

УДК 539.37

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-2-170-187

## ПОЛЗУЧЕСТЬ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ИЗ НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЙ

© 2021 г.

Кабанова Л.А.<sup>1</sup>, Хохлов А.В.<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

<sup>3</sup>АО «Композит», Королев, Московская обл., Российская Федерация

liubov.kabanova@math.msu.ru, andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 19.03.2021

Исследованы свойства построенного ранее точного решения задачи о ползучести полого цилиндра из однородного изотропного нелинейно-вязкоупругого материала, подчиняющегося определяющему соотношению Ю.Н. Работнова с двумя произвольными материальными функциями, под действием постоянных давлений на его боковых поверхностях и нулевых касательных напряжений на его основаниях. В предположениях о несжимаемости материала и плоской деформации поля напряжений и деформаций цилиндра выражены через интегральные операторы от материальных функций определяющего соотношения и от монотонно возрастающей функции времени, которая находится в результате решения полученного функционального уравнения, зависящего от материальных функций, отношения радиусов цилиндра и разности давлений. Аналитически изучены свойства этого функционального уравнения и свойства зависимостей напряжений и деформаций от времени и радиальной координаты.

Получены достаточные условия убывания, возрастания и немонотонности эпюр напряжений по радиальной координате. Доказан критерий постоянства напряжений во времени при нагружении цилиндра постоянными давлениями и показано, что он выполнен для степенных функций нелинейности, но не выполнен для бистепенных (сумм степенных) функций нелинейности. Показано, что для произвольной функции нелинейности графики модуля интенсивности деформаций и компонент перемещений и деформаций в фиксированной точке цилиндра в зависимости от времени (кривые ползучести) уже не обязаны быть выпуклыми вверх, как для линейно-вязкоупругого материала: установлена способность нелинейного определяющего соотношения Работнова моделировать кривые ползучести с точкой перегиба и участком выпуклости вниз (участком разупрочнения). Выполнены расчеты и построены графики, иллюстрирующие обнаруженные свойства.

*Ключевые слова:* нелинейная вязкоупругость, определяющее соотношение Работнова, толстостенная труба, кривые ползучести, функция нелинейности, несжимаемый материал, свойства поля напряжений.

## Введение

Статья посвящена исследованию качественных свойств решения задачи о ползучести полого цилиндра из нелинейно-вязкоупругого изотропного несжимаемого материала, подчиняющегося определяющему соотношению (ОС) Работнова, при мгновенном нагружении постоянными внутренним и внешним давлениями в предположении об отсутствии осевого перемещения торцов цилиндра. Решение этой задачи построено в статьях [1, 2]: в описанных предположениях компоненты тензора напряжений представляют собой интегральные операторы от материальных функций (МФ) ОС и монотонно возрастающей функции времени  $Y(t)$ , а компоненты тензора деформации прямо пропорциональны функции  $Y(t)$ . Функция  $Y(t)$  – решение функционального уравнения (кратко способ вывода уравнения изложен в разделе 3), вид которого зависит от МФ ОС.

В статье используется трехмерный вариант ОС, изначально предложенного Ю.Н. Работновым для одноосных нагружений [3–14]:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$L(t) = \mathbf{\Pi} \sigma, \quad L_0(t) = \mathbf{\Pi}_0 \sigma_0, \quad \mathbf{\Pi} y = \int_0^t \mathbf{\Pi}(t - \tau) dy(\tau), \quad \mathbf{\Pi}_0 y = \int_0^t \mathbf{\Pi}_0(t - \tau) dy(\tau).$$

ОС Работнова включает в себя МФ двух типов:  $\mathbf{\Pi}$  и  $\mathbf{\Pi}_0$  – функции сдвиговой и объемной ползучести;  $\Phi$ ,  $\Phi_0$ ,  $\varphi = \Phi^{-1}$  – функции нелинейности;  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – тензоры напряжений и деформаций;  $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$  – среднее напряжение,  $\mathbf{s} = \sigma - \sigma_0 \mathbf{I}$  – девиатор напряжений;  $\sigma = (1,5 s_{ij} s_{ij})^{0,5}$  – интенсивность напряжений. Все величины будем считать безразмерными.

Задача о нагружении полого цилиндра внутренним и внешним давлениями – одна из классических задач механики деформируемого твердого тела. Впервые поставленная для линейно-упругого изотропного цилиндра [15], она решалась аналитически (при некоторых упрощающих предположениях) и численно для разных классов материалов: в частности, исследовались решения для линейно-упругих [15] и упругопластических материалов [16–37]. Рассматривались обобщения задачи с точки зрения геометрии тела (например, задача Ламе – Гадолина [34, 35]), с точки зрения нагрузок (например, [33]). Разнообразие вариантов постановки обусловлено как большим спектром практических приложений (технологические задачи, расчет трубопроводов и шлангов, строительство туннелей, медицина и т.д.), так и возможностью построения аналитических либо достаточно проработанных аналитически численных решений в задачах этого типа.

Существенное значение в приложениях имеют реологические эффекты, ввиду чего становится необходимым исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) полого цилиндра, изготовленного из реономных материалов. Построены решения в рамках теории установившейся ползучести [5, 36, 38]; для линейно-вязкоупругих материалов с конкретными типами МФ с конечным набором параметров [5, 38, 39], для нелинейно-вязкоупругого композиционного материала с ядрами релаксации Прони [40].

Общая постановка задачи о квазистатическом нагружении цилиндра из нелинейно-вязкоупругого материала, моделируемого ОС Работнова, в статье [1] сведена к решению одного функционального уравнения. В случае ползучести под действи-

ем мгновенно приложенной разности давлений функциональное уравнение для  $Y(t)$  аналитически решено в [1] для упругопластического материала с произвольным упрочнением, линейно-вязкоупругого материала (полученные решения совпадают с классическими) и нелинейно-вязкоупругого материала со степенной функцией нелинейности (ФН)

$$\varphi(x) = Ax^n, \quad n > 0. \quad (2)$$

Также в статьях [1, 2] доказан ряд общих свойств НДС цилиндра в задаче о ползучести и подробно описаны свойства НДС модели со степенной ФН. Общее исследование этой задачи для нелинейно-вязкоупругих материалов требует детального описания эффектов, моделируемых разными классами функций нелинейности ОС Работнова, границ применимости ОС и конкретных ФН – этим аспектам для различных задач посвящен цикл работ [1, 2, 41–45].

Цель настоящей статьи – описать арсенал возможностей ОС Ю.Н. Работнова по моделированию характерных для различных материалов особенностей НДС полого цилиндра, мгновенно нагруженного постоянной разностью внутреннего и внешнего давлений; описать характер влияния МФ на свойства зависимости напряжений и деформаций от времени и радиальной координаты.

## 1. Материальные функции ОС Работнова

В одномерном случае ОС (1) предложено Ю.Н. Работновым [5] и представляет собой обобщение ОС линейно-вязкоупругого тела, содержащего две МФ:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau) = \mathbf{\Pi}\sigma, \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau) = \mathbf{R}\varepsilon, \quad t > 0, \quad (3)$$

путем введения новой МФ  $\varphi(u)$  – функции нелинейности;  $R(t)$  и  $\Pi(t)$  – функции релаксации и ползучести, ядра интегральных операторов

$$\mathbf{R}f(t) = \int_0^t R(t-\tau) \dot{f}(\tau) d\tau + R(t)f(0), \quad \mathbf{\Pi}f(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) \dot{f}(\tau) d\tau + \Pi(t)f(0), \quad (4)$$

связанных соотношением взаимности [46, 47]:

$$\mathbf{R}\mathbf{\Pi} = h(t) \text{ или } \mathbf{\Pi}\mathbf{R} = h(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

где  $h(t)$  – функция Хевисайда.

Общие ограничения на МФ ОС получены в статьях [42–45]. Согласно им,  $R(t)$  и  $\Pi(t)$  предполагаются положительными и дифференцируемыми на интервале  $(0; \infty)$ ; функция ползучести возрастает и выпукла вверх, а функция релаксации убывает и выпукла вниз на всем интервале  $(0; \infty)$ , но может иметь сингулярность или интегрируемую особенность в точке  $t = 0$ . Требования к функции нелинейности – непрерывная дифференцируемость и строгое возрастание функции  $\varphi(u)$  на промежутке  $(0; \omega)$ ,  $\omega > 0$ ; а также  $\varphi(0+) = 0$ .

Аналитические выражения для параметров НДС модели со степенной ФН (2) при мгновенном нагружении постоянным внутренним и внешним давлениями получены и детально исследованы в статье [1]. В настоящей статье изучаются особенности НДС моделей с бистепенной и экспоненциальной функциями нелинейности:

$$\varphi = A(\theta x^m + (1-\theta)x^n), \quad m > 1, n \in (0, 1), \theta \in (0, 1), A > 0, \quad (6)$$

$$\varphi(x) = A(1 - e^{-x/v}), \quad A > 0, v > 0. \quad (7)$$

В численных расчетах используется четырехпараметрическая функция ползучести (ФП):

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\mu t}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma \in (0, \beta], \mu > 0, \quad (8)$$

которая совпадает с ФП моделей Фойгта, Максвелла, Кельвина и стандартного линейно-упругого тела при соответствующих значениях параметров.

## 2. Постановка и решение задачи о ползучести полого цилиндра

Задача определения напряжений и деформаций в полом цилиндре из изотропного материала осесимметрична, поэтому используем цилиндрическую систему координат; в любой момент времени в любой точке цилиндра все компоненты перемещений, напряжений и деформаций не зависят от угла  $\theta$ , следовательно,  $\sigma_{r\theta} \equiv 0$ ,  $\sigma_{z\theta} \equiv 0$ ,  $u_\theta \equiv 0$ . Предположим, что на торцах цилиндра выполнены граничные условия  $u_z = 0$ ,  $\sigma_{z\theta} = 0$  и  $\sigma_{rz} = 0$ ; тогда НДС цилиндра можно считать плоской деформацией, и  $\sigma_{rz} \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{z\theta} \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{r\theta} \equiv 0$ ,  $\varepsilon_z \equiv 0$ ,  $u_z \equiv 0$ . Будем считать материал несжимаемым, то есть  $\Pi_0 = 0$ , тогда ОС нелинейной вязкоупругости (1) сводится к одномерному соотношению, связывающему интенсивности напряжений и деформаций:  $\varepsilon = \Phi(\Pi\sigma)$ ,  $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ ,  $\Phi(x) = \varphi^{-1}(x)$ . Внутренний и внешний радиусы цилиндра при  $t = 0$  обозначим  $r_1$  и  $r_2$  соответственно, при этом граничные условия примут вид:

$$\sigma_r|_{r_1} = -p_1(t), \quad \sigma_r|_{r_2} = -p_2(t), \quad \sigma_{r\theta}|_{r_1} = \sigma_{rz}|_{r_1} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{r_2} = \sigma_{rz}|_{r_2} = 0.$$

Обозначим  $q = r_1^2/r_2^2$ ,  $\bar{r} = r/r_1$ . Пусть  $F(s) = \int_0^s \varphi(x)x^{-1}dx$ ,  $s > 0$ , тогда нетривиальное уравнение равновесия сводится к функциональному уравнению [1]

$$F(Y(t)) - F(qY(t)) = \sqrt{3}\Pi |p_1(t) - p_2(t)|, \quad \sqrt{3}\Pi |p_1(t) - p_2(t)| = P(t). \quad (9)$$

По решению функционального уравнения  $Y(t)$  вычисляются все компоненты НДС цилиндра, выражения для деформаций и напряжений получены в [1]:

$$u_r(\bar{r}, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} z(t) Y(t) \frac{r_1}{\bar{r}}, \quad u_\theta \equiv 0, \quad u_z \equiv 0; \quad (10)$$

$$\varepsilon_\theta(\bar{r}, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} z(t) Y(t) \bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_r(\bar{r}, t) = -\varepsilon_\theta(\bar{r}, t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} z(t) Y(t) \bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_z \equiv 0; \quad (11)$$

$$\sigma_r(\bar{r}, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} \left[ F(Y(t)) - F\left(\frac{Y(t)}{\bar{r}^2}\right) \right], \quad (12)$$

$$\sigma_\theta(\bar{r}, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} \left[ F(Y(t)) - F\left(\frac{Y(t)}{\bar{r}^2}\right) + 2\varphi\left(\frac{Y(t)}{\bar{r}^2}\right) \right], \quad (13)$$

$$\sigma_z(\bar{r}, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} \left[ F(Y(t)) - F\left(\frac{Y(t)}{\bar{r}^2}\right) + \varphi\left(\frac{Y(t)}{\bar{r}^2}\right) \right]. \quad (14)$$

Здесь  $z(t) = \text{sgn}(p_1(t) - p_2(t))$ ;  $\mathbf{R}$ ,  $\Pi$  – интегральные операторы ползучести и релаксации (4).

### 3. Эквивалентная функциональному уравнению задача Коши и отыскание вспомогательной функции в случае мгновенного нагружения цилиндра разностью давлений

Применяя теорему о неявной функции к функциональному уравнению (9):

$$F(Y(t)) - F(qY(t)) - P(t) = G(Y(t)) = 0,$$

получим  $G'(Y) = (\varphi(Y) - \varphi(qY))/Y$ . Так как  $\varphi(x)$  строго возрастает,  $G'(Y) \neq 0$  и решение уравнения (9) существует для любого  $t > 0$ ;  $Y(t)$  – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \dot{P}(t)Y(t)(\varphi(Y) - \varphi(qY))^{-1} = f(t, Y(t)), \\ Y(0) &= c, \quad F(c) - F(qc) - P(0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Так как  $\varphi(x)$  – непрерывно дифференцируемая, возрастающая (строго) функция, на промежутках непрерывности  $P(t)$  функция

$$f(t, Y(t)) = \frac{\dot{P}Y}{\varphi(Y) - \varphi(qY)}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial Y}(t, Y(t)) = Y(\varphi(Y) - \varphi(qY))^2 (\varphi(Y) - \varphi(qY))^{-2} \quad (16)$$

– непрерывные функции; решение задачи Коши, состоящей из уравнения (15) с начальным условием  $Y(0) = c$ , существует и единственно;  $c$  определяется аналитически или численно из соотношения  $F(c) - F(qc) = P(0)$ . Рассматривается мгновенное нагружение цилиндра внешним и внутренним давлениями,  $p_1(t) = p_1 h(t)$ ,  $p_2(t) = p_2 h(t)$ ,  $z(t) = \text{const}$ ,  $t > 0$ . Тогда

$$P(t) = \sqrt{3} p z(t) \Pi(t), \quad p = p_1 - p_2. \quad (17)$$

Для материалов со степенной ФН (2) уравнение (9) с правой частью (17) имеет аналитическое решение, поля напряжений и деформаций найдены в [1]. Для семейств бистепенных (6) и экспоненциальных (7) функций далее приведены примеры, построенные по результатам численного решения уравнения (15) для разных МФ; начальные условия к уравнениям определялись по  $\varphi(x)$  методом наименьших модулей. В качестве проверки решения строились графики невязки  $\text{err}(t) = F(Y(t)) - F(qY(t)) - P(t)$ , то есть решение дифференциального уравнения (15) проверялось подстановкой в функциональное уравнение (9). При решении средствами пакета Mathematica невязка  $\text{err}(t)$  не превышает  $10^{-9}$ .

### 4. Свойства кривых ползучести при мгновенном нагружении

Деформации и перемещения в каждой точке цилиндра прямо пропорциональны  $Y(t)$ , поэтому исследование свойств кривых ползучести (КП) удобно провести в терминах  $Y(t)$ .

В [1] показано, что модуль перемещения (10) и модуль деформации (11) при нагружении цилиндра положительной разностью давлений монотонно возрастают по времени и монотонно убывают по  $\bar{r}$  при любых допустимых материальных функциях ОС. Так как КП не убывает, из дифференциального уравнения (15) следует, что КП имеет горизонтальную асимптоту, только если  $\dot{\Pi}(\infty) = 0$ .

Степенная ФН (2) моделирует только два типа выпуклости КП: если показатель

степени  $n > 1$ , КП выпукла вверх при любых значениях  $t > 0$ ; в противном случае КП выпукла вниз при любых значениях  $t > 0$ . Спектр реально наблюдаемых в экспериментах КП значительно шире, требуется моделировать КП, имеющие точки перегиба. Покажем, что модели с бистепенной (6) или экспоненциальной (7) ФН могут описать КП, имеющие точку перегиба: исследуем на знакопостоянство вторую производную  $Y$  (16) с учетом положительности знаменателя и  $Y$ .

Пусть

$$\kappa(Y(t)) = \ddot{P}(\varphi(Y) - \varphi(qY))^2 + \dot{P}^2[\varphi(Y) - \varphi(qY) - Y(\varphi'(Y) - q\varphi'(qY))]. \quad (18)$$

Для бистепенной ФН (6) покажем, что уравнение  $\kappa(Y(t)) = 0$  имеет корень с положительной действительной частью. Запишем (18) для (6):

$$\begin{aligned} \kappa(Y) = & \dot{P}^2[(1-m)(1-q^m)\theta Y^m + (1-q^n)(1-\theta)(1-n)Y^n] + \\ & + \ddot{P}[(1-q^m)^2\theta^2 Y^{2m} + 2(1-q^m)(1-q^n)\theta(1-\theta)Y^{m+n} + (1-q^n)^2(1-\theta)^2 Y^{2n}]. \end{aligned} \quad (19)$$

Не ограничивая общность, предположим, что  $m, n \in \mathbb{Z}$  (иначе представим  $m = s_1/v_1$ ,  $n = s_2/v_2$  и введем замену  $Y(t) = z^k(t)$ ,  $k = \text{НОК}(v_1, v_2)$ ), и поделим (19) на  $Y^n$ :

$$\begin{aligned} \ddot{P}[(1-q^m)^2\theta^2 Y^{2m-n} + 2(1-q^m)(1-q^n)\theta(1-\theta)Y^m + (1-q^n)^2(1-\theta)^2 Y^n] + \\ + \dot{P}^2[(1-m)(1-q^m)\theta Y^{m-n} + (1-q^n)(1-\theta)(1-n)] = 0. \end{aligned}$$

Если все корни этого полинома имеют отрицательную действительную часть, все его коэффициенты должны иметь один знак. Так как  $m \geq 1$ ,  $\dot{P}^2 > 0$ , а  $\ddot{P} \leq 0$  по свойствам ФП, коэффициенты при  $Y^{2m-n}$ ,  $Y^n$ ,  $Y^{m-n}$  отрицательны. Однако

$$\text{sgn}(2\ddot{P}(t)(1-q^m)(1-q^n)\theta(1-\theta)) = -\text{sgn}(\dot{P}^2(1-q^n)(1-\theta)(1-n)),$$

то есть коэффициент при  $Y^m$  и свободный член противоположны по знаку, следовательно, уравнение  $\kappa(Y(t)) = 0$  имеет корень с положительной действительной частью. Отметим, что это не гарантирует наличия точки перегиба у КП: расположенный в правой полуплоскости корень может не быть действительным, и даже действительный корень многочлена  $\kappa(Y(t))$  – необходимое, но не достаточное условие смены выпуклости  $Y(t)$ .

Исследуем поведение КП, моделируемых экспоненциальной ФН (7), запишем выражение (18) для функции (7):

$$\kappa(Y(t)) = \ddot{P}(e^{-qY/m} - e^{-Y/m})^2 + \dot{P}^2(e^{-qY/m} - e^{-Y/m}) + \frac{\dot{P}^2 Y (q e^{-qY/m} - e^{-Y/m})}{m}. \quad (20)$$

Подставим начальное условие  $Y(0) = c$  в выражение (20):

$$\kappa(Y(0)) = \ddot{P}(t)(e^{-qc/m} - e^{-c/m})^2 + \dot{P}^2(e^{-qc/m}(1+qc/m) - e^{-c/m}(1+c/m)).$$

Покажем, что  $\kappa(Y(0)) < 0$ . Функция  $(1 + \chi)e^{-\chi/m}$  убывает по  $\chi$ , следовательно, коэффициент при  $\dot{P}^2$  отрицателен. Функция  $P(t)$  пропорциональна  $\Pi(t)$ , следовательно,  $\dot{P} \leq 0$  и  $\kappa(0) \leq 0$ . При  $t \rightarrow \infty$ , если  $\dot{\Pi}(\infty) \neq 0$ ,  $Y$  из (15) неограниченно возрастает, поведение  $\kappa(t)$  определяет коэффициент при  $q e^{-qY/m} - e^{-Y/m}$ . Так как  $q < 1$ , для больших значений  $t$  этот коэффициент положителен; коэффициент при  $\ddot{P}(t)$  быстро убывает к 0;  $\kappa(\infty) \geq 0$ .

Следовательно, при  $p_1 > p_2$  КП модели с экспоненциальной ФН (7) и неогра-

нической функцией ползучести выпукла вверх при малых значениях времени и выпукла вниз при достаточно больших значениях времени.

На рис. 1 приведены решения уравнения (9) – кривые интенсивности деформаций на внутреннем радиусе цилиндров с  $q = 0,25$ , нагруженных давлениями  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 1$ , материалы моделируются ФП (8) с  $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\beta = 0,015$ ,  $\gamma = 0,01$ ,  $\mu = 0,1$  и набором функций нелинейности: кривая 1 соответствует линейно-вязкоупругому материалу; кривые 2 и 3 – степенным функциям нелинейности (2) с показателями степени 2 и 0,3; кривые 4 и 5 – бистепенным функциям нелинейности (6) с параметрами  $\theta = 0,8$ ,  $m = 2,5$ ,  $n = 0,3$  и  $\theta = 0,2$ ,  $m = 2,5$ ,  $n = 0,3$ ; кривая 6 соответствует экспоненциальной ФН (7) с показателем экспоненты 0,4. На графиках отражены все упомянутые эффекты: кривые 2 и 4 выпуклы вверх, кривая 3 выпукла вниз; кривая 5 имеет ограниченный, а кривая 6 – неограниченный участок выпуклости вниз.

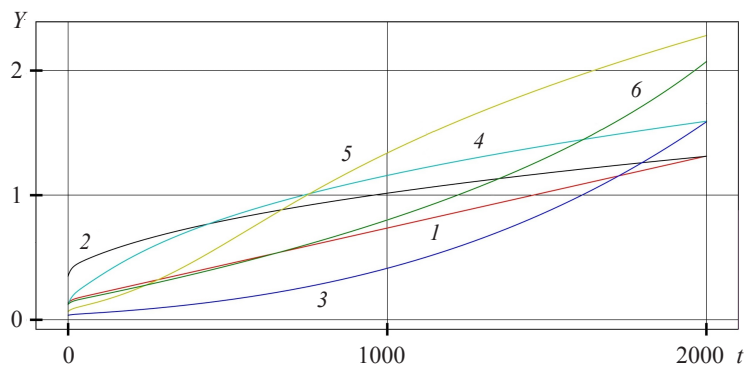


Рис. 1

## 5. Зависимость напряжений от времени

Напряжения в модели, описываемой ОС линейной вязкоупругости, не зависят от времени. В статье [1] показано, что напряжения в случае степенной ФН (2) также не зависят от времени. Сформулируем критерий постоянства напряжений и покажем, что в общем случае выбора произвольной допустимой функции нелинейности ОС Работнова напряжения не постоянны. Выражения для напряжений (12)–(14) можно записать единой формулой:  $\sigma_i(\bar{r}, t) = \mathbf{R}[f_i(Y(t), \bar{r})] + g_i$ , где функции  $f_i$ ,  $g_i$  приведены в таблице 1.

Таблица 1

Напряжение	$f_i$	$g_i$
$\sigma$	$\varphi(Y\bar{r}^{-2})$	
$\sigma_r$	$F(Y) - F(Y\bar{r}^{-2})$	$-p_1$
$\sigma_\theta$	$F(Y) - F(Y\bar{r}^{-2}) + 2\varphi(Y\bar{r}^{-2})$	$-p_1$
$\sigma_z$	$F(Y) - F(Y\bar{r}^{-2}) + \varphi(Y\bar{r}^{-2})$	$-p_1$

В силу соотношения взаимности (5) и биективности оператора релаксации (4), компонента  $\sigma_i$  постоянна во времени тогда и только тогда, когда

$$f_i(Y(t), \bar{r}) = c_i(\bar{r})\Pi(t), \quad (21)$$

$c_i(\bar{r})$  – произвольная функция  $\bar{r}$ . Так как  $Y$  – решение дифференциального уравнения (15),

$$\frac{d}{dt}(f_i(Y(t), \bar{r})) = \frac{\partial f_i}{\partial Y} \dot{Y}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial Y} \frac{\dot{P}(t)Y(t)}{\varphi(Y(t)) - \varphi(qY(t))},$$

если (21) выполнено тождественно, то

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{f_i(Y(t), \bar{r})}{\Pi(t)} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt}(f_i(Y(t), \bar{r}))\Pi(t) - f_i(Y(t), \bar{r})\dot{\Pi}(t) = \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial Y} \left( \frac{Y(F(Y) - F(qY))}{\varphi(Y) - \varphi(qY)} - f_i(Y, \bar{r}) \right) \dot{\Pi}(t). \end{aligned}$$

Следовательно, компонента напряжений  $\sigma$ , постоянна тогда и только тогда, когда тождественно по времени и радиусу во всей области определения выполнено условие:

$$\frac{\partial f_i}{\partial Y}(Y(t), \bar{r}) \frac{Y(F(Y(t)) - F(qY(t)))}{\varphi(Y(t)) - \varphi(qY(t))} = f_i(Y, \bar{r}). \quad (22)$$

В общем случае бистепенной ФН (6) для  $\sigma_r$  и  $\sigma$  условие (22) имеет вид

$$\bar{r}^m(1-q^n) - \bar{r}^n(1-q^m) + q^n - q^m = 0, \quad (mn^{-1} - 1)(1-q^n)\bar{r}^{2n} + (m^{-1}n - 1)(1-q^m)\bar{r}^{2n} = 0,$$

то есть все компоненты напряжений не зависят от времени во всех точках трубы только для степенной функции нелинейности при  $m = n$ .

Отметим ряд дополнительных свойств поля напряжений. Если ФП такова, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\Pi}(t) = 0$ , каждая из компонент напряжений при каждом фиксированном  $\bar{r}$  имеет горизонтальную асимптоту при  $t \rightarrow \infty$ : для ограниченной ФП  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = c_Y < \infty$ . Следовательно, каждая из  $f_i(Y, \bar{r})$  ограничена и возрастает:  $F(x)$ ,  $\varphi(x)$  – строго возрастающие функции,  $q < 1$ . Значит,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(Y(t), \bar{r})/P(t) = c_F = \text{const}$ , и напряжения стремятся к постоянным величинам.

Пусть  $\sigma_i(x, t)$  – поле напряжений модели с бистепенной ФН (6) с параметрами  $m, n$  и  $\sigma_i^n(x, t)$ ,  $\sigma_i^m(x, t)$  – поля напряжений моделей со степенными ФН (2) с параметрами  $m > 1, n < 1$ . Если цилиндры нагружены одинаково, их ФП совпадают и не ограничены, то  $\lim_{x \rightarrow 0} \sigma_i(\bar{r}, t) = \sigma_i^n(\bar{r})$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_i(\bar{r}, t) = \sigma_i^m(\bar{r})$ , ниже используется обозначение  $\lim_{t \rightarrow 0} F(x) = F(0+)$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x) = F(\infty)$ .

Для указанных ФН  $F(x) = \theta m^{-1}x^m + (1 - \theta)n^{-1}x^n$ ,  $F^m(x) = m^{-1}x^m$ ,  $F^n(x) = n^{-1}x^n$ . Заметим, что  $F(0+) = (1 - \theta)F^n(0+)$ ,  $F(\infty) = \theta F^m(\infty)$ ,  $\varphi(0+) = (1 - \theta)\varphi^n(0+)$ ,  $\varphi(\infty) = \theta\varphi^m(\infty)$ . Из функционального уравнения  $Y(0+) = (1 - \theta)^{-1/n}Y^n(0+)$ ,  $Y(\infty) = (1 - \theta)^{-1/m}Y^m(\infty)$ ; так как ФП не ограничена,  $Y(\infty) = \infty$ ,  $Y^m(\infty) = \infty$ . Следовательно,  $\varphi(Y(0+)) = \varphi^n(Y^n(0+))$ ,  $\varphi(Y(\infty)) = \varphi^m(Y^m(\infty))$ ,  $F(Y(0+)) = F^n(Y^n(0+))$ ,  $F(Y(\infty)) = F^m(Y^m(\infty))$ , а значит  $f_i(Y(0+)) = f_i^n(Y^n(0+))$ ;  $f_i(Y(\infty)) = f_i^m(Y^m(\infty))$ , и верны доказываемые равенства для напряжений. Аналогично можно показать, что напряжения в модели с экспоненциальной ФН (7) при малых значениях времени совпадают с напряжениями в линейно-вязкоупругом цилиндре.

## 6. Достаточные условия монотонности напряжений по радиальной координате

Напряжения в трубе со степенной ФН постоянны по  $t$  и монотонны по  $\bar{r}$ :  $\sigma_r$  возрастают и отрицательны,  $\sigma$  убывает, а характер монотонности остальных напря-



жений определяется показателем степени функции нелинейности [1]. В частности, в линейно-вязкоупругом цилиндре напряжения  $\sigma$  и  $\sigma_\theta$  убывают,  $\sigma_z$  постоянно. Обобщим эти свойства на случай произвольной функции нелинейности. Предполагаем, что  $\varphi(x)$  имеет интегрируемую по Лебегу вторую производную; для упрощения записи опустим черту над  $\bar{r}$ :  $\bar{r} = r$ . Производные напряжений (12)–(14) имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}(r, t) = \frac{2}{\sqrt{3}} r^{-3} z(t) \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(Y(\tau) r^{-2}) Y'(\tau) d\tau + \frac{2}{\sqrt{3}} r^{-1} z(t) R(t) \varphi(Y(0) r^{-2}), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial r}(r, t) = & -2r^{-3} \int_0^t R(t-\tau) (\varphi''(Y(\tau) r^{-2}) Y(\tau) r^{-2} + \varphi'(Y(\tau) r^{-2})) \dot{Y}(\tau) d\tau - \\ & - 2r^{-3} R(t) \varphi'(Y(0) r^{-2}) Y(0), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_z}{\partial r}(r, t) = & -\frac{2}{\sqrt{3}} r^{-3} \left[ \int_0^t R(t-\tau) \varphi''(Y(\tau) r^{-2}) Y(\tau) r^{-2} \dot{Y}(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. + R(t) (\varphi'(Y(0) r^{-2}) Y(0) r^{-2} - \varphi(Y(0) r^{-2})) \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial r}(r, t) = & -\frac{2}{\sqrt{3}} r^{-3} \left[ \int_0^t R(t-\tau) 2\varphi''(Y(\tau) r^{-2}) Y(\tau) r^{-2} \dot{Y}(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. + R(t) (2\varphi'(Y(0) r^{-2}) Y(0) r^{-2} - \varphi(Y(0) r^{-2})) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Из общих ограничений на материальные функции:  $R(t) \geq 0$ ,  $\varphi(x) \geq 0$ ,  $\varphi'(x) \geq 0$ ; ранее отмечено, что  $Y(t) \geq 0$ , то есть  $\text{sgn } \sigma_{r,r} = z(t)$ , и доказано, что при любых допустимых МФ ОС (1)  $\sigma_r$  в цилиндре, нагруженном положительной разностью давлений, отрицательны и возрастают по  $r$ ; нагруженном отрицательной разностью давлений – положительны и убывают по  $r$ .

Сформулируем не зависящие от ФП и программы нагружения достаточные условия радиальной монотонности остальных компонент напряжений.

1. В начальный момент времени интенсивность напряжений не возрастает по  $r$ . Если для  $x \in [0, Y(t_1)]$   $\varphi''(x)x \geq -\varphi^{-1}(x)$ , то  $\sigma(r, t)$  – невозрастающая функция  $r$  при  $t \in [0, t_1]$ .

2. Если для  $x \in [0, Y(t_2)]$   $\varphi''(x) \geq 0$ , то  $\sigma_z(r, t)$  – невозрастающая функция  $r$  при  $t \in [0, t_2]$ . Если для  $x \in [0, Y(t_2)]$  верно обратное неравенство, при  $t \in [0, t_2]$   $\sigma_z(r, t)$  – неубывающая функция  $r$ .

3. Если для  $x \in [0, Y(t_3)]$   $\varphi''(x)x \geq -\varphi'(x)/2$ , то  $\sigma_\theta(r, t)$  – невозрастающая функция  $r$  при  $t \in [0, Y(t_3)]$ . Если для  $x \in [0, Y(t_3)]$   $\varphi''(x)x < -\varphi'(x)/2$ , при  $t \in [0, Y(t_3)]$   $\sigma_\theta(r, t)$  – неубывающая функция  $r$ .

Так как  $r \geq 1$ , выполнение каждого из неравенств пп. 1–3 на отрезке  $[0, Y(t_i)]$  влечет за собой выполнение аналогичного неравенства на  $[0, Y(t_i)r^{-2}]$ . Внеинтегральное слагаемое в формуле (24) всегда неотрицательно из общих ограничений на МФ, следовательно, в начальный момент времени интенсивность напряжений не возрастает по  $r$ . Если при этом подынтегральное выражение неотрицательно на отрезке  $t \in [0, t_1]$ , на соответствующем отрезке  $\sigma(r, t)$  – невозрастающая функция  $r$ . Знак внеинтегральных слагаемых (25), (26) совпадает со знаком подынтегральных выражений, из чего и следует доказываемое:

$$\int_0^{Y(0)} \varphi''(x)x dx = \varphi'(Y(0))Y(0) - \varphi(Y(0)),$$

$$\int_0^{Y(0)} (2\varphi''(x)x + \varphi'(x)) dx = 2\varphi'(Y(0))Y(0) - \varphi(Y(0)).$$

Пусть ФП не ограничена (соответственно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$ ).

4. Если существует момент времени  $t_1$ , начиная с которого для  $x \in [qY(t_1), \infty]$   $\text{sgn}(\varphi''(x)x + \varphi'(x)) = \text{const}$ , то найдется момент времени  $T_1 \geq t_1$  такой, что  $\sigma(r, t)$  – монотонная функция  $r$  при  $t > T_1$ , причем  $\text{sgn} \sigma_{,r} = -\text{sgn}(\varphi''(x)x + \varphi'(x))$ .

5. Если существует момент времени  $t_2$ , начиная с которого для  $x \in [qY(t_2), \infty]$   $\text{sgn} \varphi''(x) = \text{const}$ , то найдется момент времени  $T_2 \geq t_2$  такой, что  $\sigma_z(r, t)$  – монотонная функция  $r$  при  $t > T_2$ , причем  $\text{sgn} \sigma_{z,r} = -\text{sgn} \varphi''(x)$ .

6. Если существует момент времени  $t_3$ , начиная с которого для  $x \in [qY(t_3), \infty]$   $\text{sgn}(\varphi''(x)x + \varphi'(x)/2) = \text{const}$ , то найдется момент времени  $T_3 \geq t_3$  такой, что  $\sigma_\theta(r, t)$  – монотонная функция  $r$  при  $t > T_3$ , причем  $\text{sgn} \sigma_{\theta,r} = -\text{sgn}(\varphi''(x)x + \varphi'(x)/2)$ .

Так как  $q < 1$ , выполнение каждого из неравенств пп. 1–3 на отрезке  $[qY(t), \infty]$  влечет за собой выполнение аналогичного неравенства на  $[Y(t), \infty]$ . Проведем доказательство для интенсивности напряжений; для осевых и окружных напряжений соображения аналогичны.

Предположим, что  $\varphi''(x)x + \varphi'(x) \leq 0$ . Выберем  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists t_\varepsilon, : \forall s > t_\varepsilon, R(s) < \varepsilon$ . Пусть  $t \geq t_1 + t_\varepsilon$ . Запишем (24):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r}(r, t) = -2r^{-3} \left[ \int_0^{t_1} R(t-\tau)(\varphi''(Y(\tau)r^{-2})Y(\tau)r^{-2} + \varphi'(Y(\tau)r^{-2}))\dot{Y}(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^t R(t-\tau)(\varphi''(Y(\tau)r^{-2})Y(\tau)r^{-2} + \varphi'(Y(\tau)r^{-2}))\dot{Y}(\tau) d\tau + R(t)\varphi'(Y(0)r^{-2}) \right],$$

$R(t)\varphi'(Y(0)r^{-2}) \leq A\varepsilon$  по выбору  $t$ . Оценим сверху интегралы, учитывая, что второе слагаемое отрицательно; так как  $\varphi''$  ограничена, а  $\varphi'$  непрерывна,

$$\int_0^{t_1} |R(t-\tau)(\varphi''(Y(\tau)r^{-2})Y(\tau)r^{-2} + \varphi'(Y(\tau)r^{-2}))\dot{Y}(\tau)| d\tau \leq \\ \leq \varepsilon t_1 \sup_{\tau < t_1} |(\varphi''Y(\tau)r^{-2})Y(\tau)r^{-2} + \varphi'(Y(\tau)r^{-2})\dot{Y}(\tau)| = \varepsilon t_1 S(t_1), \\ \int_{t_1}^t |R(t-\tau)(\varphi''(Y(\tau)r^{-2})Y(\tau)r^{-2} + \varphi'(Y(\tau)r^{-2}))\dot{Y}(\tau)| d\tau \leq \\ \leq R(t-t_1)(t-t_1) \sup_{\tau > t_1} |\varphi''(Y(\tau)r^{-2})Y(\tau)r^{-2} + \varphi'(Y(\tau)r^{-2})\dot{Y}(\tau)| \leq \varepsilon(t-t_1)s(t_1) < 0.$$

Таким образом,  $\sigma_{,r} \leq \varepsilon(t_1 S(t_1) + A) + \varepsilon(t-t_1)s(t_1)$ ;  $t_1, S(t_1)$  фиксированы, второе слагаемое отрицательно и отделено от нуля, так как  $t$  не ограничено сверху. Следовательно, для достаточно большого  $T_1 \forall t > T_1 \sigma_{,r} \leq 0$ , интенсивность напряжений монотонно убывает по  $r$ .

Для  $\varphi''(x)x + \varphi'(x) > 0$  оценим второе слагаемое производной снизу:

$$\int_{t_1}^t R(t-\tau)(\varphi''(Y(\tau)r^{-2})Y(\tau)r^{-2} + \varphi'(Y(\tau)r^{-2})\dot{Y}(\tau))d\tau \geq$$

$$\geq \varepsilon(t-t_1)\inf_{\tau > t_1} [(\varphi''(Y(\tau)r^{-2})Y(\tau)r^{-2} + \varphi'(Y(\tau)r^{-2})\dot{Y}(\tau))] = \varepsilon(t-t_1)i(t_1) > 0,$$

оценку модуля первого и третьего слагаемых возьмем с обратным знаком: можно выбрать  $\varepsilon$  так, что  $\sigma_r \geq \varepsilon(-t_1 S(t_1) - A) + \varepsilon(t-t_1)i(t_1) > 0$ ,  $\sigma(r, t)$  – неубывающая функция  $r$ .

Отметим две особенности полей напряжений, которые следуют из сформулированных утверждений. При положительной разности давлений интенсивность напряжений в модели с бистепенной ФН (6) монотонно убывает по  $r$  независимо от параметров функции нелинейности, осевое напряжение в модели с экспоненциальной ФН (7) монотонно убывает по  $r$  независимо от параметров функции нелинейности.

Проиллюстрируем выводы разделов 5, 6. Во всех рисунках использована единая цветовая нотация: кривые черного цвета соответствуют интенсивности напряжений; красного – окружным, синего – осевым и зеленого – радиальным напряжениям; штрихпунктирные кривые – параметрам линейно-вязкоупругого цилиндра.

На рис. 2 приведены стационарные эпюры напряжений для 6 цилиндров с  $q = 0,64$ , нагруженных давлениями  $p_1 = 2, p_2 = 1$ , материалы цилиндров моделируются ФП (8) с параметрами  $\alpha = 0, \beta = 0,015, \gamma = 0,01, \mu = 0,1$  и набором функций нелинейности: кривые 1 соответствуют степенной функции нелинейности (2) с показателем 2, кривые 2 – бистепенной функции (6)  $\varphi(x) = x^2 + 0,02x^{0,3}$ , кривые 3 –  $\varphi(x) = 0,2(0,83x^2 + 0,17x^{0,3})$ , кривые 5 –  $\varphi(x) = 0,3(0,77x^2 + 0,23x^{0,3})$ , кривые 6 – степенной функции нелинейности (2) с показателем 0,3, кривые 4 – линейно-вязкоупругому материалу. Варьирование параметра  $\theta$  бистепенной функции нелинейности (6) приводит к смене знака неравенств, определяющих характер радиальной монотонности  $\sigma_z, \sigma_\theta$ .

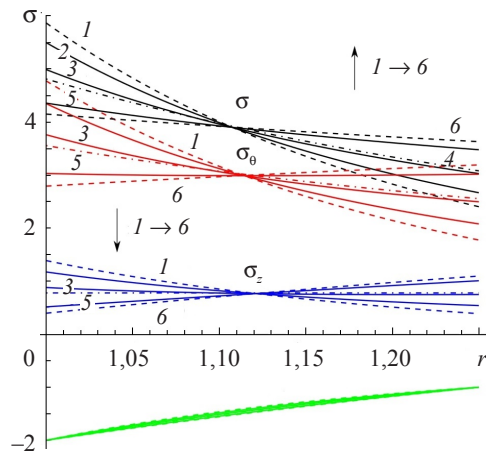


Рис. 2

На рис. 3 сопоставлены эпюры напряжений в разные моменты времени трех цилиндров с  $q = 0,64$ , нагруженных давлениями  $p_1 = 2, p_2 = 1$  для модели с ФП (8) с параметрами  $\alpha = 10^{-5}, \beta = 0,015, \gamma = 0,01, \mu = 0,1$ ; бистепенной функцией нелинейности (6) с параметрами  $A = 0,6, \theta = 0,8, m = 2, n = 0,3$  в моменты времени 20,

200, 2000, 3000, 5000 (кривые 1–5), степенной функцией нелинейности (2) с параметром 2 (кривые 6), линейно-вязкоупругого материала (кривые 7), степенной функцией нелинейности (2) с параметром 0,3 (кривые 8).

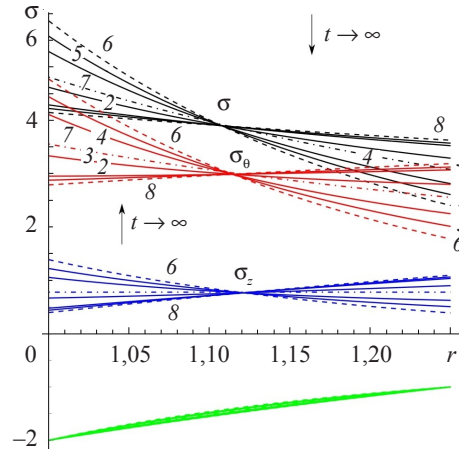


Рис. 3

На рис. 4 сопоставлены построенные в разные моменты времени эпюры напряжений трех цилиндров с  $q = 0,25$ , нагруженных давлениями  $p_1 = 2, p_2 = 1$  для модели с ФП (8) с параметрами  $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-5}, \beta = 0,015, \gamma = 0,01, \mu = 0,1$  и экспоненциальной функцией нелинейности (8) с показателем 0,4. Штрихпунктирной линией 0 построены напряжения для линейно-вязкоупругого цилиндра, кривые 1–6 соответствуют моментам времени 500, 2000, 5000, 10000, 15000, 20000.

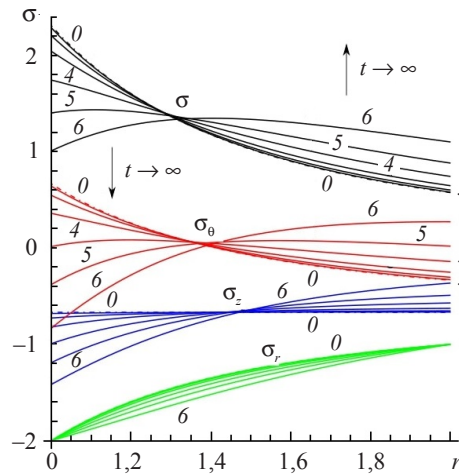


Рис. 4

Сравнивая рис. 3 и рис. 4, можно отметить разный характер изменения монотонности напряжений: в модели с экспоненциальной функцией нелинейности монотонность изменяется плавно; можно отметить задержку смены монотонности интенсивностью относительно окружного напряжения (это обусловлено тем, что моменты времени  $t_i$  в утв. 5 не обязаны совпадать) и случаи немонотонности для каждого из них (кривая 4 для окружного напряжения и кривая 5 для интенсивно-

сти; условия утв. 5, 6 в эти моменты времени выполнены на отрезке  $[Y(t), \infty]$ , но не  $[qY(t), \infty]$ .

### Заключение

Продолжено исследование свойств точного решения задачи о ползучести полового цилиндра, изготовленного из изотропного несжимаемого нелинейно-вязкоупругого материала, подчиняющегося ОС Работнова с двумя произвольными материальными функциями; решение представлено в виде интегральных операторов от МФ и монотонно возрастающей вспомогательной функции времени – модуля интенсивности деформации на внутреннем радиусе цилиндра. Функциональное уравнение для вспомогательной функции сведено к эквивалентной задаче Коши. Показано, что для произвольной функции нелинейности графики модуля интенсивности деформаций в фиксированной точке, равно как и компонент перемещений и деформаций (кривые ползучести), уже не обязаны быть выпуклыми вверх, как для линейно-вязкоупругого материала: установлена способность нелинейного ОС Работнова (с экспоненциальной или с бистепенной функцией нелинейности) моделировать кривые ползучести с точкой перегиба и участком выпуклости вниз (участком разупрочнения). Доказано, что радиальные напряжения всегда монотонно зависят от радиальной координаты (при положительной разности давлений радиальные напряжения возрастают и отрицательны), а интенсивность, окружные и осевые напряжения могут быть немонотонны по радиусу и менять монотонность в ходе нагружения; получены достаточные условия монотонности в терминах производных функции нелинейности. Сформулирован критерий постоянства напряжений во времени, показано, что для ограниченной функции ползучести ограничены и деформации, и напряжения в точках трубы. Доказано, что поле напряжений материала с бистепенной функцией нелинейности и неограниченной функцией ползучести эволюционирует от стационарного значения, соответствующего меньшему из показателей степеней двух слагаемых, до стационарного значения, соответствующего большему показателю. Выполнены численные расчеты и построены графики, иллюстрирующие основные результаты статьи.

### Список литературы

1. Хохлов А.В. Особенности эволюции напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы из нелинейно-вязкоупругого материала под действием постоянных давлений. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2020. Т. 26. №2. С. 224–246. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2020.26.02.224\_246.06.
2. Хохлов А.В. Деформация, длительная прочность и разрушение толстостенной трубы из нелинейно-наследственного материала под действием постоянного давления. *Деформация и разрушение материалов*. 2020. №6. С. 2–11. DOI: 10.31044/1814-4632-2020-6-2-11.
3. Работнов Ю.Н. Некоторые вопросы теории ползучести. *Вестник МГУ*. 1948. №10. С. 81–91.
4. Наместников В.С., Работнов Ю.Н. О наследственных теориях ползучести. *ПМТФ*. 1961. Т. 2. №4. С. 148–150.
5. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах. *Механика полимеров*. 1971. №1. С. 74–87.
7. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250. *Механика полимеров*. 1971. №3. С. 391–397.

8. Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. О законе деформирования металлов при одноосном нагружении. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1972. №4. С. 41–54.
9. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
10. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния. *Механика композитных материалов*. 1993. Т. 29. №5. С. 602–607.
11. Суворова Ю.В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях. *Изв. РАН. МТТ*. 2004. №1. С. 174–181.
12. Fung Y. C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics: its Foundations and Objectives*. Eds. Y.C. Fung, N. Perrone, M. Anliker. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972. P. 181–208.
13. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer, 1993. 568 p.
14. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *Journal of Biomechanics*. 2007. Vol. 40. Iss. 14. P. 3070–3078. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019.
15. Ляв А. *Математическая теория упругости*. М.: Изд-во ОНТИ, 1935. 674 с.
16. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Clarendon Press, 1950. 356 p.
17. Prager W., Hodge P.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. New York – London: John Wiley and Sons, 1951. 328 p.
18. Hill R., Lee E.H., Tupper S.J. The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1947. Vol. 191. No 1026. P. 278–303.
19. Ильюшин А.А. *Пластичность. Основы общей математической теории*. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
20. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. *Упруго-пластические деформации полых цилиндров*. М.: Изд-во МГУ, 1960. 227 с.
21. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
22. Megahed M.M. Elastic-plastic behaviour of a thick-walled tube with general nonlinear hardening properties. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1990. Vol. 32. No 7. P. 551–563. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(90\)90101-N](https://doi.org/10.1016/0020-7403(90)90101-N).
23. Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1992. Vol. 52. Iss. 1. P. 129–144. [https://doi.org/10.1016/0308-0161\(92\)90064-M](https://doi.org/10.1016/0308-0161(92)90064-M).
24. Gao X.-L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory. *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 40. Iss. 23. P. 6445–6455. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00424-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00424-4).
25. Zhao W., Seshadri R., Dubey R.N. On thick-walled cylinder under internal pressure. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2003. Vol. 125. Iss. 3. P. 267–273. <https://doi.org/10.1115/1.1593082>.
26. You L.H., Zhang J.J., You X.Y. Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2005. Vol. 82. Iss. 5. P. 347–354. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2004.11.001.
27. Chen Y.Z., Lin X.Y. Elastic analysis for thick cylinders and spherical pressure vessels made of functionally graded materials. *Computational Materials Science*. 2008. Vol. 44. Iss. 2. P. 581–587. DOI:10.1016/j.commatsci.2008.04.018.
28. You L.H., Zheng Z.Y. Elastic-plastic thermomechanical response of composite co-axial cylinders. *Journal of Materials Science*. 2006. Vol. 41. Iss. 15. P. 4901–4913. DOI: 10.1007/s10853-006-0319-x.
29. Xin L., Dui G., Yang S., Zhang J. An elasticity solution for functionally graded thick-walled tube subjected to internal pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 89. P. 344–349. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2014.08.028.
30. Xin L., Dui G., Yang S., Liu Y. Elastic-plastic analysis for functionally graded thick-

walled tube subjected to internal pressure. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. 2016. Vol. 8. No 2. P. 331–352. DOI: 10.4208/aamm.2014.m841.

31. Шарафутдинов Г.З. Осесимметричная деформация толстостенной трубы из высокоэластичного материала. *Изв. РАН. МТТ*. 2009. №2. С. 108–120.

32. Радченко В.П., Кубышкина С.Н. Математическая модель реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 1998. Вып. 6. С. 23–34. <https://doi.org/10.14498/vsgtu4>.

33. Радченко В.П., Цветков В.В. Напряженно-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2013. Вып. 3 (32). С. 77–86. DOI: 10.14498/vsgtu1277.

34. Зингерман К.М., Левин В.А. Обобщение задачи Ламе – Гадолина для больших деформаций и ее аналитическое решение. *ПММ*. 2013. Т. 77. №2. С. 322–336. DOI: 10.1016/j.jarrmathmech.2013.07.016.

35. Попов А.Л., Челюбеев Д.А., Бухалов В.И. Задача Гадолина в упругопластической постановке. *ПММ*. 2018. Т. 82. №6. С. 804–812. DOI: 10.31857/S003282350002744-8.

36. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.

37. Guz I.A., Menshykova M., Paik J.K. Thick-walled composite tubes for offshore applications: an example of stress and failure analysis for filament-wound multi-layered pipes. *Ships and Offshore Structures*. 2017. Vol. 12. Iss. 3. P. 304–322. DOI:10.1080/17445302.2015.1067019.

38. Качанов Л.М. *Теория ползучести*. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.

39. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.

40. Guedes R.M. Nonlinear viscoelastic analysis of thick-walled cylindrical composite pipes. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010. Vol. 52. Iss. 8. P. 1064–1073. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2010.04.003.

41. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2017. Vol. 72. No 5. P. 103–107. DOI: 10.3103/S0027133017050016.

42. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. №3. С. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123.

43. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54. No 4. P. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1.

44. Хохлов А.В. Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2018. Т. 24. №3. С. 407–436. DOI: 10.33113/mkkm.ras.2018.24.03.407-436.07.

45. Хохлов А.В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Изв. РАН. МТТ*. 2019. №2. С. 29–47. DOI: 10.1134/S0572329919020077.

46. Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York: Academic Press, 1971. 245 p.

47. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.

#### References

1. Khokhlov A.V. Osobennosti evolyutsii napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya tolstostennoy truby iz nelineyno-vyazkouprugogo materiala pod deystviem postoyannykh davleniy [Characteristic features of stress-strain state evolution in thick-walled tubes of non-linear viscoelastic material subject to constant pressures]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*

- [*Mech. Compos. Mater.*]. 2020. Vol. 26. No 2. P. 224–246. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2020.26.02.224\_246.06 (In Russian).
2. Khokhlov A.V. Deformation and long-term strength of a thick-walled tube of physically non-linear viscoelastic material under given constant pressure. *Russian Metallurgy (Metally)*. 2020. Vol. 2020. No 10. P. 1079–1087. DOI: 10.1134/S0036029520100122.
  3. Rabotnov Yu.N. Nekotorye voprosy teorii polzuchesti [Some questions of the creep theory]. *Vestnik MGU*. 1948. No 10. P. 81–91 (In Russian).
  4. Namestnikov V.S., Rabotnov Yu.N. O nasledstvennykh teoriyakh polzuchesti [On the hereditary creep theories]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [J. Appl. Mech. Tech. Phys.]*. 1961. Vol. 2. No 4. P. 148–150 (In Russian).
  5. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest elementov konstruktsiy [Creep Problems in Structural Members]*. Moscow. Nauka Publ. 1966. 752 p. (In Russian).
  6. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Prilozhenie nelineynoy teorii nasledstvennosti k opisaniyu vremennykh effektov v polimernykh materialakh [Application of the nonlinear theory of heredity to the description of time effects in polymeric material]. *Mekhanika polimerov [Mechanics of Composite Materials]*. 1971. Vol. 7. No 1. P. 63–73 (In Russian).
  7. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev E.I. Description of creep of composition materials under tension and compression. 1973. Vol. 9. No 5. P. 690–695.
  8. Rabotnov Yu.N., Suvorova Yu.V. O zakone deformirovaniya metallov pri odnoosnom nagruzenii [About the deformation law for metals under a uniaxial loading]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1972. No 4. P. 41–54 (In Russian).
  9. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel [Introduction to Hereditary Mechanics of Solids]*. Moscow. Nauka Publ. 1977. 384 p. (In Russian).
  10. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Nonlinear model of an isotropic hereditary medium in state of complex stress. *Mech. Compos. Mater.* 1994. Vol. 29. No 5. P. 443–447.
  11. Suvorova Yu.V. O nelineyno-nasledstvennom uravnenii Y.N. Rabotnova i ego prilozheniyakh [On the Yu.N. Rabotnov nonlinear hereditary equation and its applications]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2004. No 1. P. 174–181 (In Russian).
  12. Fung Y. C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics: its Foundations and Objectives*. Eds. Y.C. Fung, N. Perrone, M. Anliker. New Jersey. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. 1972. P. 181–208.
  13. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York. Springer. 1993. 568 p.
  14. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *J. Biomech.* 2007. Vol. 40. Iss. 14. P. 3070–3078. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019.
  15. Love A.E.H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. 3rd ed. Cambridge. Cambridge University Press. 1920. 624 p.
  16. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford. Clarendon Press. 1950. 356 p.
  17. Prager W., Hodge P.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. New York. London. John Wiley and Sons. 1951. 328 p.
  18. Hill R., Lee E.H., Tupper S.J. The theory of combined plastic and elastic deformation with particular reference to a thick tube under internal pressure. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. 1947. Vol. 191. No 1026. P. 278–303.
  19. Ilyushin A.A. *Plastichnost. Osnovy obschei matematicheskoi teorii [Theory of Plasticity. Mathematical Base]*. Moscow. AN SSSR Publ. 1963. 271 p. (In Russian).
  20. Ilyushin A.A., Ogibalov P.M. *Uprugo-plasticheskie deformatsii polykh tsilindrov [Elasto-plastic Deformations of Hollow Cylinders]*. Moscow. MGU Publ. 1960. 227 p. (In Russian).
  21. Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematic Theory of Plasticity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 704 p. (In Russian).
  22. Megahed M.M. Elastic-plastic behaviour of a thick-walled tube with general nonlinear hardening properties. *Int. J. Mech. Sci.* 1990. Vol. 32. No 7. P. 551–563. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(90\)90101-N.551-563](https://doi.org/10.1016/0020-7403(90)90101-N.551-563).
  23. Gao X.-L. An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a



strain-hardening material. *Int. J. Pres. Ves. Pip.* 1992. Vol. 52. Iss. 1. P. 129–144. [https://doi.org/10.1016/0308-0161\(92\)90064-M](https://doi.org/10.1016/0308-0161(92)90064-M).

24. Gao X.-L. Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory. *Int. J. Solids Struct.* 2003. Vol. 40. Iss. 23. P. 6445–6455. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00424-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00424-4).

25. Zhao W., Seshadri R., Dubey R.N. On thick-walled cylinder under internal pressure. *J. Pressure Vessel Technol.* 2003. Vol. 125. Iss. 3. P. 267–273. <https://doi.org/10.1115/1.1593082>.

26. You L.H., Zhang J.J., You X.Y. Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials. *Int. J. Pres. Ves. Pip.* 2005. Vol. 82. Iss. 5. P. 347–354. DOI: 10.1016/j.ijvp.2004.11.001.

27. Chen Y.Z., Lin X.Y. Elastic analysis for thick cylinders and spherical pressure vessels made of functionally graded materials. *Comp. Mater. Sci.* 2008. Vol. 44. Iss. 2. P. 581–587. DOI: 10.1016/j.commatsci.2008.04.018.

28. You L.H., Zheng Z.Y. Elastic-plastic thermomechanical response of composite co-axial cylinders. *J. Mater. Sci.* 2006. Vol. 41. Iss. 15. P. 4901–4913. DOI: 10.1007/s10853-006-0319-x.

29. Xin L., Dui G., Yang S., Zhang J. An elasticity solution for functionally graded thick-walled tube subjected to internal pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 89. P. 344–349. DOI: 10.1016/j.ijmesci.2014.08.028.

30. Xin L., Dui G., Yang S., Liu Y. Elastic-plastic analysis for functionally graded thick-walled tube subjected to internal pressure. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. 2016. Vol. 8. No 2. P. 331–352. DOI: 10.4208/aamm.2014.m841.

31. Sharafutdinov G.Z. Axisymmetric strain of a thick-walled pipe made of a highly elastic material. *Mechanics of Solids*. 2009. Vol. 44. No 2. P. 257–268. DOI: 10.3103/S0025654409020113.

32. Radchenko V.P., Kubyshkina S.N. Matematicheskaya model reologicheskogo deformirovaniya i razrusheniya tolstostennoy truby [A mathematical model of rheological deformation and fracture for thick-walled pipe]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. 1998. Iss. 6. P. 23–34. DOI: 10.14498/vsgtu4 (In Russian).

33. Radchenko V.P., Tsvetkov V.V. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie tsilindricheskogo obraztza iz splava D16T v usloviyakh oseвого rastyazheniya i krucheniya pri polzuchesti. [The stress-strain state of cylindrical sample from alloy D16T under axial tension and torsion creep]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences]*. 2013. Iss. 3(32). P. 77–86 (In Russian).

34. Zingerman K.M., Levin V.A. Extension of the Lamé–Gadolin problem for large deformations and its analytical solution. *J. Appl. Math. Mech.* 2013. Vol. 77. No. 2. P. 235–244. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.07.016.

35. Bukhalov V.I., Popov A.L., Chelyubeev D.A. Gadolin's theory in elastoplastic formulation. *Mech. Solids*. 2019. Vol. 54. No 2. P. 356–363. DOI: 10.3103/S0025654419030051.

36. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [Applied Theory of Plasticity and Creep]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1968. 400 p.

37. Guz I. A., Menshykova M., Paik J.K. Thick-walled composite tubes for offshore applications: an example of stress and failure analysis for filament-wound multi-layered pipes. *Ships and Offshore Structures*. 2017. Vol. 12. No 3. P. 304–322 DOI: 10.1080/17445302.2015. 1067019.

38. Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti [Creep Theory]*. Moscow. Fizmatgiz Publ. 1960. 455 p.

39. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest i dlitelnaia prochnost metallov [Creep and Long-Lasting Strength of Metals]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2016. 504 p.

40. Guedes R.M. Nonlinear viscoelastic analysis of thick-walled cylindrical composite pipes. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010. Vol. 52. Iss. 8. P. 1064–1073. DOI: 10.1016/j.ijmesci.2010.04.003.

41. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow Univ. Mech. Bulletin*. 2017. Vol. 72. No 5. P. 103–107. DOI: 10.3103/S0027133017050016.

42. Khokhlov A.V. Analiz obshchikh svoystv krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhenii, porozhdaemykh nelineynym sootnosheniem Rabotnova dlya vyazkoupругoplastichnykh ma-

terialov [Analysis of general properties of creep curves generated by the Rabotnov nonlinear hereditary relation under multi-step loadings]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences Series]. 2017. No 3. P. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123 (In Russian).

43. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mech. Compos. Mater.* 2018. Vol. 54. No 4. P. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1.

44. Khokhlov A.V. Modelirovanie zavisimosti krivykh polzuchesti pri rastyazhenii i koeffitsienta Puassona reonomnykh materialov ot gidrostaticheskogo davleniya s pomoshchyu nelineyno-nasledstvennogo sootnosheniya Rabotnova [Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Mech. Compos. Mater.]. 2018. Vol. 24. No 3. P. 407–436. DOI: 10.33113/mkmm.ras.2018.24.03.407\_436.07 (In Russian).

45. Khokhlov A.V. Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. No 3. P. 384–399. DOI: 10.3103/S002565441902002X.

46. Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York. Academic Press. 1971. 245 p.

47. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge. Cambridge Univ. Press. 2009. 461 p.

## CREEP OF A THICK-WALLED QUASILINEAR VISCOELASTIC TUBE UNDER A CONSTANT EXTERNAL AND INTERNAL PRESSURE

Kabanova L.A.<sup>1</sup>, Khokhlov A.V.<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>3</sup>*JSC "Composite", Korolev, Moscow region, Russian Federation*

We consider the creep problem for a quasilinear viscoelastic model of a thick-walled tube, loaded with constant internal and external pressure; the material is supposed to be incompressible. An exact solution to this problem was received by one of the authors in previous papers, assuming the state of a tube to be plain deformation; hereby we study properties of this solution for arbitrary material functions of quasilinear viscoelasticity constitutive relation. A criterion of stress stationarity is derived; the stress field of a thick-walled tube under a constant pressure evolves in time in the case of unbounded creep function and arbitrary nonlinearity function, except some particular types. The monotonicity of stress field components is studied: the radial stress monotonicity depends only on internal and external pressure values (for internal pressure, greater than an external one, it is negative and increases in radii). For other stress components, there are derived sufficient conditions of monotonicity. For an exponential nonlinearity function and unbounded creep function, a creep curve is determined to be concave up at the initial moment, and concave down during prolonged observation; the creep curve of a bipower nonlinearity function model may change its convexity. The stress-strain state of a model with a bounded creep function is proved to be bounded.

*Keywords:* quasilinear viscoelasticity, creep curve, thick-walled tube, material function governing nonlinearity, incompressible material, stress field properties.