

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-1-101-110

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КОНСЕРВАТИВНОГО СГЛАЖИВАНИЯ  
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО РЕШЕНИЯ  
НА ПОДАВЛЕНИЕ МОД НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИИ\***

© 2021 г.

**Кибец А.И., Беженцева М.В.**

*Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

kibec@mech.unn.ru

*Поступила в редакцию 01.12.2020*

Рассматривается задача высокоскоростного проникания недеформируемого цилиндра в стальную пластину. Определяющая система уравнений формулируется в переменных Лагранжа в трехмерной постановке. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей работы. Кинематические соотношения записываются в метрике текущего состояния. В качестве уравнений состояния применяются соотношения теории течения с кинематическим и изотропным упрочнением. Контактное взаимодействие цилиндра и пластины моделируется условиями непроникания. Численное решение задачи при заданных граничных и начальных условиях основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной схеме интегрирования по времени типа «крест». Для дискретизации определяющей системы уравнений по пространственным переменным применяются 8-узловые изопараметрические конечные элементы с полилинейными функциями формы. Для подавления высокочастотных осцилляций численного решения используется процедура консервативного сглаживания узловых скоростей перемещений. Алгоритм сглаживания основан на законе сохранения импульса, ориентирован на конечно-элементные сетки, состоящие из блоков, которые взаимно однозначно отображаются на единичный куб. Для анализа монотонности узловых скоростей перемещений используется расщепление численного решения по направлениям линий конечно-элементной сетки. Как показали результаты численного исследования, конечные элементы пластины в процессе локального интенсивного динамического нагружения претерпевают большие деформации и приобретают углы поворота как жесткого целого. Проведен анализ влияния процедуры консервативного сглаживания на устойчивость численного решения. Показано, что в рассматриваемой задаче без применения процедуры консервативного сглаживания в конечно-элементной сетке пластины в зоне контакта развиваются моды нулевой энергии (неустойчивость типа «песочные часы») и процесс соударения не удастся смоделировать до отскока цилиндра.

*Ключевые слова:* соударение, проникание, пластические деформации, метод конечных элементов, моды нулевой энергии.

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №20-08-00455\_а.

## Введение

В инженерной практике и в научных исследованиях в настоящее время широко применяются программные комплексы, основанные на методе конечных элементов (МКЭ). Подробное описание МКЭ приведено в монографиях [1–13]. Для решения трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических элементов конструкций применяют в большинстве случаев 8-узловой конечный элемент с одноточечным интегрированием по объему и явную конечно-разностную схему интегрирования по времени [1, 2]. Эффективность такого метода снижается из-за двух факторов: а) возможного образования мод нулевой энергии (неустойчивость типа «песочные часы») и б) нефизичных высокочастотных осцилляций численного решения. Для повышения эффективности численного решения в [14–17] разработана применительно к задачам механики деформируемого твердого тела методика консервативного сглаживания узловых скоростей перемещений, в основе которой лежит алгоритм, изложенный в [18].

В настоящей статье проводится компьютерное моделирование больших упругопластических деформаций стальной пластины при высокоскоростном соударении с недеформируемым цилиндром и анализ влияния процедуры консервативного сглаживания узловых скоростей перемещений на устойчивость конечно-элементного решения в условиях локальных интенсивных воздействий. Решение задачи основано на методе конечных элементов и явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест», реализованных в вычислительном комплексе «Динамика-3».

## 1. Определяющая система уравнений

Введем следующие обозначения:  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$  – расчетная область;  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$  – ее граничная поверхность, на которой может действовать распределенная нагрузка или задана скорость перемещения;  $X = [X_1 X_2 X_3]^T$  – неподвижная система ортогональных координат;  $U = [U_1 U_2 U_3]^T$  – перемещения в общей системе координат  $X$ ;  $P = [P_1 P_2 P_3]^T$  – распределенная нагрузка;  $P^q = [P_1^q P_2^q P_3^q]^T$  – контактное давление;  $\Gamma_p, \Gamma_q$  – зоны приложения  $P, P^q$ ;  $\varepsilon = [\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} \varepsilon_{12} \varepsilon_{23} \varepsilon_{31}]^T$ ,  $\sigma = [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{31}]^T$  – тензоры деформаций и напряжений;  $\varepsilon^V, \sigma^V, \varepsilon'_{ij}, \sigma'_{ij}, \varepsilon'^p_{ij}, \varepsilon'^e_{ij}$  – шаровые, девiatorные упругие и пластические составляющие деформаций и напряжений. Точка над переменной – частная производная по времени, Т – операция транспонирования, индекс после запятой – частная производная по соответствующей пространственной переменной, по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Определяющая система уравнений формулируется в переменных Лагранжа [19–21]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i}}{2} \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad X_j = X_j|_{t=0} + \int_0^t \dot{U}_j dt, \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}^V = -3K\dot{\varepsilon}^V, \quad \dot{\varepsilon}^V = \frac{\dot{\varepsilon}'_{11} + \dot{\varepsilon}'_{22} + \dot{\varepsilon}'_{33}}{3}, \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}'_{ij} = \dot{\varepsilon}'^e_{ij} + \dot{\varepsilon}'^p_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}'_{11} + \dot{\varepsilon}'_{22} + \dot{\varepsilon}'_{33} = 0, \quad (3)$$

$$D_j \sigma'_{ij} = 2G\dot{\varepsilon}'^e_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}'^p_{ij} = \lambda S_{ij}, \quad S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}, \quad \dot{\rho}_{ij} = 2g\dot{\varepsilon}'^p_{ij},$$

$$S_{ij}S_{ij} \leq \frac{2}{3}\sigma_T^2, \quad \sigma_T = \sigma_T(\mathbf{x}, \dot{I}_{2\varepsilon}), \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt, \quad \mathbf{x} = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} dt, \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\varepsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma_p} P_i \delta \dot{U}_i d\gamma + \int_{\Gamma_q} P_i^q \delta \dot{U}_i d\gamma \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (5)$$

Здесь  $K$  – коэффициент объемного сжатия;  $G$  – модуль сдвига;  $S_{ij}$  – компоненты тензора активных напряжений;  $\rho_{ij}$  – тензор микронапряжений, определяющий координаты центра поверхности текучести;  $g$  – модуль кинематического упрочнения;  $\mathbf{x}$  – параметр Одквиста. Параметр  $\lambda$  тождественно равен нулю при упругом деформировании и определяется при упругопластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки. Контактное взаимодействие пластины и цилиндра моделируется условиями непроникания по нормали к поверхности контакта и свободного скольжения в касательной плоскости.

## 2. Метод решения

Для решения определяющей системы уравнений (1)–(5) при заданных начальных и граничных условиях применяется моментная схема метода конечных элементов [22–25]. Для дискретизации расчетной области используются 8-узловые конечные элементы (КЭ). В узлах сетки определяются перемещения  $U$ , скорости  $\dot{U}$  и ускорения  $\ddot{U}$  в общей системе координат  $X$ . В каждом элементе вводится локальный прямоугольный базис  $x$ , отслеживающий его вращение как жесткого целого пошаговым пересчетом направляющих косинусов его осей.

Конечный элемент отображается на куб  $-1 \leq \xi_i \leq 1$  ( $i = \overline{1, 3}$ ):

$$x_i = \sum_{k=1}^8 x_i^k N_k(\xi_1 \xi_2 \xi_3), \quad N_k = \frac{(1 + \xi_1/\xi_1^k)(1 + \xi_2/\xi_2^k)(1 + \xi_3/\xi_3^k)}{8}, \quad (6)$$

где  $x_i^k, \xi_i^k$  – координаты узлов в базисах  $\{x\}, \{\xi\}$ .

Для компонент скорости перемещений узлов в локальной системе координат внутри конечного элемента применяется полилинейная аппроксимация

$$\dot{u}_i = \sum_{k=1}^8 \dot{u}_i^k N_k(\xi_1 \xi_2 \xi_3). \quad (7)$$

В соответствии с (7) аппроксимация компонент тензора скорости деформаций осуществляется линейными функциями:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^1 \xi_1 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \xi_2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^3 \xi_3. \quad (8)$$

В (8)  $\dot{\varepsilon}_{ij}^0 = [\dot{\varepsilon}_{11}^0 \ \dot{\varepsilon}_{22}^0 \ \dot{\varepsilon}_{33}^0 \ \dot{\varepsilon}_{12}^0 \ \dot{\varepsilon}_{23}^0 \ \dot{\varepsilon}_{13}^0]^T = \dot{\varepsilon}|_{\xi_1=\xi_2=\xi_3=0}$  – безмоментные составляющие компонент скорости деформаций – значения компонент скорости деформаций в центре КЭ ( $\dot{\varepsilon}_{ik}^0 = \text{const}$ );  $\dot{\varepsilon}_{ij}^1 = [0 \ \dot{\varepsilon}_{22,1} \ \dot{\varepsilon}_{33,1} \ 0 \ \dot{\varepsilon}_{23,1} \ 0]^T$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^2 = [\dot{\varepsilon}_{11,2} \ 0 \ \dot{\varepsilon}_{33,2} \ 0 \ 0 \ \dot{\varepsilon}_{31,2}]^T$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^3 = [\dot{\varepsilon}_{11,3} \ \dot{\varepsilon}_{22,3} \ 0 \ \dot{\varepsilon}_{12,3} \ 0 \ 0]^T$  – моментные составляющие – градиент скорости деформаций в центре КЭ ( $\dot{\varepsilon}_{ik,l} = \partial \dot{\varepsilon}_{ik} / \partial \xi_l = \text{const}$ ). В  $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$  оставлены только компоненты, соответствующие изгибающим и крутящим моментам в теории оболочек, что позволяет избежать сдвигового запирания [12, 13, 23, 24].

Мощность виртуальной работы в каждом КЭ выражается через матрицу масс,

узловые ускорения и узловые силы, статически эквивалентные напряжениям  $\sigma_{ij}$  и давлению в зоне контакта [1, 2, 12, 13, 25]. Интегрирование по области заменяется суммированием по конечным элементам. В результате получается дискретный аналог уравнений движения (5):

$$[M]\{\ddot{U}\} = \{F\}, \quad (9)$$

где  $[M]$  – диагональная матрица масс;  $\{\ddot{U}\}$ ,  $\{F\}$  – векторы ускорений узлов конечно-элементной сетки (КЭ-сетки) и результирующих узловых сил в общей системе координат. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (9) интегрируется по явной конечно-разностной схеме типа «крест». Шаг интегрирования во времени  $\Delta t_{k+1}$  определяется из условия устойчивости Куранта.

Используемая конечно-разностная схема типа «крест» интегрирования по времени, являясь схемой второго порядка точности, не обладает свойством монотонности и на сильных разрывах приводит к значительным осцилляциям численного решения. Одним из способов их подавления является консервативное сглаживание [14–18]. Алгоритм сглаживания основан на законе сохранения импульса, ориентирован на КЭ-сетки, состоящие из блоков, которые взаимно однозначно отображаются на квадрат, и использует расщепление численного решения по направлениям линий КЭ-сетки.

Изложенная методика реализована в рамках вычислительной системы «Динамика-3» [26].

### 3. Результаты численного моделирования

Рассмотрим продольное соударение недеформируемого цилиндра ( $R = 1,275$  см,  $L = 4,7$  см, масса – 187 г) с круглой стальной пластиной ( $R = 13$  см,  $h = 4$  см), жестко заземленной по контуру (рис. 1).

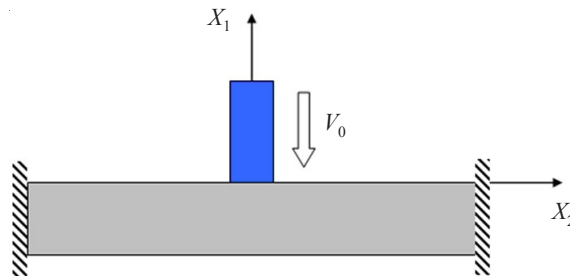


Рис. 1. Расчетная схема

Механические характеристики стали: плотность  $\rho = 7,88$  г/см<sup>3</sup>, модуль объемного сжатия  $K = 166,7$  ГПа, модуль сдвига  $G = 81,4$  ГПа, предел текучести  $\sigma_T = 0,5$  ГПа, модуль изотропного упрочнения  $0,5$  ГПа. В начальный момент времени для цилиндра задавалась продольная скорость  $V_0 = 750$  м/с. В качестве расчетной области рассматривались 1/2 часть цилиндра и пластины ( $X_3 \geq 0$ ), которые разбивались на 960 и 43520 конечных элементов соответственно (рис. 2).

Результаты решения задачи представлены на рис. 3–6. На рисунках изображены КЭ-сетки расчетной области в различные моменты времени, полученные без применения (рис. 3) и с применением процедуры консервативного сглаживания численного решения (рис. 4).

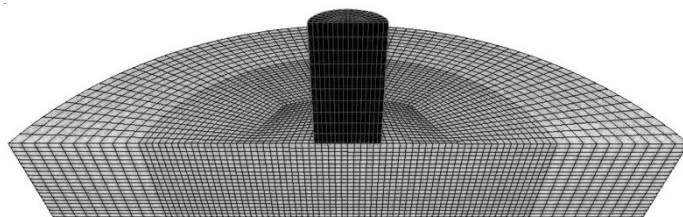


Рис. 2. Конечно-элементная сетка расчетной области в начальный момент времени

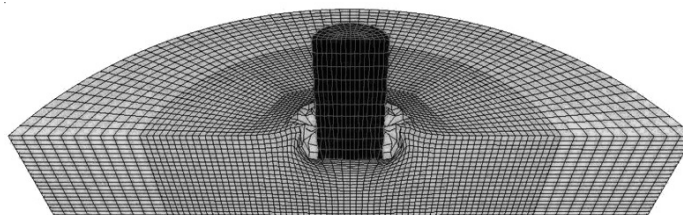


Рис. 3. Конечно-элементная сетка расчетной области при  $t = 0,02$  мс

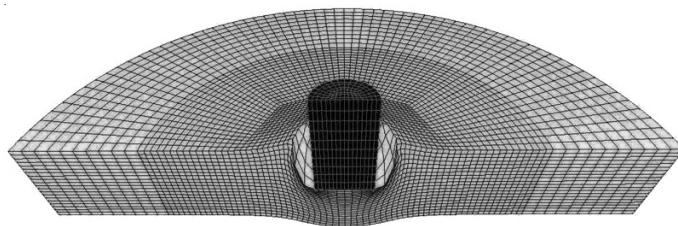


Рис. 4. Конечно-элементная сетка расчетной области при  $t = 0,08$  мс

На рис. 5 приведены увеличенные фрагменты расчетной области в зоне контакта на момент окончания счета: без применения (а) и с применением (б) консервативного сглаживания численного решения.

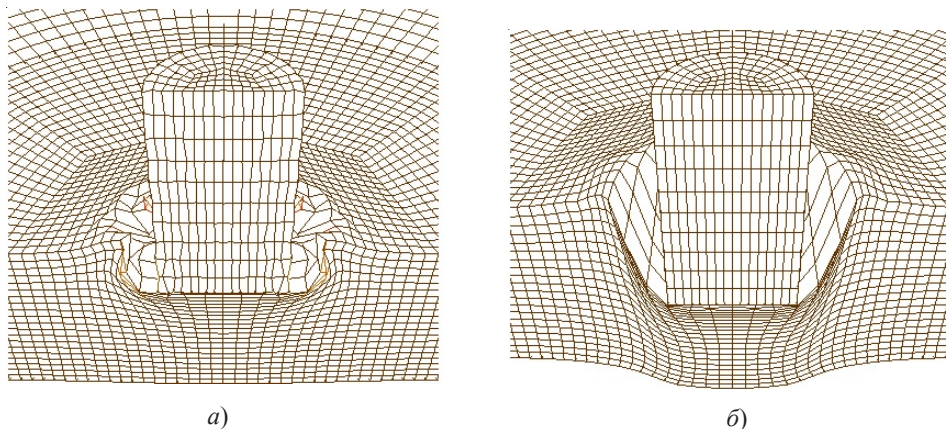


Рис. 5. Увеличенные фрагменты КЭ-сетки расчетной области в зоне контакта

На рис. 6 изображены графики временной зависимости контактной силы. Пунктирной линией на этом рисунке отмечены результаты конечно-элементного реше-

ния задачи без применения, а сплошной линией – с применением консервативного сглаживания.

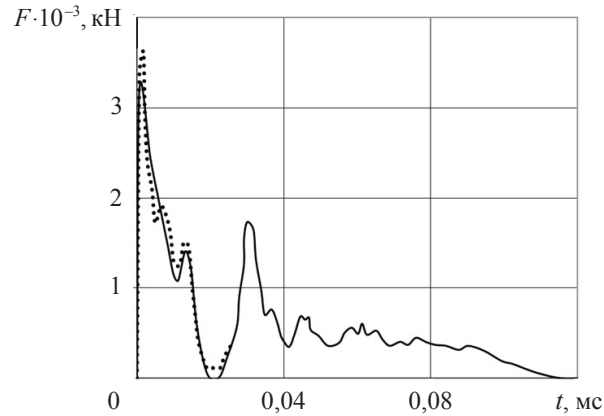


Рис. 6. Зависимость контактной силы от времени

Из анализа результатов расчета следует, что на начальном этапе соударения цилиндра с пластинкой в области, примыкающей к контактному пятну, создается волна сжатия, уровень напряжений в которой превышает предел текучести стали. Волна сжатия, достигнув свободной от нагрузки поверхности, отражается в виде упругой волны разгрузки, которая снижает интенсивность напряжений в зоне сжатия, что вызывает спад контактной силы. Поскольку область взаимодействия цилиндра и пластины локальна, контактная сила вновь нарастает, в дальнейшем ее изменение становится колебательным и определяется взаимодействием волн нагрузки и разгрузки.

В результате соударения в пластине образуются локальные зоны пластических деформаций, достигающие наибольшего значения вблизи края кратера. На тыльной части пластины также возникают зоны интенсивных пластических деформаций. Торможение продольного движения  $u_1$  материала пластины, связанное с радиальными и кольцевыми напряжениями на ее растягиваемой тыльной части, порождает сдвиговые пластические деформации и образует в этой области выпучину.

Многочисленное взаимодействие пластической волны нагрузки с упругими волнами разгрузки, распространяющимися от свободных поверхностей, снимает сжимающие напряжения в пластине, после чего цилиндр и пластина расходятся.

Без применения консервативного сглаживания численного решения удастся проследить только начальную стадию процесса соударения. Конечные элементы пластины в зоне контакта под действием удара цилиндра значительно искажаются (см. рис. 5), и после 0,02 мс решение прерывается из-за перехлеста отдельных конечных элементов. Применение процедуры консервативного сглаживания устраняет перехлест конечных элементов и позволяет исследовать процесс проникания до отскока ударника.

### Заключение

Выполнено компьютерное моделирование упругопластического выпучивания стальной пластины при соударении с недеформируемым цилиндром. В процессе соударения у пластины наблюдаются большие деформации и углы поворота конеч-

ных элементов как жесткого целого. Показано, что при применении явной конечно-разностной схемы интегрирования по времени типа «крест» процедура консервативного сглаживания поля узловых скоростей перемещений не только подавляет высокочастотные осцилляции, но и повышает устойчивость конечно-элементного решения к развитию мод нулевой энергии в условиях локальных интенсивных нагрузений.

#### Список литературы

1. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. UK, Chichester: John Wiley & Sons, 2014. 830 p.
2. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Pearson, 2019. 1058 p.
3. Oden J.T., Reddy J.N. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. New York: Courier Corporation, 2012. 448 p.
4. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. USA, Hoboken: John Wiley & Sons, 2002. 736 p.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.
6. Johnson C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. USA, Mineola: Dover Publications Inc., 2009. 288 p.
7. Chandrupatla T.R., Belegundu A.D. *Introduction to Finite Elements in Engineering*. London: Pearson Education Inc., 2012. 512 p.
8. Logan D.L. *A First Course in the Finite Element Method*. Cengage Learning Inc., 2018. 992 p.
9. Fish J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*. UK, Chichester: John Wiley & Sons, 2007. 336 p.
10. Kim N.H., Sankar B.V., Kumar A.V. *Introduction to Finite Element Analysis and Design*. UK, Chichester: John Wiley & Sons, 2018. 552 p.
11. Reddy J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*. New York: McGraw-Hill Education, 2019. 816 p.
12. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций*. М.: Физматлит, 2006. 392 с.
13. *Метод конечных элементов в механике твердых тел*. Ред. А.С. Сахаров, И. Альтенбах. Киев: Вища школа; Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг, 1982. 480 с.
14. Баженов В.Г., Зефирова С.В., Кочетков А.В. Численное исследование нестационарной дифракции упругой волны на цилиндрической оболочке. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Анализ и оптимизация конструкций*. 1991. С. 71–78.
15. Кибец А.И. Конечно-элементное решение трехмерных задач нестационарной динамики грунтовых сред. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика*. 1999. №1. С. 91–97.
16. Баженов В.Г., Зефирова С.В. О консервативном сглаживании разрывных волн напряжений в МКЭ. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика*. 2001. Вып. 1. С. 166–173.
17. Демарева А.В. Анализ влияния консервативного сглаживания на точность численного моделирования динамического упругопластического выпучивания сферических оболочек. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №4. С. 475–488. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-475-488.
18. Жмакин А.И., Фурсенко А.А. Об одной монотонной разностной схеме сквозного счета. *ЖВМиМФ*. 1980. Т. 20. №4. С. 1021–1031.
19. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. М.: Наука, 1986. 232 с.
20. Баженов В.Г., Демарева А.В., Жестков М.Н., Кибец А.И. Особенности численного моделирования упругопластического выпучивания полусферических оболочек при нагружении жестким индентором. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. №2. С. 22–33. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.02.

21. Волков И.А., Коротких Ю.Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2009. 424 с.
22. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Шошин Д.В. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях. *ПМТФ*. 2014. Т. 55. №1. С. 13–22.
23. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Петров М.В., Федорова Т.Г., Фролова И.А. Экспериментальное и теоретическое исследование упругопластического выпучивания цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, под действием поперечной силы. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2017. Т. 159. Кн. 3. С. 282-295.
24. Баженов В.Г., Варавин Д.А., Кибец А.И., Рябов А.А., Романов В.И. Исследование формоизменений сферической оболочки под действием импульса перегрузки при контактном взаимодействии с жесткой обоймой. *ПМТФ*. 2015. Т. 56. №6. С. 38–45. DOI: 10.15372/PMTF20150605.
25. Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1995. №2. С. 20–26.
26. *Вычислительный комплекс «Динамика-3»*. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013.

#### References

1. Belytschko T., Liu W.K., Moran B., Elkhodary K. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. UK, Chichester. John Wiley & Sons. 2014. 830 p.
2. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Pearson. 2019. 1058 p.
3. Oden J.T., Reddy J.N. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. New York. Courier Corporation. 2012. 448 p.
4. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., Witt R.J. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. USA, Hoboken. John Wiley & Sons. 2002. 736 p.
5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Oxford. Butterworth-Heinemann. 2013. 756 p.
6. Johnson C. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. USA, Mineola. Dover Publications Inc. 2009. 288 p.
7. Chandrupatla T.R., Belegundu A.D. *Introduction to Finite Elements in Engineering*. London. Pearson Education Inc. 2012. 512 p.
8. Logan D.L. *A First Course in the Finite Element Method*. Cengage Learning Inc. 2018. 992 p.
9. Fish J., Belytschko T. *A First Course in Finite Elements*. UK, Chichester. John Wiley & Sons. 2007. 336 p.
10. Kim N.H., Sankar B.V., Kumar A.V. *Introduction to Finite Element Analysis and Design*. UK, Chichester. John Wiley & Sons. 2018. 552 p.
11. Reddy J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*. New York. McGraw-Hill Education. 2019. 816 p.
12. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy [The Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2006. 392 p. (In Russian).
13. *Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel*. Red. A.S. Sakharov, I. Altenbakh [*Finite Element Method in Solid Mechanics*]. Eds. A.S. Sakharov, I. Altenbakh. Kiev. Vishcha shkola Publ.; Leyptsig. FEB Fakhbukhferlag. 1982. 480 p. (In Russian).
14. Bazhenov V.G., Zefirov S.V., Kochetkov A.V. Chislennoe issledovanie nestatsionarnoy difraktsii uprugoy volny na tsilindricheskoy obolochke [Numerical study of unsteady diffraction of an elastic wave on a cylindrical shell]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Analiz i optimizatsiya konstruksiy [Applied Problems of Strength and Plasticity. Analysis and Optimisation]*. 1991. P. 71–78 (In Russian).
15. Kibets A.I. Konechno-elementnoe reshenie trekhmernykh zadach nestatsionarnoy dinamiki gruntovykh sred [Finite element solution of soil ground unsteady dynamics three-dimensional



problems]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya Mekhanika* [Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. Ser. Mechanics]. 1999. No 1. P. 91–97 (In Russian).

16. Bazhenov V.G., Zefirov S.V. O konservativnom sglazhivanii razryvnykh voln napryazheniy v MKE [About conservative smoothing of stress discontinuous waves in FEM]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya Mekhanika* [Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. Ser. Mechanics]. 2001. Iss. 1. P. 166–173 (In Russian).

17. Demareva A.V. Analiz vliyaniya konservativnogo sglazhivaniya na tochnost chislennogo modelirovaniya dinamicheskogo uprugoplasticheskogo vypuchivaniya sfericheskikh obolochek [Analysis of the conservative smoothing effect on the accuracy of dynamic elastic-plastic spherical shells buckling numerical simulation]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2019. Vol. 81. No 4. P. 475–488. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-475-488 (In Russian).

18. Zhmakin A.I., Fursenko A.A. On a monotonic shock-capturing difference scheme. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1980. Vol. 20. Iss. 4. P. 218–227. DOI: 10.1016/0041-5553(80)90283-9.

19. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bolshie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya* [Large Elastoplastic Deformations: Theory, Algorithms, Applications]. Moscow. Nauka Publ. 232 p. (In Russian).

20. Bazhenov V.G., Demareva A.V., Zhestkov M.N., Kibets A.I. Osobennosti chislennogo modelirovaniya uprugoplasticheskogo vypuchivaniya polusfericheskikh obolochek pri nagruzhении zhestkim indentorom [Special features of numerical simulation for elastic-plastic buckling of hemispherical shells under loading with the rigid indenter]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [Perm National Research Polytechnic University Mechanics Bulletin]. 2016. No 2. P. 22–33. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.2.02 (In Russian).

21. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. *Uravneniya sostoyaniya vyazkouprugikh sred s povrezhdeniyami* [State Equation for Viscoelastic-Plastic Media with Defects]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 424 p. (In Russian).

22. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Shoshin D.V. Stability and limit states of elastoplastic spherical shells under static and dynamic loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014. Vol. 55. No 1. P. 8–15. DOI: 10.1134/S0021894414010027.

23. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Petrov M.V., Fedorova T.G., Frolova I.A. Eksperimentalnoe i teoreticheskoe issledovanie uprugoplasticheskogo vypuchivaniya tsilindricheskikh obolochek, zapolnennykh sypuchim materialom, pod deystviem poperechnoy sily [Experimental and theoretical study of elastoplastic buckling of cylindrical shells filled with bulk material under the action of a transverse force]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki* [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]. 2017. Vol. 159. Book 3. P. 282–295 (In Russian).

24. Bazhenov V.G., Varavin D.A., Kibets A.I., Ryabov A.A., Romanov V.I. Investigation of changes in the spherical shell shape under the action of pulsed loading due to contact interaction with a rigid block. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2015. T. 56. No 6. P. 966–971. DOI: 10.1134/S002189441506005X.

25. Bazhenov V.G., Kibets A.I., Tsvetkova I.N. Chislennoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov udarnogo vzaimodeystviya deformiruemykh elementov konstruksiy [Numerical simulation of unsteady processes of deformable structural elements impact interaction]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 1995. No 2. P. 20–26. (In Russian).

26. *Vychislitelnyy kompleks "Dinamika-3"* [Computing Complex "Dynamics-3"]. Nauchno-tekhnicheskii tsentr po yadernoy i radiatsionnoy bezopasnosti. Attestatsionnyy pasport programmnogo sredstva. Registratsionnyy pasport attestatsii PS № 325 ot 18.04.2013 [Scientific and Technical Center for Nuclear and Radiation Safety. Certification passport software. Registration certificate of certification PS No 325 dated 04.18.2013] (In Russian).

## ANALYSIS OF FINITE ELEMENT SOLUTION CONSERVATIVE SMOOTHING INFLUENCE ON THE ZERO ENERGY MODES SUPPRESSION

**Kibets A.I., Bezhentseva M.V.**

*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University  
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

The problem of high-speed penetration of a non-deformable cylinder into a steel plate is considered. The defining system of equations is formulated in Lagrange variables in a three-dimensional formulation. The equation of motion is derived from virtual work capacities balance. Kinematic relations are recorded in the metric of the current state. The relations of the flow theory with kinematic and isotropic hardening are used as equations of state. The contact interaction of the cylinder and the plate is modeled by non-penetration conditions. The numerical solution of the problem under given boundary and initial conditions is based on the moment scheme of the finite element method and “cross” type explicit time integration scheme. To discretize the defining system of equations with respect to spatial variables, 8-node isoparametric finite elements with multilinear form functions are used. To suppress the high-frequency oscillations of the numerical solution, the procedure of nodal displacement velocities conservative smoothing is used. The smoothing algorithm is based on the momentum conservation law, focused on finite element grids consisting of blocks that are mutually unambiguously mapped to a unit cube. To analyze the nodal displacement velocities monotonicity, the numerical solution splitting in the directions of the finite element grid lines is used. As the results of computer modeling have shown, the finite elements of the plate are exposed large deformations and rotation angles as a rigid whole during local intense dynamic loading. The conservative smoothing procedure influence on the numerical solution stability is analyzed. It is shown that in the problem under consideration, without applying the conservative smoothing procedure, zero-energy modes develop in the contact zone in the finite-element grid of the plate (an hourglass-type instability) and the collision process cannot be modeled before the cylinder rebounds.

*Keywords:* collision, penetration, plastic deformations, finite element method, zero energy modes.