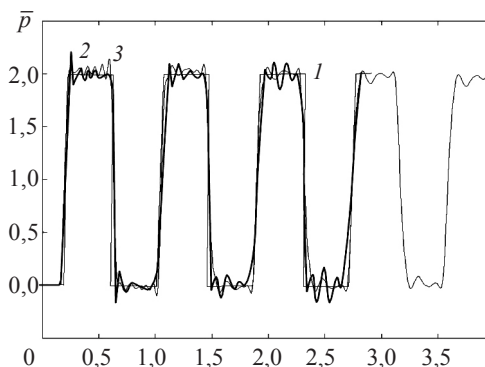


Рис. 6

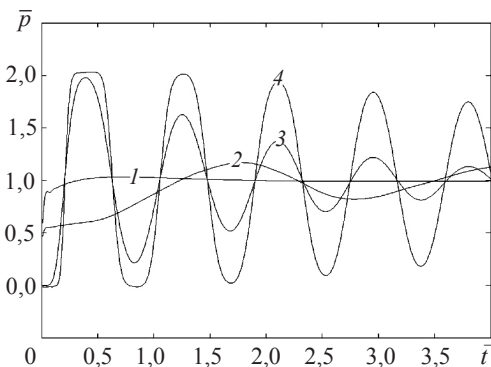


Рис. 7

Тенденция, выявленная на картинах полей перемещений, прослеживается и в картинах полей напряжений.

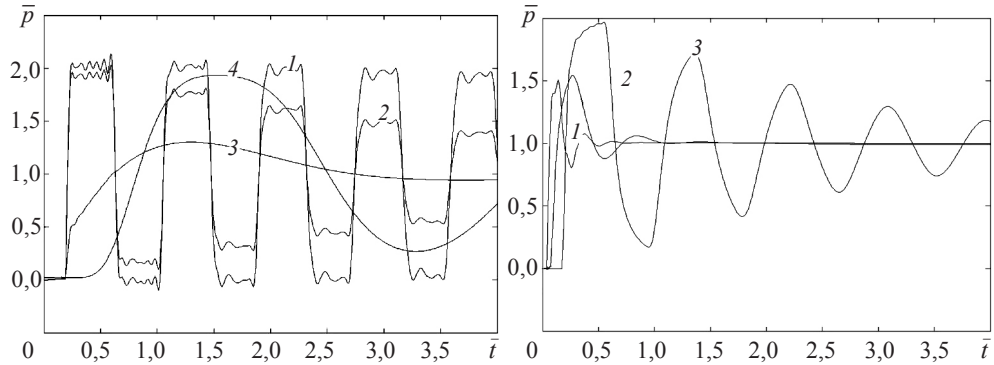


Рис. 8

Рис. 9

Рассмотрим задачу о растяжении квадратной плиты с цилиндроконическим отверстием нестационарной нагрузкой, равномерно распределенной по двум противоположным торцам плиты. Размеры конструкции выражены через радиус $r = 0,01$ м цилиндрической части отверстия (рис. 10). Закон изменения во времени интенсивности нагрузки имеет вид:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{p^*}{t^*} t, & 0 \leq t \leq t^*, \\ p^*, & t \geq t^*, \end{cases}$$

где $t^* = 189$ мкс есть время линейного нарастания нагрузки от нуля до максимального значения $p^* = 10^7$ Па. Расчеты производились для плиты со следующими характеристиками: плотность $\rho = 1,3 \cdot 10^3$ кг/м³; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; модуль Юнга $E = 3 \cdot 10^9$ Па.

Учет двух плоскостей симметрии ($x_1 = 0$ и $x_2 = 0$) позволил в качестве основного фрагмента границы тела взять 1/4 часть поверхности конструкции. Развертка использованной гранично-элементной сетки изображена на рис. 11. Сетка содержит 106 элементов. При этом на всей поверхности тела порождается сетка, состоящая из 424 элементов.

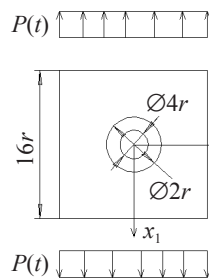


Рис. 10

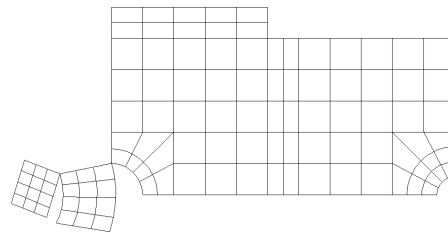


Рис. 11

Вязкоупругие свойства материала выбирались в рамках регулярных классических моделей (модель Максвелла, Кельвина–Фойгта, стандартного вязкоупругого тела) и модифицированной степенной модели.

Для случая упругого поведения материала задача рассмотрена в [4]. В вязкоупругом случае анализировались перемещения и напряжения в точках, обозначенных на рис. 10 цифрами 1, 2, 3. Эффект перестройки волновых картин перемещений и напряжений продемонстрирован на рис. 12–16. На рис. 12, 13 представлены соответственно результаты расчетов σ_{11} и σ_{22} в точке 2 для случая, когда свойства материала описываются моделью стандартного вязкоупругого тела, причем кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – случаю $\gamma=0,01$, кривая 3 – $\gamma=0,3$, кривая 4 – $\gamma=10$ и кривая 5 – $\gamma=100$.

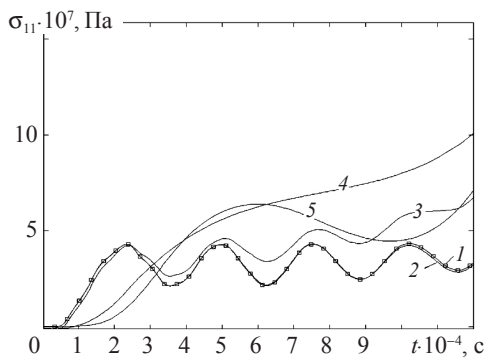


Рис. 12

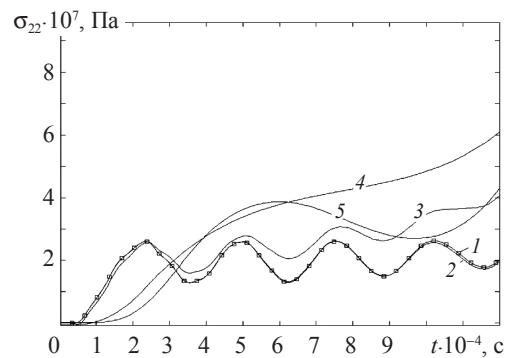


Рис. 13

На рис. 14 представлены результаты расчетов σ_{11} в точке 3, когда свойства материала описываются моделью стандартного вязкоупругого тела, причем кривая 1 соответствует упругому случаю. На рис. 15 представлены результаты расчетов u_1 в точке 3 для случая, когда свойства материала описываются моделью Кельвина–Фойгта, причем кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – случаю $\beta=0,05$, кривая 3 – $\beta=0,5$, кривая 4 – $\beta=3$ и кривая 5 – $\beta=100$.

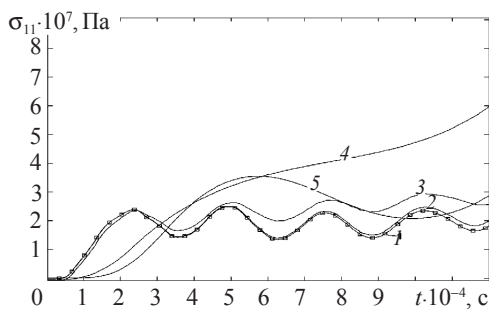


Рис. 14

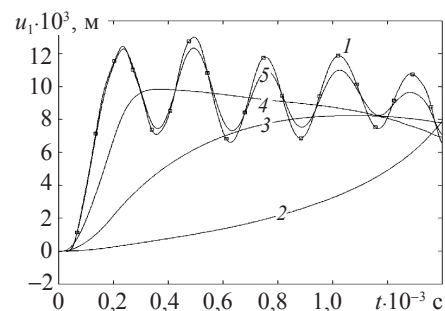


Рис. 15

На рис. 16 представлены результаты расчетов u_2 в точке 3, причем кривая 1 соответствует упругой модели, кривая 2 – модели Максвелла ($\gamma=0,08$), кривая 3 – модели Кельвина–Фойгта ($\beta=100$), кривая 4 – модели стандартного вязкоупругого тела ($\gamma=0,01$), кривая 5 – модифицированной степенной модели ($k=17, \alpha=0,95$).

Тенденции, описанные на задаче о консоли, выявляются и в задаче о плите. Построенная МГЭ-схема с применением преобразования Лапласа позволяет решать задачи об ударе и обладает высокой вычислительной точностью. Описан эффект перестройки волновых картин перемещений и напряжений при переходе с мгновенных модулей на длительные.

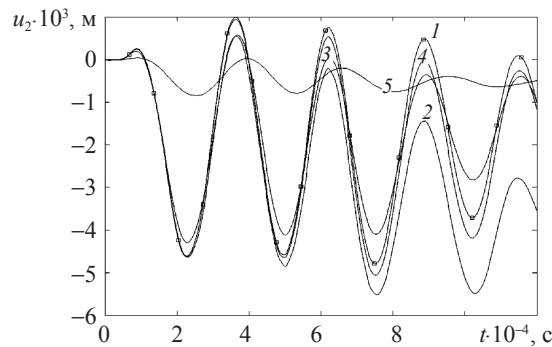


Рис. 16

Работа выполнена при частичном финансировании Министерством образования и науки РФ (грант Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-6391.2006.8).

Литература

1. Угодчиков, А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. – Казань: Изд-во КГУ, 1986. – 296 с.
2. Локшин, А.А. Математическая теория распространения волн в средах с памятью / А.А. Локшин, Ю.В. Суворова. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 152 с.
3. Schanz, M. Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua / M. Schanz. – Berlin: Springer, 2001. – 170 p.
4. Гранично-элементное моделирование нестационарного динамического деформирования трехмерных элементов конструкций / Л.А. Игумнов [и др.]. – Вестник ННГУ. Серия Механика. – 2006 – Вып. 1(7). – С. 76-89.

[13.09.2006]

INVESTIGATION OF MATERIAL VISCOSITY EFFECT ON THE WAVE FIELDS OF DISPLACEMENTS AND STRESSES USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

L.A. Igumnov, A.A. Belov, S.Yu. Litvinchuk

An initial boundary-value problem of three-dimensional theories of elasticity and visco-plasticity is solved by a boundary element method.

A boundary-element procedure is used in combination with an integral Laplace transformation in time. A problem of impacting a prismatic console is considered. The visco-elastic material properties are described by the relations of classic and modified regular models (Maxwell, Voigt, a standard visco-elastic body) or using classic or modified weakly singular models. The numerical results for an elastic case are compared with the corresponding results, obtained by the method of boundary-time elements.