

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-2-151-159

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИНАМИКИ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ ВЫСОКОЭЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2021 г.

Коровайцева Е.А.

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

katrell@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2021

Представлены результаты тестирования алгоритма решения задач нелинейного осесимметричного динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов. Уравнения движения представлены в векторно-матричной форме. Для решения нелинейной начально-краевой задачи разработан алгоритм, заключающийся в сведении системы уравнений движения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием метода прямых. При этом применяется конечно-разностная аппроксимация частных производных по времени. Полученная в результате аппроксимации система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений решается методом дифференцирования по параметру на каждом шаге по времени. Приведены результаты тестирования описанного алгоритма в случае линейно возрастающего во времени давления, равномерно распределенного по меридиану шарнирно опертой мягкой полусферы. Рассмотрены три типа упругого потенциала, характеризующего материал оболочки: неогуковский, Муни – Ривлина и Йео. Отмечены особенности численной реализации используемого алгоритма, связанные как со свойствами системы уравнений деформирования мягких оболочек, так и с особенностями самого алгоритма. Исследовано поведение решения при критическом значении давления, раздувающего оболочку. Уточнены формулировки и выводы, данные в аналитических исследованиях задачи. Показана применимость используемого алгоритма при решении задач динамического деформирования мягких оболочек в диапазоне перемещений, в несколько раз превышающих начальные размеры оболочки, и деформаций, намного превышающих единицу. Численное решение начально-краевой задачи нестационарного динамического деформирования мягкой оболочки получено без предположений об ограниченности перемещений и деформаций. Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами аналитических исследований тестовой задачи.

Ключевые слова: мягкая оболочка, высокоэластичный материал, нестационарная динамика.

Введение

В научной литературе можно выделить два подхода к постановке и решению задач динамики мягких оболочек. Первый подход характерен для отечественных

школ исследования мягкооболочечных конструкций и отличается направленностью на решение конкретных прикладных задач [1–5]. При постановке таких задач разрабатываются модели исследуемой конструкции, учитывающие ее специфические свойства или условия работы. Решение задач проводится как аналитически, так и численно методом конечных разностей, в последнем случае допуская возможность полного анализа напряженно-деформированного состояния. Однако анализ поведения конструкции всегда выполняется в предположении малых перемещений и деформаций, что в общем случае не отражает возможности поведения оболочки из высокоэластичного материала.

Второй подход присущ зарубежным исследованиям. Несмотря на кажущееся многообразие зарубежных разработок в области динамики мягких оболочек по сравнению с отечественными исследованиями, в первых можно выделить лишь три типа задач с позиций геометрии рассматриваемой конструкции: анализ деформирования мембраны, цилиндра или сферы [6–15]. Кроме того, математическая формулировка задачи существенно проще предлагаемой отечественными авторами – рассматриваются такие условия нагружения и закрепления оболочки, которые позволяют свести уравнения ее движения к дифференциальному уравнению второго порядка по времени. Решение уравнения в большинстве случаев сводится к получению аналитического выражения для периода колебаний и фазового портрета системы. Лишь в четырех статьях решение определяется численно [16–19].

В настоящей статье предпринята попытка представить постановку и алгоритм решения задачи осесимметричного динамического деформирования мягкой оболочки без каких-либо ограничений, свойственных существующим исследованиям.

1. Постановка задачи и алгоритм решения

Пусть задача динамического деформирования мягкой оболочки описывается системой дифференциальных уравнений, в векторно-матричной форме имеющей вид

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q}) + M \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{y}(x, 0) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}'(x, 0) = \mathbf{y}'_0 \quad (2)$$

и граничными условиями

$$\boldsymbol{\Psi}_1(x_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}, t) = 0, \quad 1 \leftrightarrow 2. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{y} – вектор-функция с n компонентами разрешающих переменных, $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{q})$ – вектор-функция с n компонентами правых частей системы дифференциальных уравнений, $\mathbf{q}(x)$ – вектор-функция с l компонентами поверхностных нагрузок, $\boldsymbol{\mu}$ – вектор параметров задачи, M – матрица инерционных свойств оболочки, t – время. При этом для мягкой оболочки в качестве компонент вектора \mathbf{y} взяты обозначения из [20]: $\mathbf{y} = \{T_{1x}, T_{1z}, u, w\}^T$, где T_{1x}, T_{1z} – проекции равнодействующих усилий, действующих по граням элемента деформированной поверхности оболочки, на оси x, z системы координат, связанной с недеформированной оболочкой; u, w – проекции вектора перемещения точки поверхности оболочки на указанные оси.

Для решения задачи (1)–(3) используем метод прямых. Для конечно-разностно-

го представления вектора ускорений в статье рассматривается четырехточечная аппроксимация с использованием законтурных точек на первых шагах по времени [21]. Тогда для k -го регулярного шага по времени полная система уравнений в частных производных, описывающих динамическое поведение оболочки, сводится к совокупности нелинейных краевых задач в обыкновенных производных:

$$\begin{aligned} \frac{dy_k}{dx} &= \mathbf{F}_k(x, \mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}, \dots, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{q}_k, t_k); \\ \Psi_{1,k}(x_1, \mathbf{y}_{1,k}, \mathbf{q}_k, \boldsymbol{\mu}_k, t_k) &= 0, \quad 1 \leftrightarrow 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь t_k – k -й момент времени.

При использовании метода дифференцирования по параметру [22] для решения системы (4) представим нагрузку, действующую на деформируемый элемент, суммой заданных поверхностных и инерционных нагрузок:

$$\mathbf{q}^*(t) = \mathbf{q}(t) + M \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2}. \quad (5)$$

В соответствии с концепцией рассматриваемого метода при построении алгоритма решения задачи (4) вводится параметр нагрузки α , то есть нагрузка (5) записывается в виде $\mathbf{q}^*(t) = \alpha \mathbf{q}^*(t)$, и выбирается некоторый параметр T , по которому продолжается решение задачи. На основании результатов исследований, приведенных в [23], параметр продолжения решения T выбран в форме календарного параметра, предложенной в [24]. Тогда при дифференцировании по указанному параметру системы уравнений (4) получим квазилинейную краевую задачу, которую можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\mathbf{y}}_k}{dx} &= A_k(x, \mathbf{y}_k, \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{q}_k, \alpha) \dot{\mathbf{y}}_k + \mathbf{b}_k(x, \mathbf{y}_k, \boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{q}_k, \mathbf{y}_{k-1}, \dots, \mathbf{y}_1) \dot{\alpha}, \\ B_{1,k}(x_1, \mathbf{y}_{1,k}, \boldsymbol{\mu}_{1,k}, \mathbf{q}_{1,k}, \alpha) \dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{b}_{1,k}(x_1, \mathbf{y}_{1,k}, \boldsymbol{\mu}_{1,k}, \mathbf{q}_{1,k}) \dot{\alpha} &= 0, \quad 1 \leftrightarrow 2. \end{aligned} \quad (6)$$

При использовании метода дифференцирования по параметру квазилинейная краевая задача дополняется нелинейной задачей Коши относительно искомым векторов разрешающих переменных и параметра нагрузки α :

$$\begin{aligned} \frac{dy_{k,j}}{dT} &= \dot{\mathbf{y}}_{k,j}(\mathbf{y}_{k,j}, x_{k,j}, T), \\ \frac{d\alpha}{dT} &= \dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $j \in [1, m]$, где m – число точек дискретизации меридиана оболочки.

Поиск решения взаимосвязанных квазилинейной краевой (6) и нелинейной начальной (7) задач проводится последовательно на каждом временном слое при значениях параметра $\alpha \in [0; 1]$, где решение при $\alpha = 1$ соответствует решению исходной задачи (1)–(3) с точностью до принятой аппроксимации вектора ускорений.

2. Решение задачи о раздувании полусферы линейно возрастающим давлением

Рассмотрим задачу о динамическом раздувании равномерно распределенным по меридиану давлением шарнирно опертой мягкой полусферы из материалов, упругие потенциалы W которых характеризуются зависимостями:

- 1) неогуковский: $W = C(I_1 - 3)$,
- 2) Муни – Ривлина: $W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$,
- 3) Йео: $W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_1 - 3)^2 + C_3(I_1 - 3)^3$.

Здесь $C, C_{10}, C_{01}, C_1, C_2, C_3$ – параметры материала оболочки, $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2$, $\lambda_i = 1 + e_i$, $i = \overline{1, 3}$, где e_i – деформации в направлении осей системы координат, связанной с деформированной оболочкой.

В статьях, посвященных исследованию динамики раздувания полусферы, при рассмотрении задач, для которых существует понятие критического давления, указывается, что при превышении давлением этого значения либо «решение физически неприемлемо», либо «оболочка через некоторое время разрушается» [12, 14, 15]. При этом полного анализа напряженно-деформированного состояния оболочки ни в одной из работ не проводится, и понятие критической нагрузки определяется лишь как некое экстремальное ее значение, которое является допустимым для рассматриваемой оболочки при заданных начальных условиях. Поведение оболочки при стремлении нагрузки к критическому значению не описывается.

Устранение указанного недостатка оказывается возможным в случае рассматриваемой в настоящей статье полной постановки задачи деформирования мягкой оболочки как начально-краевой задачи. Примем, что равномерно распределенное по меридиану оболочки давление линейно возрастает во времени. Соотношения параметров материала на основании данных из [14] положим следующими:

- для материала Муни – Ривлина $C_{10}/C = 1,097$, $C_{01}/C = 0,00784$;
- для материала Йео $C_1/C = 0,993$, $C_2/C = -0,00852$, $C_3/C = 0,000214$.

Рассмотрим случай, когда отношение начального радиуса к начальной толщине оболочки $R_0/h_0 = 100$. При этом в представляемых результатах расчетов безразмерные величины нагрузки p , напряжений σ , приведенных к толщине оболочки усилий T_h , прогиба w и времени τ связаны с соответствующими размерными величинами соотношениями:

$$p = \frac{p^*}{C}, \quad \sigma = \frac{\sigma^*}{C}, \quad T_h = \frac{T_h^*}{Ch_0}, \quad w = \frac{w^*}{R_0}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{C}{R_0^2 \rho}},$$

где ρ – плотность материала оболочки.

При вычислениях с минимально допустимым шагом по времени $\Delta\tau$, определяемым обусловленностью матрицы Якоби системы уравнений (6), начиная с некоторой величины раздувающего оболочку давления дальнейшие вычисления приводили к появлению нефизичного результата, то есть в процессе решения величина скорости изменения параметра нагрузки по календарному параметру [24] становилась отрицательной. Указанное значение давления было принято критическим. Таким образом определены величины критического давления для оболочки из материалов рассматриваемых типов (таблица 1).

Таблица 1

**Значения критического давления
раздуваемой мягкой полусферы**

Материал	$P_{\text{крит}}^{\text{числ}}$	$P_{\text{крит}}^{\text{аналит}}$
неогуковский	0,0282	0,0222
Муни – Ривлина	0,0315	0,0248
Йео	0,0281	0,0217

Отметим, что, строго говоря, представленное в таблице сравнение результатов расчета с аналитическим решением [14] не вполне корректно, так как последнее получено в предположении отсутствия предварительного напряженного состояния оболочки, тогда как при построении численного решения необходима регуляризация системы уравнений движения оболочки на первом шаге по времени, заключающаяся в задании предварительного малого давления, раздувающего оболочку [24]. Однако в численно полученных результатах прослеживается та же тенденция, что и в аналитических – наименьшее значение критической нагрузки соответствует материалу Йео, наибольшее – материалу Муни – Ривлина.

До достижения нагрузкой критического значения радиальное перемещение оболочки непрерывно возрастает, составляя, как и для критической нагрузки, наибольшее значение для материала Йео, наименьшее – для материала Муни – Ривлина (рис. 1).

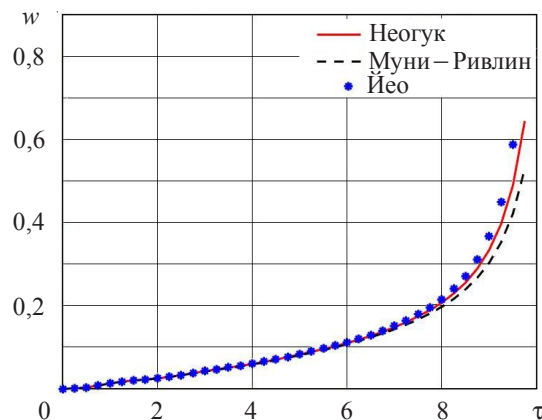


Рис. 1. Изменение прогиба оболочки w при линейно возрастающей до критического значения нагрузке

В соответствии с рассматриваемыми моделями материалов, напряжения в оболочке для материалов всех трех типов непрерывно возрастают как до, так и после достижения оболочкой состояния, соответствующего критической нагрузке (рис. 2а).

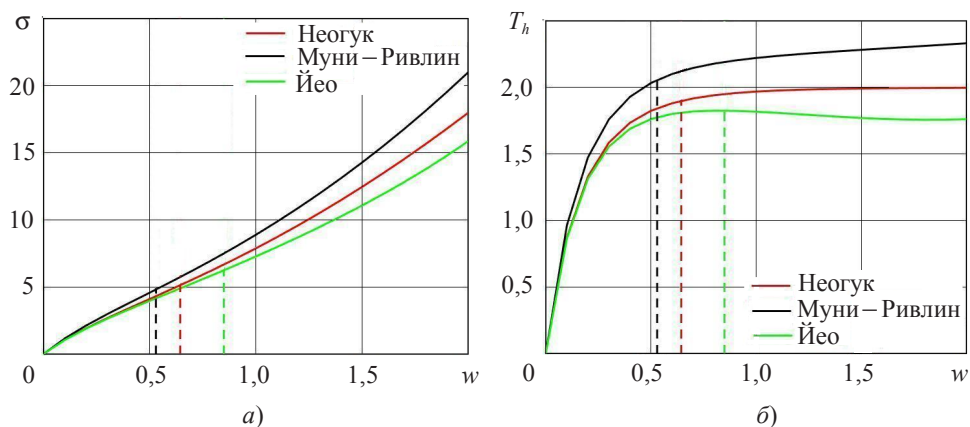


Рис. 2. Диаграммы деформирования:
а) материала оболочки; б) оболочки в приведенных усилиях

Таким образом, достижение нагрузкой критического значения не связано с достижением некоторой характерной предельной величины напряжения в оболочке.

Иное поведение отмечается у диаграмм деформирования оболочки в приведенных усилиях (рис. 2б). Для материала Йео точка локального максимума на диаграмме соответствует критической нагрузке, однако для других рассматриваемых материалов никаких особенностей на данной диаграмме в точке, соответствующей критической нагрузке, не наблюдается. Таким образом, можно заключить, что понятие критической нагрузки не соответствует приближению оболочки к некоторому предельному с точки зрения прочности или жесткости состоянию, как указывалось в публикациях, определяющих поведение оболочки при нагрузке выше критической как разрушение. Наиболее корректным представляется объяснение поведения оболочки при нагрузке выше критической как физически невозможное, что в рассматриваемом расчете проявляется как получение отрицательного значения параметра нагрузки.

В рассматриваемых моделях материала возможны такие значения его параметров, при которых поведение оболочки реализуется при любом значении нагрузки, что показано в статье [9], посвященной аналитическому решению задачи о динамическом раздувании сферической оболочки. При решении этой задачи в полной постановке, рассматриваемой в настоящей статье, на примере оболочки из материала Муни – Ривлина при соотношении параметров $C_{01}/C_{10} = 0,18$ удалось получить решение для линейно возрастающей нагрузки в достаточно большом рассмотренном диапазоне прогибов ($w_{\max} = 6,5R_0$). На рис. 3 показана соответствующая диаграмма деформирования оболочки, то есть зависимость нагрузки от прогиба оболочки. Таким образом, получение решения задачи динамического деформирования оболочки с помощью рассматриваемого алгоритма возможно и для больших значений перемещений и деформаций.

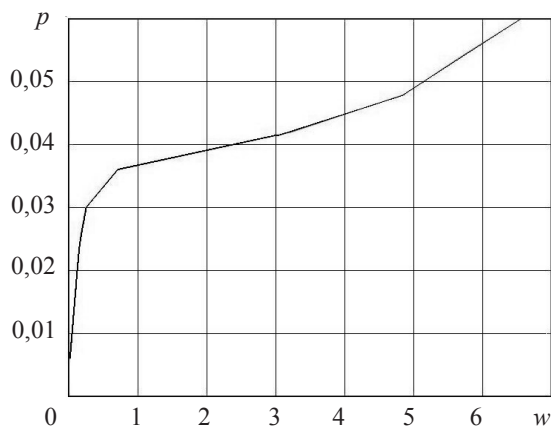


Рис. 3. Диаграмма динамического деформирования шарнирно опертой полусферы из материала Муни – Ривлина

Заключение

Впервые представлено численное решение начально-краевой задачи нестационарного динамического деформирования мягкой оболочки, полученное без предположений об ограниченности перемещений и деформаций. Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами аналитических исследований тестовой задачи.

Список литературы

1. Друзь Б.И., Друзь И.Б. *Теория мягких оболочек*. Владивосток: Изд-во МГУ, 2003. 381 с.
2. Ридель В.В., Гулин Б.В. *Динамика мягких оболочек*. М.: Наука, 1990. 204 с.
3. Гимадиев Р.Ш. *Динамика мягких оболочек парашютного типа*. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2006. 208 с.
4. Лялин В.В., Морозов В.И., Пономарев А.Т. *Парашютные системы. Проблемы и методы их решения*. М.: Физматлит, 2009. 576 с.
5. Колпак Е.П. *Устойчивость безмоментных оболочек при больших деформациях*. СПб.: СПбГУ, 2000. 248 с.
6. Knowles J.K. On a class of oscillations in the finite deformation theory of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*. 1962. Vol. 29. Iss. 2. P. 283–286. <https://doi.org/10.1115/1.3640542>.
7. Akkas N. On the dynamic snap-out instability of inflated non-linear spherical membranes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1978. Vol. 13. Iss. 3. P. 177–183. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(78\)90006-9](https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90006-9).
8. Calderer C. The dynamical behavior of nonlinear elastic spherical shells. *Journal of Elasticity*. 1983. Vol. 13. Iss. 1. P. 17–47. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291025>.
9. Verron E., Khayat R.E., Derdouri A., Peseux B. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes. *Journal of Rheology*. 1999. Vol. 43. No 5. P. 1083–1097. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006758>.
10. Yuan X., Zhang R., Zhang H. Controllability conditions of finite oscillations of hyperelastic cylindrical tubes composed of a class of Ogden material models. *Computers, Materials and Continua*. 2008. Vol. 7. No 3. P. 155–166. DOI: 10.3970/cm.c.2008.007.155.
11. Ren J.-S. Dynamical response of hyper-elastic cylindrical shells under periodic load. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2008. Vol. 29. No 10. P. 1319–1327. DOI: 10.1007/s10483-008-1007-x.
12. Ren J.-S. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyper-elastic spherical shells. *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. Iss. 7-8. P. 745–753. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.02.001>.
13. Ju Y., Niu D. On a class of differential equations of motion of hyperelastic spherical membranes. *Applied Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 6. No 83. P. 4133–4136.
14. Rodríguez-Martínez J.A., Fernández-Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation. *International Journal of Engineering Science*. 2015. Vol. 93. P. 31–45. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004>.
15. Zhao Zh., Zhang W., Zhang H., Yuan X. Some interesting nonlinear dynamic behaviors of hyperelastic spherical membranes subjected to dynamic loads. *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230. Iss. 8. P. 3003–3018. DOI: 10.1007/s00707-019-02467-y.
16. Shahinpoor M., Balakrishnan R. Large amplitude oscillations of thick hyperelastic cylindrical shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1978. Vol. 13. Iss. 5-6. P. 295–301. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(78\)90035-5](https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90035-5).
17. Wang A.S.D., Ertepinar A. Stability and vibrations of elastic thick-walled cylindrical and spherical shells subjected to pressure. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1972. Vol. 7. Iss. 5. P. 539–555. DOI: 10.1016/0020-7462(72)90043-1.
18. Akyüz U., Ertepinar A. Stability and asymmetric vibrations of pressurized compressible hyperelastic cylindrical shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1999. Vol. 34. Iss. 3. P. 391–404. DOI: 10.1016/S0020-7462(98)00015-8.
19. Zhu Y., Luo X.Y., Wang H.M., Ogden R.W., Berry C. Three-dimensional nonlinear buckling of thick-walled elastic tubes under pressure. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2013. Vol. 48. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2012.06.013.
20. Коровайцева Е.А. Смешанные уравнения теории мягких оболочек. *Труды МАИ*. 2019. №108. С. 1–17. <https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1>.
21. Houbolt J.C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of Aeronautical Science*. 1950. Vol. 17. No 9. P. 540–550. <https://doi.org/10.2514/8.1722>.
22. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений. *ДАН СССР*. 1953. Т. 88. №4. С. 601–602.

23. Коровайцева Е.А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях. *Труды МАИ*. 2020. № 114. С. 1–27. DOI: 10.34759/trd-2020-114-04.

24. Шалашилин В.И., Григолюк Э.И. *Проблемы нелинейного деформирования*. М.: Наука, 1988. 232 с.

References

1. Druz B.I., Druz I.B. *Teoriya myagkikh obolochek [Theory of Soft Shells]*. Vladivostok: MGU Publ. 2003. 381 p. (In Russian).

2. Ridel V.V., Gulin B.V. *Dinamika myagkikh obolochek [Dynamics of Soft Shells]*. Moscow: Nauka Publ. 1990. 204 p. (In Russian).

3. Gimadiev R.Sh. *Dinamika myagkikh obolochek parashyutnogo tipa [Dynamics of Soft Shells of Parachute Type]*. Kazan: KDEU Publ. 2006. 208 p. (In Russian).

4. Lyalin V.V., Morozov V.I., Ponomarev A.T. *Parashyutnye sistemy. Problemy i metody ikh resheniya [Parachute Systems. Problems and Methods of their Solution]*. Moscow: Fizmatlit Publ. 2009. 576 p. (In Russian).

5. Kolpak E.P. *Ustoichivost' bezmomentnykh obolochek pri bolshikh deformatsiyakh [Stability of Momentless Shells at Large Strains]*. Saint Petersburg: St. Petersburg University Publ. 2000. 248 p. (In Russian).

6. Knowles J.K. On a class of oscillations in the finite deformation theory of elasticity. *J. Appl. Mech.-T ASME*. 1962. Vol. 29. Iss. 2. P. 283–286. <https://doi.org/10.1115/1.3640542>.

7. Akkas N. On the dynamic snap-out instability of inflated non-linear spherical membranes. *Int. J. Non-Lin. Mech.* 1978. Vol. 13. Iss. 3. P. 177–183. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(78\)90006-9](https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90006-9).

8. Calderer C. The dynamical behavior of nonlinear elastic spherical shells. *J. Elasticity*. 1983. Vol. 13. Iss. 1. P. 17–47. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01291025>.

9. Verron E., Khayat R.E., Dourdour A., Peseux B. Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes. *J. Rheol.* 1999. Vol. 43. No 5. P. 1083–1097. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006758>.

10. Yuan X., Zhang R., Zhang H. Controllability conditions of finite oscillations of hyperelastic cylindrical tubes composed of a class of Ogden material models. *Comput. Mater. Con.* 2008. Vol. 7. No 3. P. 155–166. DOI: 10.3970/cm.2008.007.155.

11. Ren J.-S. Dynamical response of hyper-elastic cylindrical shells under periodic load. *Appl. Math. Mech.* 2008. Vol. 29. No 10. P. 1319–1327. DOI: 10.1007/s10483-008-1007-x.

12. Ren J.-S. Dynamics and destruction of internally pressurized incompressible hyper-elastic spherical shells. *Int. J. Eng. Sci.* 2009. Vol. 47. Iss. 7-8. P. 745–753. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2009.02.001>.

13. Ju Y., Niu D. On a class of differential equations of motion of hyperelastic spherical membranes. *Appl. Math. Sciences*. 2012. Vol. 6. No 83. P. 4133–4136.

14. Rodriguez-Martinez J.A., Fernández-Sáez J., Zaera R. The role of constitutive relation in the stability of hyper-elastic spherical membranes subjected to dynamic inflation. *Int. J. Eng. Sci.* 2015. Vol. 93. P. 31–45. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.04.004>.

15. Zhao Zh., Zhang W., Zhang H., Yuan X. Some interesting nonlinear dynamic behaviors of hyperelastic spherical membranes subjected to dynamic loads. *Acta Mech.* 2019. Vol. 230. Iss. 8. P. 3003–3018. DOI: 10.1007/s00707-019-02467-y.

16. Shahinpoor M., Balakrishnan R. Large amplitude oscillations of thick hyperelastic cylindrical shells. *Int. J. Non-Lin. Mech.* 1978. Vol. 13. Iss. 5-6. P. 295–301. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(78\)90035-5](https://doi.org/10.1016/0020-7462(78)90035-5).

17. Wang A.S.D., Ertepinar A. Stability and vibrations of elastic thick-walled cylindrical and spherical shells subjected to pressure. *Int. J. Non-Lin. Mech.* 1972. Vol. 7. Iss. 5. P. 539–555. DOI: 10.1016/0020-7462(72)90043-1.

18. Akyüz U., Ertepinar A. Stability and asymmetric vibrations of pressurized compressible hyperelastic cylindrical shells. *Int. J. Non-Lin. Mech.* 1999. Vol. 34. Iss. 3. P. 391–404. DOI: 10.1016/S0020-7462(98)00015-8.

19. Zhu Y., Luo X.Y., Wang H.M., Ogden R.W., Berry C. Three-dimensional nonlinear buckling of thick-walled elastic tubes under pressure. *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2013. Vol. 48. P. 1–14. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2012.06.013.

20. Korovaytseva E.A. Smeshannye uravneniya teorii myagkikh obolochek [Combined equations of theory of soft shells]. *Trudy MAI*. 2019. Vol. 108. P. 1–17. <https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-1>. (In Russian).

21. Houbolt J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of Aeronautical Science*. 1950. Vol. 17. P. 540–550.

22. Davidenko D.F. Ob odnom novom metode chislennogo resheniya sistem nelineynykh uravneniy [On a new method of nonlinear equations systems numerical solution]. *Doklady Akademii nauk SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Science]*. 1953. Vol. 88. No 4. P. 601–602 (In Russian).

23. Korovaytseva E.A. O nekotorykh osobennostyakh resheniya zadach statiki myagkikh obolochek vrascheniya pri bolshikh deformatsiyakh [On some features of soft shells of revolution static problems solution at large deformations]. *Trudy MAI*. 2020. Vol. 114. P. 1–27 DOI: 10.34759/trd-2020-114-04 (In Russian).

24. Shalashilin V.I., Grigolyuk E.I. *Problemy nelinejnogo deformirovaniya [Problems of Nonlinear Deforming]*. Moscow. Nauka Publ. 1988. 232 p. (In Russian).

INVESTIGATION OF HYPERELASTIC SOFT SHELLS NONSTATIONARY DYNAMICS PROBLEMS SOLUTION FEATURES

Korovaytseva E.A.

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Results of hyperelastic soft shells nonlinear axisymmetric dynamic deforming problems solution algorithm testing are represented in the work. Equations of motion are given in vector-matrix form. For the nonlinear initial-boundary value problem solution an algorithm which lies in reduction of the system of partial differential equations of motion to the system of ordinary differential equations with the help of lines method is developed. At this finite-difference approximation of partial time derivatives is used. The system of ordinary differential equations obtained as a result of this approximation is solved using parameter differentiation method at each time step. The algorithm testing results are represented for the case of pressure uniformly distributed along the meridian of the shell and linearly increasing in time. Three types of elastic potential characterizing shell material are considered: Neo-hookean, Mooney – Rivlin and Yeoh. Features of numerical realization of the algorithm used are pointed out. These features are connected both with the properties of soft shells deforming equations system and with the features of the algorithm itself. The results are compared with analytical solution of the problem considered. Solution behavior at critical pressure value is investigated. Formulations and conclusions given in analytical studies of the problem are clarified. Applicability of the used algorithm to solution of the problems of soft shells dynamic deforming in the range of displacements several times greater than initial dimensions of the shell and deformations much greater than unity is shown.

The numerical solution of the initial boundary value problem of nonstationary dynamic deformation of the soft shell is obtained without assumptions about the limitation of displacements and deformations. The results of the calculations are in good agreement with the results of analytical studies of the test problem.

Keywords: soft shell, hyperelastic material, nonstationary dynamics.