УДК 539.3

О КОЛЕБАНИЯХ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ*)

Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян

Ереван (*Армения*)

Исследован вопрос существования собственных колебаний тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными краями. С использованием системы уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек получены дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для нахождения собственных частот возможных типов колебаний для цилиндрической оболочки открытого профиля при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих. Приводится механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы колебаний. На примерах ортотропных цилиндрических оболочек с разными длинами приведены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответствующих форм колебаний.

Введение

Известно, что у свободного края полубесконечной ортотропной пластинки независимо друг от друга существуют планарные и изгибные волны. При искривлении пластинки два указанных типа движения оказываются связанными, давая начало двум новым типам локализованных у кромки волн (преимущественно тангенциальных и преимущественно изгибных). У свободного торца тонкой упругой цилиндрической оболочки происходят трансформации одного типа волнового движения в другой [1–3]. При этой трансформации волн с учетом геометрических и механических параметров оболочки возникают сложные картины распределения частот собственных колебаний цилиндрических оболочек со свободными краями. В настоящей работе получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний для круговой ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными краями при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих.

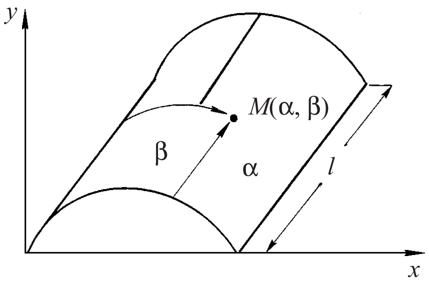
Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. Доказывается также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным краем при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образу-

*) Доклад на IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Н. Новгород, 22–28 августа 2006 г.)

ющих. На примере цилиндрических оболочек показана картина распределения собственных частот и коэффициентов затухания от геометрии оболочек и механических свойств материалов [4,5]. Используя полученные дисперсионные уравнения и асимптотические формулы этих дисперсионных уравнений, можно, меняя геометрию оболочек и механические свойства материала, управлять спектром, смещая или начало спектра, или точки сгущения из нежелательной области резонанса [6,7].

1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматриваются свободные колебания круговой ортотропной тонкой упругой



цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными краями при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих. Предполагается, что образующие ортогональны краям оболочки. Введем на срединной поверхности оболочки криволинейные координаты (α, β), где α $(0 \le \alpha \le l)$ и β $(0 \le \beta \le s)$ являются соответственно переменной длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности; l – длина цилиндра, а s – длина направляющей.

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записываются в выбранных криволинейных координатах α, β [8]:

$$-B_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha^2}-B_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial\beta^2}-(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha}=\lambda u_1,$$

$$-(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta}-B_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}-B_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}+\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial u_3}{\partial\beta}-\frac{\mu^4}{R^2}\left(4B_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}+\right.$$

$$\left.+B_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}\right)-\frac{\mu^4}{R}\left(B_{22}\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta^3}+(B_{12}+4B_{66})\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta\partial\alpha^2}\right)=\lambda u_2, \qquad (1.1)$$

$$\mu^4\left(B_{11}\frac{\partial^4 u_3}{\partial\alpha^4}+2(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^4 u_3}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+B_{22}\frac{\partial^4 u_3}{\partial\beta^4}\right)+\frac{\mu^4}{R}\left(B_{22}\frac{\partial^3 u_2}{\partial\beta^3}+\right.$$

$$\left.+(B_{12}+4B_{66})\frac{\partial^3 u_2}{\partial\beta\partial\alpha^2}\right)-\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}-\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}+\frac{B_{22}}{R^2}u_3=\lambda u_3.$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки; R – радиус направляющей окружности срединной поверхности; $\mu^4 = h^2/12$ (h – толщина оболочки); $\lambda = \omega^2\rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний, ρ – плотность материала; B_{ij} – коэффициенты упругости [8]. Граничные условия имеют вид [8]:

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}}{B_{11}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=0,l}=0, \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_1}{\partial\beta}+\frac{4\mu^4}{R}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}\right)\right|_{\alpha=0,l}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2}+\frac{B_{12}}{B_{11}}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}\right)\right|_{\alpha=0,l}=0,$$

$$\left.\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha^3}+\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}}\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial\alpha\partial\beta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\right|_{\alpha=0,l}=0, \qquad (1.2)$$

$$\left.\frac{B_{12}}{B_{22}}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{u_3}{R}\right|_{\beta=0,s}=u_1|_{\beta=0,s}=0,$$

$$\left.\frac{B_{12}}{B_{22}}\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}\right|_{\beta=0,s}=u_3|_{\beta=0,s}=0, \qquad (1.3)$$

где соотношения (1.2) являются условиями свободного края при $\alpha=0$ и $\alpha=l$, а соотношения (1.3) – условиями шарнирного закрепления по образующим $\beta=0$, $\beta=s$. Можно доказать, что задача (1.1)–(1.3) самосопряженная и имеет неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$ ([9], с. 362).

2. Дисперсионные уравнения и асимптотические формулы

В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1) спектральный параметр λ формально заменим на λ_1, λ_2, λ_3 соответственно. Пусть $R^{-1}=kr_0/2$, где $k=\pi/s$, а r_0 – безразмерный параметр. Решение системы (1.1) ищем в виде:

$$(u_1,u_2,u_3)=(u_{sm}\sin km\beta, v_{cm}\cos km\beta,\ \sin km\beta)\ \exp(k\chi\alpha). \qquad (2.1)$$

Здесь m – волновое число; u_{sm}, v_{sm} – неопределенные коэффициенты; χ – неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (1.3) выполняются автоматически. Подставим (2.1) в (1.1). Из первых двух уравнений системы (1.1) получим:

$$\left(c_m+\frac{r_0^2}{4}a^2 g_m d_m\right)u_{sm}=\frac{r_0\chi}{2}\left\{a_m-a^2m^2\frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{22}}l_m+\frac{r_0^2}{4}a^2\frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}}d_m\right\},$$

$$\left(c_m+\frac{r_0^2}{4}a^2 g_m d_m\right)v_{cm}=\frac{r_0 m}{2}\{b_m-a^2 g_m l_m\},$$

$$c_m=\chi^4+\frac{B_{22}}{B_{11}}m^4-\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}\chi^2m^2+\left(\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_1^2+\eta_2^2\right)\chi^2-$$

$$-\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2+\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_2^2\right)m^2+\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_1^2\eta_2^2,\qquad a_m=\frac{B_{12}}{B_{11}}\chi^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2+\frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_2^2, \qquad (2.2)$$

$$b_m=\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}\chi^2-\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2,$$

$$l_m=\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\chi^2-m^2,\quad d_m=\frac{4B_{66}}{B_{11}}\chi^2-m^2,\ a^2=\mu^4k^2,$$

$$g_m=\frac{B_{22}}{B_{66}}\chi^2-\frac{B_{22}}{B_{11}}m^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2,\quad \eta_1^2=\frac{\lambda_1}{B_{66}k^2},\quad \eta_2^2=\frac{\lambda_2}{B_{66}k^2}.$$

Из третьего уравнения системы (1.1), учитывая соотношения (2.2), получим уравнение [3]:

$$R_{mm}c_m+\frac{r_0^2}{4}\left\{c_m+m^2b_m-\frac{B_{12}}{B_{22}}\chi^2a_m+a^2(R_{mm}g_md_m-2m^2l_mb_m)+\right.$$

$$\left.+\frac{r_0^2}{4}a^2d_m\left(b_m+\frac{B_{12}}{B_{11}}\chi^2\right)+a^4m^2g_ml_m^2\right\}=0, \tag{2.3}$$

$$R_{mm}=a^2\left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\chi^4-\frac{2(B_{12}+2B_{66})m^2}{B_{22}}\chi^2+m^4\right)-\frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_3^2,\quad \eta_3^2=\frac{\lambda_3}{B_{66}k^2}. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.3) является характеристическим уравнением системы (1.1) и представляется многочленом четвертой степени относительно χ^2. Предположим, что χ_j, $j=\overline{1,4}$, являются попарно различными нулями уравнения (2.3) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_5=-\chi_1$, $\chi_6=-\chi_2$, $\chi_7=-\chi_3$, $\chi_8=-\chi_4$ также являются попарно различными нулями уравнения (2.3). Пусть $(u_1^{(j)},u_2^{(j)},u_3^{(j)})$, $j=\overline{1,8}$, – нетривиальные решения вида (2.1) системы (1.1) при $\chi=\chi_j$, $j=\overline{1,8}$, соответственно. Учитывая граничные условия (1.2) и редставляя решение задачи (1.1), (1.3) в виде $u_i=\sum_{j=1}^{8}w_ju_i^{(j)}, i=\overline{1,3}$, и , получим систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{M_{ij}^{(m)}w_j}{c_m^{(j)}+0{,}25a^2r_0^2g_m^{(j)}d_m^{(j)}}=0,\quad i=\overline{1,8}, \tag{2.5}$$

$$M_{1j}^{(m)}=\chi_j^2a_m^{(j)}-\frac{B_{12}}{B_{11}}m^2b_m^{(j)}-\frac{B_{12}}{B_{11}}c_m^{(j)}+\frac{r_0^2}{4}a^2\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}^2}d_m^{(j)}(m^2-\eta_1^2)-$$

$$-a^2m^2\frac{B_{22}}{B_{11}}l_m^{(j)}\left(\chi_j^2+\frac{B_{12}}{B_{11}}m^2-\frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_1^2\right),$$

$$M_{2j}^{(m)}=m\chi_j\left\{a_m^{(j)}+b_m^{(j)}+a^2\left[4c_m^{(j)}-l_m^{(j)}\left(\frac{B_{22}}{B_{66}}\chi_j^2+\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}}m^2+\frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2\right)\right]+\right.$$

$$\left.+a^2\frac{r_0^2}{4}\left(4b_m^{(j)}+\frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}}d_m^{(j)}-4a^2\frac{B_{12}}{B_{22}}\chi_j^2g_m^{(j)}\right)\right\},$$

$$M_{3j}^{(m)}=\left(\chi_j^2-\frac{B_{12}}{B_{11}}m^2\right)c_m^{(j)}+$$

$$+\frac{r_0^2}{4}\left[a^2\chi_j^2g_m^{(j)}\left(\frac{4B_{66}}{B_{22}}\chi_j^2-\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}B_{22}}m^2\right)-\frac{B_{12}}{B_{11}}m^2b_m^{(j)}\right],$$

$$M_{4j}^{(m)}=\chi_j\left\{\left(\chi_j^2-\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}}m^2\right)c_m^{(j)}+\frac{r_0^2}{4}\left[a^2\chi_j^2g_m^{(j)}\left(\chi_j^2-\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}}m^2\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}}m^2b_m^{(j)}+a^2m^2\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}}g_m^{(j)}l_m^{(j)}\right]\right\},\quad M_{5j}^{(m)}=M_{1j}^{(m)}\exp(z_j),$$

$$M_{6j}^{(m)} = M_{2j}^{(m)} \exp(z_j), \quad M_{7j}^{(m)} = M_{3j}^{(m)} \exp(z_j), \quad M_{8j}^{(m)} = M_{4j}^{(m)} \exp(z_j),$$

$$z_j = k\chi_j l, \quad j = \overline{1,8}. \tag{2.6}$$

Индекс j означает, что соответствующая функция взята при $\chi = \chi_j$, $j = \overline{1,8}$.

Чтобы система (2.5) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно

$$\mathrm{Det}\left\| M_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^{8} = 0. \tag{2.7}$$

Сделав элементарные действия над столбцами определителя (2.7), получим

$$\mathrm{Det}\left\| M_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^{8} = m^{42} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4)\, \mathrm{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8}, \tag{2.8}$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4), \tag{2.9}$$

а выражения для m_{ij} можно получить после несложных вычислений.

Уравнение (2.7) эквивалентно уравнению

$$\mathrm{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = 0. \tag{2.10}$$

С учетом возможных соотношений между λ_1, λ_2 и λ_3 уравнение (2.10) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

Пусть $\eta_1^2 = \eta_2^2 = \eta_3^2 = \eta^2 = \lambda/(B_{66}k^2)$ и $\varepsilon_m = r_0/(2m) \to 0$. Тогда уравнение (2.3) преобразуется в совокупность уравнений:

$$c_m = \chi^4 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m^4 - \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}} \chi^2 m^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 - \\ - \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 m^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^4 = 0, \tag{2.11}$$

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})m^2}{B_{22}} \chi^2 + m^4 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 = 0. \tag{2.12}$$

Уравнения (2.11), (2.12) являются характеристическими уравнениями соответственно для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины [3]; χ/m-корни уравнений (2.11) и (2.12) с неположительными действительными частями обозначим соответственно через y_1, y_2 и y_3, y_4. Можно доказать, что уравнение (2.10) приводится к виду:

$$\mathrm{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = N^2(\eta_m) K_3^2(\eta_m) \overline{F}(\eta_m) \overline{E}(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) = 0, \tag{2.13}$$

$$N(\eta_m) = (y_3 + y_1)(y_3 + y_2)(y_4 + y_1)(y_4 + y_2),$$

$$K_3(\eta_m) = N_1(\eta_m) + a^2 m^2 N_2(\eta_m) + a^4 m^4 N_3(\eta_m),$$

$$N_1(\eta_m) = \frac{B_{22}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{66}B_{22} - B_{66}B_{12})}{B_{11}^3} \eta_m^2,$$

$$N_2(\eta_m) = -\frac{2B_{22}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} - \frac{1}{B_{66}B_{11}^3} (B_{11}B_{22}B_{12}^2 - B_{12}^4 + 2B_{11}B_{22}B_{12}B_{66} -$$

$$-6B_{12}^3B_{66}-10B_{12}^2B_{66}^2-2B_{22}B_{66}B_{12}^2-8B_{12}B_{22}B_{66}^2-8B_{12}B_{66}^3-4B_{11}B_{22}B_{66}^2-$$

$$-4B_{22}B_{66}^3)\eta_m^2+\frac{(B_{12}+4B_{66})(B_{11}-B_{66})B_{12}}{B_{11}^3}\eta_m^4,$$

$$N_3(\eta_m)=\frac{B_{22}^2(B_{12}+B_{66})}{B_{11}^2B_{66}}\left\{\frac{(B_{12}+4B_{66})^2}{B_{11}B_{22}}-\right.$$

$$-\frac{(B_{12}+4B_{66})(B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66})}{B_{11}B_{22}B_{66}}+1-$$

$$-\frac{(B_{12}+4B_{66})(B_{12}B_{22}+B_{12}B_{66}+3B_{22}B_{66}+4B_{66}^2-B_{11}B_{22})}{B_{11}B_{22}^2}\eta_m^2+$$

$$\left.+\frac{(B_{12}+4B_{66})^2B_{66}}{B_{11}B_{22}^2}\eta_m^4\right\},$$

$$\overline{E}(\eta_m)=K_2^2(\eta_m)\big(1+\exp(2(z_1+z_2))\big)+\frac{8B_{11}^2m_{11}m_{12}m_{21}m_{22}}{(B_{12}+B_{66})^2}\exp(z_1+z_2)-$$

$$-\frac{B_{11}^2(m_{11}m_{22}+m_{21}m_{12})^2}{(B_{12}+B_{66})^2}(\exp(2z_1)+\exp(2z_2))-$$

$$-\frac{4B_{11}^2[m_{11}m_{21}(m_{11}m_{22}+m_{21}m_{12})}{(B_{12}+B_{66})^2}(\exp(z_2)-\exp(z_1))[z_1z_2]-$$

$$-4\frac{B_{11}^2m_{11}^2m_{21}^2}{(B_{12}+B_{66})^2}[z_1z_2]^2,\ m_{11}=R_{11}^{(m)},\quad m_{22}=y_1y_2+\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}-\eta_m^2,$$

$$m_{12}=y_1+y_2,\quad m_{21}=R_{21}^{(m)},\quad \eta_m=\eta/m,$$

$$\overline{F}(\eta_m)=K_1^2(\eta_m)\big(1+\exp(2(z_3+z_4))\big)+8m_{33}m_{34}m_{43}m_{44}\exp(z_3+z_4)-$$

$$-(m_{33}m_{44}+m_{43}m_{34})^2(\exp(2z_3)+\exp(2z_4))-$$

$$-4m_{33}m_{43}(m_{33}m_{44}+m_{34}m_{43})(\exp(z_4)-\exp(z_3))[z_3z_4]-4m_{33}^2m_{43}^2[z_3z_4]^2,$$

$$[z_iz_j]=\frac{\exp(z_j)-\exp(z_i)}{z_j-z_i}kml,\quad m_{33}=y_3^2-\frac{B_{12}}{B_{11}},$$

$$m_{34}=y_3+y_4,\quad m_{43}=y_3^3-\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{11}}y_3,\quad m_{44}=y_3y_4+\frac{B_{12}}{B_{11}},\quad m=\overline{1,+\infty}. \tag{2.14}$$

Из (2.13) следует, что при $\varepsilon_m\to 0$ уравнения (2.7) и (2.10) распадаются на уравнения

$$\overline{E}(\eta_m)=0, \tag{2.15}$$

$$\overline{F}(\eta_m)=0, \tag{2.16}$$

$$K_3(\eta_m)=0. \tag{2.17}$$

Уравнения (2.15), (2.16) являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных колебаний аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки, а уравнение (2.17) появляются из-за того, что используется система уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек. Корни уравнения (2.17) являются приближенными значениями безразмерной характеристики собственных частот нового типа колебаний в цилиндрической оболочке, обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции.

Если y_1, y_2 и y_3, y_4 являются χ/m-корнями уравнения (2.11), (2.12) с отрицательными действительными частями соответственно, то при $ml \to \infty$ уравнения (2.15), (2.16) преобразуются к виду

$$K_2(\eta_m) = 0, \quad K_1(\eta_m) = 0, \tag{2.18}$$

а уравнение (2.13) преобразуется к виду

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = N^2(\eta_m)K_1^2(\eta_m)K_2^2(\eta_m)K_3^2(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^{4} O(\exp(z_j)) = 0. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что при $\varepsilon_m \to 0$ и $ml \to \infty$ дисперсионное уравнение (2.10) распадается на уравнения:

$$K_1(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 + 4\frac{B_{66}}{B_{11}} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}}\right)^2 = 0, \tag{2.20}$$

$$K_2(\eta_m) = (1-\eta_m^2)\left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \eta_m^2\right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0, \tag{2.21}$$

$$K_3(\eta_m) = N_1(\eta_m) + a^2 m^2 N_2(\eta_m) + a^4 m^4 N_3(\eta_m) = 0. \tag{2.22}$$

Уравнения (2.20) и (2.21) являются дисперсионными уравнениями соответственно изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным торцом при наличи шарнирного закрепления Навье на боковых краях [3]. Исходя из теоремы Руше, можно утверждать, что при малых ε_m и больших ml приближенные значения корней уравнения (2.10) с учетом кратности являются корнями уравнения (2.20)–(2.22).

Пусть χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (2.3)) имеют отрицательные действительные части и $ml \to \infty$. Тогда уравнение (2.10) при $ml \to \infty$ можно привести к виду:

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = \left(\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}\right)^2 + \sum_{j=1}^{4} O(\exp(k\chi_j l)) = 0. \tag{2.23}$$

Из (2.23) следует, что при $ml \to \infty$ уравнение (2.10) преобразуется к виду

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4} = 0. \tag{2.24}$$

Уравнение (2.24) определяет всевозможные локализованные собственные колебания у свободного торца полубесконечной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих. Заметим, что при $\varepsilon_m \to 0$ имеем [3]:

$$\mathrm{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{4} = N(\eta_m)\left\{ K_1(\eta_m) K_2(\eta_m) K_3(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) \right\}. \tag{2.25}$$

Учитывая представления (2.23) и (2.25), еще раз убеждаемся, что дисперсионное уравнение (2.10) можно записать в виде (2.19).

В случае изотропной цилиндрической оболочки имеем значения:

$$B_{11} = B_{22} = \frac{E}{1-\sigma^2}, \quad B_{12} = \frac{\sigma E}{1-\sigma^2}, \quad B_{66} = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \tag{2.26}$$

где σ – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга [8].

В табл. 1 приведены приближенные значения некоторых η_m-корней уравнения (2.15) и (2.16) для стеклопластика с параметрами [4]: $\rho = 2{,}4 \cdot 9{,}8 \cdot 10^3$ кг/м³, $E_1 = 6{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 10^9$ Н/м², $E_2 = 1{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 10^9$ Н/м², $G = 0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 10^9$ Н/м², $\nu_1 = 0{,}26$, $\nu_2 = 0{,}06$ при $h = 1/50$, $k = 0{,}7851$, $l = 15$, $l = 5$. Отметим, что модули упругости E_1 и E_2 соответствуют направлениям вдоль образующей и направляющей соответственно. Численный анализ показывает, что у свободных краев прямоугольной пластинки, когда боковые края шарнирно закреплены, могут появиться локализованные колебания. В зависимости от геометрических и механических свойств материала пластинки колебательные движения у свободных краев могут разделяться, а при $ml \to \infty$ частоты локализованных колебаний у свободных краев прямоугольной пластинки стремятся к частотам полубесконечной пластинки-полосы со свободным краем.

Таблица 1

m	$\bar{E}(\eta_m) = 0$		$\bar{F}(\eta_m) = 0$		m	$\bar{E}(\eta_m) = 0$		$\bar{F}(\eta_m) = 0$	
	$l = 15$	$l = 5$	$l = 15$	$l = 5$		$l = 15$	$l = 5$	$l = 15$	$l = 5$
1	0,93739	0,81821	0,00791	0,00790	20	–	0,98317	0,15821	0,15822
2	0,96515	0,90854	0,01582	0,01582	29	0,98213	0,98199	0,22941	0,22941
3	0,97379	0,93739	0,02373	0,02373		–	0,98227	–	0,22942
9	0,98192	0,97379	0,07120	0,07119	30	0,98213	0,98203	0,23732	0,93732
	0.98235	–	–	–		–	0,98224	–	0,23733
10	0,98203	0,97541	0,07911	0,07911	60	0,98213	0,98212	0,47464	0,47464
	0,98224	0,99607	–	–		–	0,98223	–	0,47465
11	0,98207	0,97667	0,08701	0,08701	100	0,98213	0,98213	0,79107	0,79107
	0,98219	0,99247	0,08702	0,08704	110	0,98213	0,98213	0,87018	0,87018
15	0,98212	0,97971	0,08701	0,08701	120	0,98213	0,98213	0,94929	0,94929
	0,98214	0,98563	0,11866	0,11865	125	0,98213	0,98213	0,98884	0,98884
20	0,98213	0,98125	0,15821	0,15820	130	0,98213	0,98213	1,02839	1,02839

В табл. 2 и 3 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений η/m и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм $k\chi_0/m$ задачи (1.1)–(1.3) для ортотропных цилиндрических оболочек открытого профиля, изготовленных из стеклопластика с указанными выше механическими и следующими геометрическими параметрами: $R = 40$, $r_0 = 0{,}0637$, $k = 0{,}7851$, $h = 1/50$, $b = 4$ (b – расстояние между граничными образующими) при $l = 15$ и $l = 5$ соответственно. В качестве характеристики коэффициентов затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0/m = \max\left\{ k\,\mathrm{Re}\chi_1/m,\, k\,\mathrm{Re}\chi_2/m,\, k\,\mathrm{Re}\chi_3/m,\, k\,\mathrm{Re}\chi_4/m \right\}. \tag{2.27}$$

Таблица 2

m	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$		$\eta_1 = \eta_2 = 0;\ \eta_3 = \eta$		$\eta_1 = \eta_2 = \eta;\ \eta_3 = 0$		$\eta_2 = \eta_3 = \eta;\ \eta_1 = 0$	
	$k\chi_0/m$	η/m	$k\chi_0/m$	η/m	$k\chi_0/m$	η/m	$k\chi_0/m$	η/m
1	–0,0350 и	0,00789	–0,0494 и	0,00789	–0,0322 п	0,24544	–0,0349 и	0,00789
	–	–	–	–	–0,0049 п	0,24572	–	–
2	–0,0293 и	0,01580	–0,0307 и	0,01581	–0,0331 п	0,83228	–0,0293 и	0,01580
	–	–	–	–	–0,0654 п	0,84108	–	–
3	–0,0266 и	0,02371	–0,0273 и	0,02372	–0,0633 п	0,96435	–0,0266 и	0,02371
	–	–	–	–	–0,0411 п	0,98520	–	–
9	–0,0183 и	0,07118	–0,0184 и	0,07118	–0,0437 п	0,98183	–0,0183 и	0,07118
	–	–	–	–	–0,0432 п	0,98224	–	–
10	–0,0181 и	0,07909	–0,0182 и	0,07909	–0,0434 п	0,98202	–0,0181 и	0,07909
	–0,0085 и	0,07912	–0,0038 и	0,08704	–0,0432 п	0,98217	–0,0045 и	0,07913
11	–0,0179 и	0,08701	–0,0151 и	0,08701	–0,0434 п	0,98207	–0,0158 и	0,08701
	–0,0034 и	0,08704	–0,0038 и	0,08704	–0,0433 п	0,98219	–0,0081 и	0,08703
15	–0,0157 и	0,11865	–0,0158 и	0,11865	–0,0433 п	0,98212	–0,0148 и	0,11865
	–0,0116 и	0,11867	–0,0116 и	0,11867	–0,0433 п	0,98214	–0,0123 и	0,11867
20	–0,0142 и	0,15821	–0,0142 и	0,15821	–0,0433 п	0,98213	–0,0142 и	0,15821
	–0,0133 и	0,15822	–0,0132 и	0,15821	–	–	–0,0133 и	0,22941
29	–0,0128 и	0,22941	–0,0139 и	0,22941	–0,0433 п	0,98213	–0,0139 и	0,15821
30	–0,0139 и	0,23732	–0,0139 и	0,23732	–0,0433 п	0,98213	–0,0139 п	0,23732
60	–0,0139 и	0,47464	–0,0139 и	0,47464	–0,0433 п	0,98213	–0,0139 и	0,47464
100	–0,0139 и	0,79107	–0,0139 и	0,79107	–0,0433 п	0,98213	–0,0138 и	0,79107
110	–0,0138 и	0,87018	–0,0138 и	0,87018	–0,0433 п	0,98213	–0,0138 и	0,87018
120	–0,2153 н	0,30080	–	–	–0,2153 н	0,30081	–0,2258 к	0,30052
	–0,0137 и	0,94928	–0,0138 и	0,94929	–0,0433 п	0,98213	–0,0140 и	0,94928
125	–0,1956 н	0,50346	–	–	–0,1956 н	0,50346	–0,2264 к	0,50209
	–0,0433 п	0,98213	–	–	–0,0433 п	0,98213	–	–
	–0,0138 и	0,98884	–0,0138 и	0,98884	–	–	–0,0138 и	0,98884
130	–0,1761 н	0,63097	–	–	–0,1761 н	0,63097	–0,2271 к	0,62910
	–0,0433 п	0,98213	–0,0138 и	1,02839	–0,0433 п	0,98213	–0,0139 и	1,02839

Таблица 3

m	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$		$\eta_1 = \eta_2 = 0;\ \eta_3 = \eta$		$\eta_1 = \eta_2 = \eta;\ \eta_3 = 0$		$\eta_2 = \eta_3 = \eta;\ \eta_1 = 0$	
	$k\chi_0/m$	η/m	$k\chi_0/m$	η/m	$k\chi_0/m$	η/m	$k\chi_0/m$	η/m
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	–0,0549 и	0,00787	–0,0560 и	0,00787	–	–	–0,0549 и	0,00787
2	–0,0478 и	0,01577	–0,0307 и	0,01580	–0,1645 п	0,75507	–0,0496 и	0,01577
3	–0,0431 и	0,02367	–0,0321 и	0,02367	–0,0928 п	0,92027	–0,0431 и	0,02367
9	–0,0267 и	0,07118	–0,0268 и	0,07114	–0,0524 ď	0,97369	–0,0267 и	0,07114
10	–0,0241 и	0,07906	–0,0259 и	0,07905	–0,0507 п	0,97534	–0,0241 и	0,70906
	–	–	–	–	–0,0207 п	0,99596	–	–
11	–0,0235 и	0,08697	–0,0252 и	0,08696	–0,0494 п	0,97663	–0,0235 и	0,08697
	–	–	–	–	–0,0283 п	0,99240	–	–
15	–0,0218 и	0,11861	–0,0219 и	0,11861	–0,0461 п	0,97970	–0,0204 и	0,11863
	–	–	–	–	–0,0388 п	0,98563	–	–

Таблица 3 (продолжение)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	−0,0194 и	0,15817	−0,0277 и	0,15808	−0,0443 п	0,98125	−0,0183 и	0,15818
	–	–	–	–	−0,0420 п	0,98317	–	–
29	−0,0158 и	0,22939	−0,0167 и	0,22939	−0,0434 п	0,98199	−0,0167 и	0,22938
	−0,0021 и	0,22947	−0,0022 и	0,22947	−0,0431 d’	0,98227	−0,0021 и	0,22947
30	−0,0164 и	0,23729	−0,0167 и	0,23729	−0,0434 п	0,98203	−0,0167 и	0,23729
	−0,0049 и	0,23738	−0,0049 и	0,23738	−0,0431 п	0,98224	−0,0149 и	0,23738
60	−0,0142 и	0,47463	−0,0142 и	0,47464	−0,0433 п	0,98212	−0,0142 и	0,47464
	−0,0133 и	0,47465	−0,0133 и	0,47465	−0,0433 п	0,98213	−0,0133 и	0,47465
100	−0,0138 и	0,79107	−0,0139 и	0,79107	−0,0433 п	0,98213	−0,0138 и	0,79107
110	−0,0139 и	0,87018	−0,0138 и	0,87018	−0,0433 п	0,98213	−0,0138 и	0,87018
120	−0,2153 н	0,30080	–	–	−0,2153 н	0,30081	−0,2258 к	0,30052
	−0,0138 и	0,94929	−0,0138 и	0,94929	−0,0433 п	0,98213	−0,0138 и	0,94929
125	−0,1956 н	0,50346	–	–	−0,1956 н	0,50347	−0,2264 к	0,50209
	−0,0433 п	0,98213	–	–	−0,0433 п	0,98213	–	–
	−0,0138 и	0,98884	−0,0138 и	0,98884	–	–	−0,0138 и	0,98884
130	−0,1760 н	0,63097	–	–	−0,1760 н	0,63098	−0,2271 к	0,62910
	−0,0433 п	0,98213	−0,0138 и	1,02839	−0,0433 п	0,98213	−0,0139 и	1,02839

В табл. 2 и 3 первые колонки соответствуют задаче (1.1)–(1.3). Вторые колонки – преимущественно изгибному типу колебаний, третьи – преимущественно планарному типу, а четвертые – преимущественно изгибно-крутильному типу. Отметим, что первые частоты собственных колебаний локализованных у свободного края цилиндрических оболочек, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа.

В зависимости от геометрических и механических свойств материала цилиндрической оболочки колебательные движения у свободных краев могут разделяться, а при $ml \to \infty$ частоты локализованных колебаний у свободных краев цилиндрических оболочек открытого профиля при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих стремятся к частотам локализованных колебаний у свободного края полубесконечной цилиндрической оболочки открытого профиля при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих.

При $\varepsilon_m \to 0$ собственные колебания для задачи (1.1)–(1.3) расчленяются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания. При этом частоты такой задачи стремятся к частотам аналогичной задачи для прямоугольной ортотропной пластинки. При увеличении m колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими (в таблицах не приводятся). Безразмерные характеристики η_m собственной частоты квазитангенциальных колебаний стремятся к корню уравнения Рэлея (2.21) (для стеклопластика: $\eta_m^{(2)} \approx 0{,}98213$).

В зависимости от параметра m^2a^2 появляются не более двух новых типов колебаний, характерных только для цилиндрических оболочек, обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции [3, 5]. При преимущественно тангенциального типа колебаниях цилиндрических оболочек ($\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\eta_3 = 0$), кроме планарного колебания “рэлеевского” типа, могут появляться не более чем два новых колебания, также обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции [3, 5].

Преимущественно изгибно-крутильного типа колебания ($\eta_2 = \eta_3 = \eta$, $\eta_1 = 0$) цилиндрических оболочек при достаточно больших m расчленяются на квазипоперечные и преимущественно крутильные типы колебаний. При дальнейшем увеличении m колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими.

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (2.13), (2.19), (2.23) дисперсионного уравнения (2.10) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (1.1)–(1.3).

Замечание. Чтобы различать типы колебаний, в таблицах между характеристиками коэффициентов затухания и собственными частотами, условимся отмечать буквой “и” преимущественно изгибный тип колебаний, “п” – преимущественно планарный тип колебаний, “н” – новый тип колебаний, “к” – преимущественно крутильный тип колебаний.

Литература

1. *Гринченко, В.Т.* Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Киев: Наукова думка, 1981. – 283с.

2. *Гринченко, В.Т.* Эффекты локализации волновых движений в упругих волноводах / В.Т. Гринченко // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, №9. – С. 38–45.

3. *Gulgazaryan, G.R.* Vibrations of a semiinfinite, orthotropic, cylindrical shells of open profile / G.R. Gulgazaryan // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, №2. – P. 199–212.

4. *Гулгазарян, Г.Р.* Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев / Г.Р. Гулгазарян, В.Б. Лидский // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. – №3. – С. 171–174.

5. *Гулгазарян, Г.Р.* О локализованных собственных колебаниях у свободного торца полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки / Г.Р. Гулгазарян // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – №1. – С. 180–192.

6. *Болотин, В.В.* Случайные колебания упругих систем / В.В. Болотин. – М.: Наука, 1979. – 335 с.

7. *Ермоленко, Е.М.* Влияние параметров ортотропии на спектр в задачах колебаний оболочек / Е.М. Ермоленко // ПМТФ. – 1980. – №1. – С. 163–170.

8. *Амбарцумян, С.А.* Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.

9. *Гольденвейзер, А.Л.* Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер, В.Б. Лидский, П.Е. Товстик. – М.: Наука, 1979. – 383 с.

[24.08.2006]

ON THE VIBRATIONS OF A THIN ELASTIC ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH FREE EDGES

G.R. Ghulghazaryan, L.G. Ghulghazaryan

The issue of the existence of natural vibrations of a thin elastic orthotropic circular non-closed cylindrical shell with free edges is studied. Using a system of equations of the related classical theory of orthotropic cylindrical shells, dispersion equations and asymptotic formulas are obtained for determining the natural frequencies of possible vibration types for a cylindrical shell of the open profile having a Navier hinge on the boundary generating lines. An algorithm for subdividing the possible vibration types is presented. Approximate values of a dimensionless characteristic of a natural frequency and the fading characteristics of the related vibration forms are given, exemplified by orthotropic cylindrical shells of various lengths.