

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-2-227-234

**АСИМПТОТИКА КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК
СЖАТОЙ УЗКОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ
С ВНУТРЕННИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ***

© 2021 г.

Пешхоев И.М.

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

peshkhoev@rambler.ru

Поступила в редакцию 08.04.2021

Рассматривается задача об асимптотическом интегрировании модифицированной системы нелинейных уравнений Кармана, описывающей равновесие продольно сжатой удлиненной упругой прямоугольной пластины с внутренними напряжениями, лежащей на упругом основании. Внутренние напряжения могут быть вызваны непрерывно распределенными краевыми дислокациями и клиновыми дисклинациями или другими источниками. Сжимающее давление приложено к двум коротким краям параллельно длинным краям пластины. Рассматриваются краевые условия: длинные края пластины свободны от нагрузок, а короткие края свободно защемлены или подвижно шарнирно оперты. Вводится малый параметр, равный отношению ширины пластины к ее длине. Решение системы – сжимающая нагрузка, функция прогиба и функция напряжений – ищется в виде разложений в ряд по малому параметру. Система уравнений Кармана в безразмерных переменных приводится к бесконечной системе краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов асимптотических разложений для критической нагрузки, прогиба и функции напряжений. При этом для удовлетворения краевым условиям дополнительно вводятся функции пограничного слоя, сосредоточенные около закрепленных краев и исчезающие при удалении от них. Построены краевые задачи для определения функций пограничного слоя. Показано, что главные члены разложений по малому параметру для критической нагрузки и прогиба определяются из уравнения равновесия сжатой балки на упругом основании с краевыми условиями свободного защемления или подвижного шарнирного опирания концов. При этом главный член разложения в ряд функции напряжений имеет четвертый порядок малости по параметру относительной ширины пластины.

Ключевые слова: упругая пластина, критическая нагрузка, внутренние напряжения, малый параметр, функция пограничного слоя, асимптотическое решение.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-08-00074).

Введение

В линейной теории упругости первые важные результаты в решении задач предельного перехода от трехмерных уравнений к двумерным в случае тонких областей были получены в [1–11]. В публикациях [12, 13] при помощи метода асимптотического интегрирования в сочетании с методом пограничного слоя исследуется ряд задач статики и динамики узких упругих изотропных и ортотропных пластин и цилиндрических панелей в линейной и нелинейной постановках. В [14] представлен асимптотический вывод двумерных уравнений равновесия тонкой упругой неоднородной пластины, изготовленной из анизотропного материала общего вида. Устойчивость и послекритическое поведение сжатых упругих прямоугольных пластин с внутренними источниками напряжений исследуются в [15, 16]. В статье [17] в рамках прямого подхода к теории пластин рассматриваются бесконечно малые деформации пластины из гиперупругих материалов с учетом неоднородно распределенных начальных напряжений. В статье [18] исследована задача об устойчивости двухслойной круговой пластины с предварительно напряженным слоем. Исследование изгибных деформаций трехслойной пластины с учетом поверхностных и межфазных напряжений представлено в [19].

В настоящей статье рассмотрена задача об асимптотическом интегрировании модифицированной системы нелинейных уравнений Кармана, описывающей равновесие продольно сжатой удлиненной упругой прямоугольной пластины с внутренними напряжениями, лежащей на упругом основании.

1. Постановка задачи

Пусть тонкая упругая прямоугольная пластина, содержащая в плоском состоянии поля непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций, находится под действием сжимающего давления P , направленного вдоль оси X . Тогда система уравнений равновесия может быть записана в виде [20]:

$$D\Delta^2 W + K_1 W = [\Psi, W], \quad \Delta^2 \Psi + \frac{Eh[W, W]}{2} = Eh\mu, \quad (1)$$

где $D = Eh^3/\gamma^2$, $\gamma^2 = 12(1 - \nu^2)$; $[\Psi, W] = \partial_X^2 W \partial_Y^2 \Psi - 2\partial_X \partial_Y W \partial_X \partial_Y \Psi + \partial_Y^2 W \partial_X^2 \Psi$; $\mu(X)$ – непрерывная скалярная мера несовместности, которая выражается через плотности дислокаций и дисклинаций [20]; W – прогиб пластины; $\Psi(X, Y)$ – функция напряжений Эри; h – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга; X, Y – прямоугольные координаты с началом в центре пластины и осями, параллельными ее краям; $\partial_X^n, \partial_Y^n$ – частные производные n -го порядка по переменным X и Y . Систему (1) будем исследовать с краевыми условиями

$$\begin{cases} 1) W = \partial_X W = 0, & 2) W = \partial_X^2 W = 0, \quad \partial_Y \partial_X \Psi = 0, \quad \partial_Y^2 \Psi = -P \quad \text{при } |X| = a, \\ \partial_Y^2 W + \nu \partial_X^2 W = \partial_Y^3 W + (2 - \nu) \partial_X^2 \partial_Y W = \partial_Y \partial_X \Psi = \partial_X^2 \Psi = 0 \quad \text{при } |Y| = b, \end{cases} \quad (2)$$

где $2a$ – длина пластины, $2b$ – ширина.

Функция прогиба W при $|X| = a$ удовлетворяет одному из условий 1) или 2) в краевых условиях (2), которые вместе с условиями для функции напряжений Ψ отвечают соответственно свободному защемлению или подвижной шарнирной опоре краев. Условия при $|Y| = b$ соответствуют свободным краям. Переходя к безразмерным переменным по формулам $X = ax$, $Y = by$, $W(X, Y) = w(x, y)h/\gamma$, $\delta = b/a$, $K_1 =$

$= Dk_1/a^4$, $\Psi(X, Y) = DF(x, y) - Py^2b^2/2$, $P = Dp/a^2$, $\mu(X) = \bar{\mu}(x)h^2/(\gamma^2a^4)$, k_1 – безразмерный параметр реакции основания на прогиб пластины (коэффициент постели), получим из (1), (2) систему уравнений и краевые условия в области $\Omega = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$:

$$\begin{cases} \partial_y^4 w + 2\delta^2 \partial_x^2 \partial_y^2 w + \delta^4 \partial_x^4 w + \delta^4 k_1 w - \delta^2 [w, F] + \delta^4 p \partial_x^2 w = 0, \\ \partial_y^4 F + 2\delta^2 \partial_x^2 \partial_y^2 F + \delta^4 \partial_x^4 F + \delta^2 [w, w]/2 = \delta^4 \bar{\mu}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} 1) w = \partial_x w = 0, \quad 2) w = \partial_x^2 w = 0, \quad F = \partial_x F = 0 & \text{при } |x| = 1, \\ \partial_y^2 w + \nu \delta^2 \partial_x^2 w = \partial_y^3 w + (2 - \nu) \delta^2 \partial_x^2 \partial_y w = F = \partial_y F = 0 & \text{при } |y| = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Из результатов, полученных в [15, 16], следует, что критическая нагрузка p определяется из задач

$$\partial_y^4 F_\mu + 2\delta^2 \partial_x^2 \partial_y^2 F_\mu + \delta^4 \partial_x^4 F_\mu = \delta^4 \bar{\mu},$$

$$(x, y) \in \Omega \text{ и } F_\mu = (F_\mu)_n = 0 \text{ на границе } \Omega, \quad (5)$$

$$\partial_y^4 w + 2\delta^2 \partial_x^2 \partial_y^2 w + \delta^4 \partial_x^4 w + \delta^4 k_1 w - r \delta^2 [w, F_\mu] = -p \delta^4 \partial_x^2 w, \quad (6)$$

$$\begin{cases} 1) w = \partial_x w = 0, \quad 2) w = \partial_x^2 w = 0 & \text{при } |x| = 1, \\ \partial_y^2 w + \nu \delta^2 \partial_x^2 w = \partial_y^3 w + (2 - \nu) \delta^2 \partial_x^2 \partial_y w = 0 & \text{при } |y| = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Задача (5) определяет функцию напряжений F_μ , вызванных наличием внутренних источников ($\bar{\mu}(x) \neq 0$). Числовой параметр r в (6) обозначает интенсивность внутренних напряжений, соответствующих данной форме функции несовместности $\bar{\mu}(x)$.

2. Первый итерационный процесс

Предположим, что параметры a и b пластины удовлетворяют условию $b \ll a$, что равносильно условию $\delta \ll 1$. Будем искать решение задачи (3), (4) в виде рядов по степеням малого параметра δ [12]:

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \delta^k, \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k \delta^k, \quad F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k \delta^k. \quad (8)$$

Подставляя (8) в уравнения (3), (4) и приравнивая нулю выражения при одинаковых степенях параметра δ , выводим последовательность краевых задач для определения коэффициентов разложений. При этом можно получить, что функции w_k, F_k с нечетными k обращаются в нуль, поэтому ищем разложения (8) по четным степеням δ . В силу симметрии задачи относительно оси абсцисс, решение ищем в виде четных по переменной y функций w и F . Рассматривая краевые задачи для степеней δ^0, δ^2 и δ^4 , получим, что $w_0(x, y) = w_{0,0}(x)$, $w_2(x, y) = w_{2,0} + w_{2,2}y^2$, $w_4(x, y) = w_{4,0} + w_{4,2}y^2 + w_{4,4}y^4$ и $F_0(x, y) = 0, F_2(x, y) = 0, F_4(x, y) = (\nu(w_{0,0}'')^2 + \bar{\mu})(1 - y^2)^2/24$, а $w_{0,0}(x)$ определяется из задачи в безразмерных переменных о критических нагрузках сжатой упругой балки со свободно защемленными или подвижно шарнирно опертыми краями на упругом основании:

$$(1 - \nu^2)w_{0,0}'''' + k_1 w_{0,0} + p_0 w_{0,0}'' = 0, \quad (9)$$

$$1) w_{0,0} = w_{0,0}' = 0, \quad 2) w_{0,0} = w_{0,0}'' = 0. \quad (10)$$

Здесь и далее штрихами обозначены обыкновенные производные функции, зависящие от переменной x . Нижние индексы означают степени параметра δ и переменной y в разложениях (8).

Приравнявая нулю выражения при степени δ^{2m+4} при $m = 1, 2, \dots$, из системы уравнений (3) с крайвыми условиями (4) можно вывести последовательность крайвых задач, из которых, пользуясь методом математической индукции, можно показать, что функции w_{2m+4} и F_{2m+4} имеют вид

$$w_{2m+4} = \sum_{i=0}^{m+2} w_{2m+4,2i} y^{2i}, \quad F_{2m+4} = \sum_{i=0}^{m+2} F_{2m+4,2i} y^{2i}. \quad (11)$$

Следуя [13], можно построить алгоритм для определения коэффициентов функций (11).

3. Второй итерационный процесс

При $|x| = 1$ крайвые условия 1) или 2) в (4) для функций $w_{2m}(x, y)$ при $m \geq 1$, а также условия (4) для $F_{2m+4}(x, y)$ при $m \geq 0$ не выполняются. Для компенсации невязок, возникающих при удовлетворении крайвых условий (4), введем функции пограничных слоев u_k, φ_k и v_k, f_k , сосредоточенные соответственно около границы $x = -1$ и $x = 1$ и стремящиеся к нулю при удалении от них. Будем искать решение системы (3) с крайвыми условиями (4) в виде рядов:

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \delta^k, \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} \left[w_k(x, y) + u_k \left(\frac{x+1}{\delta}, y \right) + v_k \left(\frac{x-1}{\delta}, y \right) \right] \delta^k, \quad (12)$$

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \left[F_k(x, y) + \varphi_k \left(\frac{x+1}{\delta}, y \right) + f_k \left(\frac{x-1}{\delta}, y \right) \right] \delta^k.$$

Подставим (12) в (3), (4) и, учитывая результаты первого итерационного процесса, сделаем в функциях u_k, φ_k и v_k, f_k замены переменных $x = -1 + \delta\xi$ и $x = 1 + \delta\eta$. Считая, что u_k, φ_k и v_k, f_k быстро убывают при удалении от границ $x = -1$ и $x = 1$, пренебрежем в уравнениях произведениями функций $u_k v_k$ и $\varphi_k f_k$ или их производных. В получившейся системе уравнений функции w_k, F_k из первого итерационного процесса разложим в ряд Тейлора около соответствующей границы. Собирая коэффициенты при одинаковых степенях δ , получим уравнения и крайвые условия для определения функций w_k, φ_k, v_k, f_k . Находим, что $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 0$, а функция $u_2(\xi, y)$ определяется из задачи

$$\Delta_{\xi}^2 u_2 = 0, \quad (13)$$

$$1) u_2|_{\xi=0} = 0, \quad \partial_{\xi} u_2|_{\xi=0} = -(w'_{2,0} + w'_{2,2} y^2)|_{x=-1}, \quad u_2|_{\xi=\infty} = \partial_{\xi} u_2|_{\xi=\infty} = 0, \quad (14)$$

$$2) u_2|_{\xi=0} = 0, \quad \partial_{\xi}^2 u_2(\xi, y)|_{\xi=0} = -(w''_{2,0} + w''_{2,2} y^2)|_{x=-1}, \quad u_2|_{\xi=\infty} = \partial_{\xi}^2 u_2(\xi, y)|_{\xi=\infty} = 0,$$

$$\partial_y^2 u_2 + v \partial_{\xi}^2 u_2|_{|y|=1} = -2w_{2,2}(-1) - v w''_{0,0}, \quad \partial_y^3 u_2 + (2-v) \partial_{\xi}^2 \partial_y u_2|_{|y|=1} = 0. \quad (15)$$

Функция $u_2(\xi, y)$ должна удовлетворять одному из условий 1) или 2) в (14). Функция $v_2(\eta, y)$ определяется из аналогичной задачи. Далее находим, что $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$, а функция φ_4 определяется из задачи

$$\Delta_{\xi}^2 \varphi_4(\xi, y) = -\partial_y^2 u_2(\xi, y), \quad (16)$$

$$\varphi_4|_{\xi=0} + F_4|_{x=-1} = 0, \quad \partial_\xi \varphi_4|_{\xi=0} + \partial_x F_4|_{x=-1} = 0, \quad \varphi_4|_{\xi=\infty} = \partial_\xi \varphi_4|_{\xi=\infty} = 0, \quad (17)$$

$$\varphi_4 = \partial_y \varphi_4 = 0 \text{ при } |y| = 1. \quad (18)$$

Функция f_4 определяется аналогично. Задачи (13)–(18) исследованы в [13].

4. Результаты численных расчетов

Задачи (5), (6) и 1) из (7) и задача (9) и 1) из (10) были решены разностным методом для $a = 1$, $\delta = a/b = 1; 0,5; 0,2, 0,1$ и $\bar{\mu} = 0; 200$, $k_1 = 0; 100$. Результаты численных расчетов представлены в таблице 1 и на рис. 1. По мере уменьшения параметра относительной ширины δ критическая нагрузка потери устойчивости p сжатой пластины на упругом основании стремится к критической нагрузке сжатой балки p^* на упругом основании. При этом большее значение критических нагрузок и пластины, и балки соответствует большему значению коэффициента постели k_1 .

Таблица 1

Критические нагрузки p пластины и p^* балки с защемленными краями

	p					p^*
	δ	1	0,5	0,2	0,1	
$\bar{\mu} = 0$	$k_1 = 0$	38,62	38,08	37,12	36,54	35,9
	$k_1 = 100$	46,14	45,58	44,59	44,00	43,4
$\bar{\mu} = 200$	$k_1 = 0$	38,87	38,17	37,12	36,54	35,9
	$k_1 = 100$	46,39	45,68	44,59	44,00	43,4

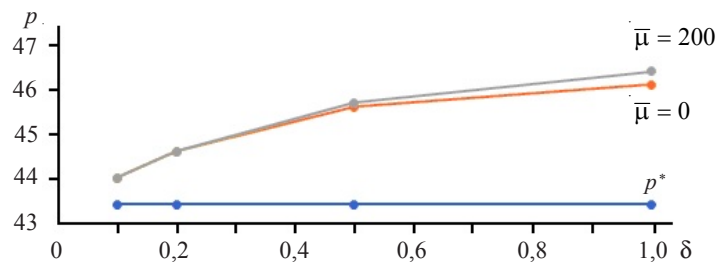


Рис. 1. Асимптотическое поведение критических нагрузок пластины при $k_1 = 100$

Отметим, что изменения параметра интенсивности внутренних напряжений $\bar{\mu}$ не влияют на асимптотическое поведение критических нагрузок пластины при $\delta \rightarrow 0$ (см. рис. 1).

Заключение

Главные члены разложений по малому параметру относительной ширины для критического значения нагрузки и прогиба сжатой узкой пластины на упругом основании определяются из уравнения равновесия сжатой балки на упругом основании. Главный член разложения в ряд функции напряжений имеет четвертый порядок по малому параметру. При этом погранслойные поправки для прогиба имеют второй порядок, а для функции напряжений – четвертый порядок малости.

Автор выражает благодарность доценту А.М. Столяру за помощь в постановке задачи.

Список литературы

1. Панов Д.Ю. Об одном методе решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. *ДАН СССР. Новая серия*. 1935. Т. 3(8). №2(62). С. 63–66.
2. Новожилов В.В., Финкельштейн Р.М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек. *ПММ*. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 331–340.
3. Муштари Х.М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа – Лява. *ПММ*. 1947. Т. 11. Вып. 5. С. 517–520.
4. Friedrichs K.O., Dressler R.F. A boundary-layer theory for elastic plates. *Communication on Pure and Applied Mathematics*. 1961. Vol. 14. P. 1–33. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160140102>.
5. Reiss E.L. Symmetric bending of thick circular plates. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1962. Vol. 10. No 4. P. 596–609. <https://www.jstor.org/stable/2098907>.
6. Reiss E.L. On the theory of cylindrical shell. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1962. Vol. 15. Iss. 3. P. 325–338. DOI: 10.1093/qjmath/15.3.325.
7. Ворovich И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек. *Матер. I Всесоюз. школы по теории и числ. методам расчета оболочек и пластин*. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975. С. 51–149.
8. Гольденвейзер Л.А. Методы обоснования и уточнения теории оболочек. *ПММ*. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 684–695.
9. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. *Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек*. М.: Наука, 1973. 273 с.
10. Устинов Ю. А., Шленев М.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода в теории плит и оболочек. *Расчет оболочек и пластин: Сб. статей*. Ростов-на-Дону: РИСИ, 1976. С. 3–27.
11. Срубщик Л.С., Столяр А.М., Цибулин В.Г. Асимптотическое интегрирование нелинейных уравнений колебаний цилиндрической панели. *ПММ*. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 657–665.
12. Столяр А.М. *Поведение узких панелей и сферических оболочек в условиях статического и динамического нагружения. Асимптотический и численный анализ*. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2014. 146 с.
13. Finiukova V.O., Stolyar A.M. Asymptotic integration of one narrow plate problem. In: *Advanced Structured Materials*. Eds. H. Altenbach, V. Eremeyev. Vol. 15. Berlin–Heidelberg: Springer, 2011. P. 53–62. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21855-2_4.
14. Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E. et al. Two-dimensional linear models of multilayered anisotropic plates. *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230. Iss. 8. P. 2891–2904. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02405-y>.
15. Пешхоев И.М., Соболев Б.В. Выпучивание сжатой упругой прямоугольной пластины со свободными краями. *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82. №2. С. 244–251. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-244-251.
16. Peshkhoev I.M., Stolyar A.M. Buckling of the nonuniformly compressed plate with dislocations and disclinations. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials*. Eds. H. Altenbach, N. Chinchaladze, R. Kienzler, W. Müller. Vol. 134. Cham: Springer, 2020. P. 345–372. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_18.
17. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.
18. Eremeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a two layered circular plate with a pre-stressed layer. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 22. Iss. 4. P. 773–781. <https://doi.org/10.1177/1081286515612527>.
19. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov. 2018. Vol. 81. Singapore: Springer, 2018. P. 1–10. DOI: 10.1007/978-981-10-6895-9_1.
20. Зубов Л.М. Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями. *Докл. РАН*. 2007. Т. 412. №3. С. 343–346.

References

1. Panov D.Yu. Ob odnom metode resheniya kraevykh zadach differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh [A method for solving boundary value problems of partial differential equations]. *Doklady SSSR. Novaya seriya. [Proceedings of the USSR Academy of Science. New Series]*. 1935. Vol. 3(8). No 2(62). P. 63–66 (In Russian).
2. Novozhilov V.V., Finkelshteyn P.M. O pogreshnosti gipotez Kirkhgofa v teorii obolochek [On the error of the Kirchhoff hypotheses in shell theory]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech.]*. 1943. Vol. 7. Iss. 5. P. 331–340 (In Russian).
3. Mushtari Kh.M. Ob oblasti primenimosti priblizhennoy teorii obolochek Kirkhgofa–Lyava [On the field of applicability of the approximate theory of Kirchhoff–Love shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech.]*. 1947. Vol. 11. Iss. 5. P. 517–520 (In Russian).
4. Friedrichs K.O., Dressler R.F. A boundary-layer theory for elastic plates. *Comm. Pure Appl. Math.* 1961. Vol. 14. P. 1–33. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160140102>.
5. Reiss E.L. Symmetric bending of thick circular plates. *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 1962. Vol. 10. No 4. P. 596–609. <https://www.jstor.org/stable/2098907>.
6. Reiss E.L. On the theory of cylindrical shell. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1962. Vol. 15. Iss. 3. P. 325–338. DOI: 10.1093/qjmam/15.3.325.
7. Vorovich I.I. Nekotorye rezultaty i problemy asimptoticheskoy teorii plastin i obolochek [Some results and problems of the asymptotic theory of plates and shells]. *Materialy IVsesoyuznoy shkoly po teorii i chislennym metodam rascheta obolochek i plastin [Papers of the I All-Union School on the Theory and Numerical Methods of Calculating Shells and Plates]*. Tbilisi. Tbilisi State University Publ. 1975. P. 51–149 (In Russian).
8. Goldenveyzer L.A. Metody obosnovaniya i utocneniya teorii obolochek [Methods for substantiating and refining the theory of shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech.]*. 1968. Vol. 32. Iss. 4. P. 684–695 (In Russian).
9. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. *Mekhanika tverdykh deformiruemyykh tel. T. 5. Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek [Mechanics of Solid Deformable Bodies. Vol. 5. Non-Classical Theories of Vibrations of Rods, Plates and Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1973. 273 c. (In Russian).
10. Ustinov Yu.A., Shlener M.A. O nekotorykh napravleniyakh razvitiya asimptoticheskogo metoda v teorii plit i obolochek [On some directions of development of the asymptotic method in the theory of plates and shells]. *Raschet obolochek i plastin. Sbornik statey [Calculation of Shells and Plates. Collection of Papers]*. Rostov-on-Don. RISI Publ. 1976. P. 3–27 (In Russian).
11. Srubshchik L.S., Stolyar A.M., Tsubulin V.G. Asimptoticheskoe integrirovaniye nelineynykh uravneniy kolebaniy tsilindricheskoy paneli [Asymptotic integration of nonlinear oscillation equations of a cylindrical panel]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech.]*. 1988. Vol. 52. Iss. 4. P. 657–665 (In Russian).
12. Stolyar A.M. *Povedenie uzkiykh paneley i sfericheskikh obolochek v usloviyakh staticheskogo i dinamicheskogo nagruzheniya. Asimptoticheskii i chislennyy analiz: monografiya [Behavior of Narrow Panels and Spherical Shells under Static and Dynamic Loading. Asymptotic and Numerical Analysis]*. Rostov-on-Don. Southern Federal University Publ. 2014. 146 p. (In Russian).
13. Finiukova V.O., Stolyar A.M. Asymptotic integration of one narrow plate problem. In: *Advanced Structured Materials*. Eds. H. Altenbach, V. Eremeyev. Vol. 15. Berlin. Heidelberg. Springer. 2011. P. 53–62. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21855-2_4.
14. Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E. et al. Two-dimensional linear models of multi-layered anisotropic plates. *Acta Mech.* 2019. Vol. 230. Iss. 8. P. 2891–2904. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02405-y>.
15. Peshkoev I.M., Sobol B.V. Vypuchivaniye szhatoy uprugoy pryamougolnoy plastiny so svobodnymi krayami [Buckling a compressed elastic rectangular plate with free edges]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2020. Vol. 82. No 2. P. 244–251 (In Russian).
16. Peshkoev I.M., Stolyar A.M. Buckling of the nonuniformly compressed plate with dislocations and disclinations. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials*. Eds. H. Altenbach, N. Chinchaladze, R. Kienzler, W. Müller. Vol. 134. Cham. Springer. 2020. P. 345–372. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_18.

17. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.

18. Eremeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a two layered circular plate with a pre-stressed layer. *Math. Mech. Solids*. 2017. Vol. 22. Iss. 4. P. 773–781. <https://doi.org/10.1177/1081286515612527>.

19. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov. 2018. Vol. 81. Singapore. Springer. 2018. P. 1–10. DOI: 10.1007/978-981-10-6895-9_1.

20. Zubov L.M. Uravneniya Karmana dlya uprugoy plastinki s dislokatsiyami i disklinatsiyami [Karman equations for an elastic plate with dislocations and disclinations]. *Doklady Rossiyskoy Akademii nauk [Proceedings of the Russian Academy of Sciences]*. 2007. Vol. 412. No 3. P. 343–346 (In Russian).

ASYMPTOTICS OF CRITICAL LOADS OF A COMPRESSED NARROW ELASTIC PLATE WITH INTERNAL STRESSES

Peshkhoev I.M.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

The problem of the asymptotic solution of a modified system of nonlinear Karman equilibrium equations for a longitudinally compressed elongated elastic rectangular plate with internal stresses lying on an elastic base is considered. Internal stresses can be caused by continuously distributed edge dislocations and wedge disclinations, or other sources. The compressive pressure is applied parallel to the long sides of the plate to the two short edges. The boundary conditions are considered: the long edges of the plate are free from loads, and the short edges are freely pinched or movably hinged. A small parameter is introduced, equal to the ratio of the short side of the plate to the long side. The solution of the system – the compressive load, the deflection function, and the stress function – is sought in the form of series expansions over a small parameter. The system of Karman equations with dimensionless variables is reduced to an infinite system of boundary value problems for ordinary differential equations with respect to the coefficients of asymptotic expansions for the critical load, deflection, and stress function. In this case, to meet the boundary conditions, the boundary layer functions are additionally introduced, which are concentrated near the fixed edges and disappear when moving away from them. Boundary value problems for determining the functions of the boundary layer are constructed. It is shown that the main terms of the small parameter expansions for the critical load and deflection are determined from the equilibrium equation of a compressed beam on an elastic base with the boundary conditions of free pinching or movable hinge support of the ends. In this case, the main term of the expansion into a series of the stress function has a fourth order of smallness in the parameter of the relative width of the plate.

Keywords: elastic plate, critical load, internal stresses, small parameter, boundary layer function, asymptotic solution.