

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-1-87-100

НЕСТАЦИОНАРНОЕ КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО УДАРНИКА И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЗАГЛУБЛЕННОЙ ПОЛОСТЬЮ*

© 2021 г.

Арутюнян А.М.¹, Федотенков Г.В.^{1,2}

¹НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

greghome@mail.ru

Поступила в редакцию 16.12.2020

Предложена постановка плоских нестационарных контактных задач о взаимодействии абсолютно твердых ударников с упругим полупространством с заглубленными полостями. С использованием динамической теоремы взаимности работ получена система разрешающих уравнений, которая включает в себя основное граничное интегральное уравнение, вытекающее из теоремы взаимности работ и граничных условий, а также уравнения поступательного и вращательного движения ударника. Ядрами основного разрешающего уравнения являются фундаментальные и сингулярные решения для упругой плоскости, представляющие собой перемещения и напряжения в упругой плоскости в ответ на действие единичной мгновенной сосредоточенной массовой силы. Разработан и реализован на ЭВМ оригинальный алгоритм решения, основанный на методе граничных элементов с дополнительной итерационной процедурой, позволяющей учитывать частичный отрыв граничных поверхностей ударника и полупространства в области контакта. При этом в каждый момент времени в полупространстве выделяется область, которая находится в возмущенном состоянии и вне которой возмущения отсутствуют. Интегральные операторы разрешающей системы уравнений заменяются дискретными аналогами по пространственной переменной и по времени. Проведено исследование влияния параметров на процесс нестационарного контакта абсолютно твердого прямоугольного в плане ударника с полупространством, имеющим заглубленную полость. Анализ результатов расчета показал значительное влияние полости на процесс нестационарного контактного взаимодействия. Оно начинает сказываться с момента прихода отраженных от границы полости волн. При этом существенно меняется характер нестационарного напряженно-деформированного состояния и перемещений. Разработанный алгоритм расчета может быть использован в инженерной практике проектными и исследовательскими организациями в процессе проектирования и расчета зданий и сооружений при воздействии природных и техногенных колебаний, распространяющихся в грунте.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 20-08-00707 А, 20-58-00023 Бел_а).

Ключевые слова: полупространство, полость, нестационарные контактные задачи, смешанные граничные условия, принцип суперпозиции, граничные элементы, интегральные преобразования, численно-аналитические алгоритмы.

Введение

Многие важные практические задачи связаны с исследованием динамического контактного взаимодействия ограниченных тел с полуограниченными упругими областями сложного строения. Актуальность этих задач связана, в том числе, с проблемами сейсмостойкости и виброзащиты сооружений, сейсморазведки полезных ископаемых, с необходимостью определения характеристик воздействия на здания и сооружения техногенных колебаний, распространяющихся в грунте, и др.

В грунтовом массиве часто присутствуют полости как естественного (например, карстовые полости), так и искусственного происхождения (различные коммуникации, тоннели метрополитена, заглубленные хранилища отходов и др.). Поэтому существенным является вопрос о степени влияния подобных полостей на процессы распространения нестационарных упругих волн, в том числе с учетом контактного взаимодействия.

Проблемами исследования в рамках контактного взаимодействия тел с полуограниченными областями сложного строения занимается достаточно узкий круг отечественных и зарубежных ученых [1–8]. Решения задач о воздействии штампа на упругое полупространство в стационарной и нестационарной постановках без полостей известны. Несмотря на проведенные исследования, в настоящее время практически отсутствуют решения контактных задач о нестационарном воздействии ударников на упругое полупространство с заглубленными полостями произвольной геометрии и расположения.

В статье представлена математическая постановка плоской нестационарной контактной задачи для абсолютно твердого ударника и полупространства с заглубленной полостью. С применением теоремы взаимности работ задача сведена к системе разрешающих уравнений. Подход к решению основан на прямом методе граничных элементов [1–18]. Разработан и реализован алгоритм решения, представлены результаты расчетов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую нестационарную контактную задачу для упругого полупространства с заглубленной полостью эллиптической формы и абсолютно твердого призматического ударника, имеющего прямоугольное сечение в плане Oxy . Положение и геометрию полости характеризуют координаты центра O_1 , длины полуосей эллипса p_1, p_2 и угол α_e наклона большей полуоси к оси Ox декартовой прямоугольной системы координат Oxy (рис. 1). Подошва ударника имеет ширину, равную $2b$. Центр масс штампа обозначен точкой O_2 .

Введем систему безразмерных величин (штрихом обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned} x = \frac{x'}{L}, \quad y = \frac{y'}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \quad w = \frac{w'}{L}, \quad F_\alpha = \frac{F'_\alpha L}{\lambda + 2\mu}, \\ V_0 = \frac{V'_0}{c_1}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad a = \frac{a'}{L}, \quad b = \frac{b'}{L}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$w_s = \frac{w'_s}{L}, \quad w_p = \frac{w'_p}{L}, \quad m = \frac{m'}{\rho L^2}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sigma'_{\alpha\beta}}{\lambda + 2\mu} \quad (\alpha, \beta = x, y).$$

Здесь L – характерный линейный размер; u – перемещение в направлении оси Ox ; w – перемещение в направлении оси Oy ; c_1 и c_2 – скорости распространения волн растяжения-сжатия и сдвига; V_0 – начальная скорость ударника; λ , μ и ρ – упругие постоянные Ламе и плотность среды; t и τ – размерное и безразмерное время; F_α – компоненты массовых сил; a , b – геометрические параметры ударника; w_s и w_p – перемещения точек подошвы ударника и его центра масс; m – погонная масса ударника; $\sigma_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора напряжений.

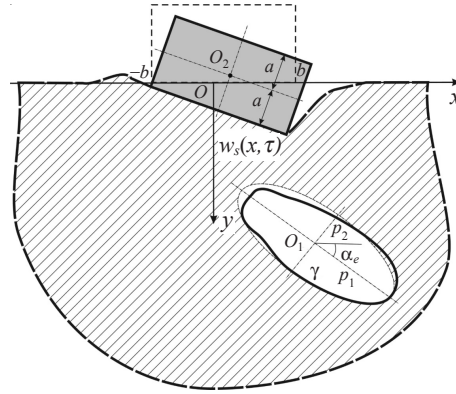


Рис. 1. Постановка нестационарной контактной задачи

Положим, что в момент начала взаимодействия $\tau = 0$ ударник движется с некоторой заданной начальной скоростью V_0 , вектор которой направлен по нормали к свободной поверхности полупространства $y = 0$. В начальный момент времени полупространство находится в невозмущенном состоянии.

Движение полупространства описывается динамическими уравнениями плоской теории упругости [19]:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \eta^{-2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \ddot{w} &= (1 - \eta^{-2}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \eta^{-2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

которые дополняются соотношениями Коши

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3)$$

и законом Гука

$$\sigma_{xx} = \varepsilon_{xx} + (1 - 2\eta^{-2})\varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{yy} = \varepsilon_{yy} + (1 - 2\eta^{-2})\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{xy} = 2\eta^{-2}\varepsilon_{xy}, \quad (4)$$

где ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} – компоненты тензора деформаций.

Положим, что контакт между ударником и упругим полупространством происходит в условиях свободного проскальзывания. В нулевом приближении будем рассматривать случай безотрывного контакта подошвы штампа, имеющей ширину $2b$,

с поверхностью полупространства. В этом случае в пределах отрезка $x \in [-b, b]$ нормальные перемещения границы полупространства совпадают с перемещениями подошвы ударника:

$$\begin{aligned} w|_{y=0} &= w_s(x, \tau), \quad x \in [-b, b]; \quad \sigma_{xy}|_{y=0} = 0, \quad x \in (-\infty, \infty); \\ \sigma_{yy}|_{y=0} &= 0, \quad x \in (-\infty, b] \cup [b, \infty). \end{aligned} \quad (5)$$

Для определения перемещений подошвы ударника в постановку задачи необходимо ввести уравнение поступательного движения ударника как абсолютно твердого тела, записанное в интегральной форме:

$$mw_p(\tau) = V_0\tau + \int_0^\tau \int_{-b}^b (\tau-t)\sigma_n(x,t) dx dt. \quad (6)$$

Кроме того, ударник может совершать поворот вокруг своего центра масс, поэтому дополнительно необходимо добавить уравнение вращательного движения ударника:

$$J\varphi(\tau) = \int_0^\tau \int_{-b}^b (\tau-t)\sigma_n(x,t)x dx dt, \quad (7)$$

где φ – угол поворота ударника, $J = 4ab(a^2 + b^2)/3$ – погонный осевой момент инерции ударника. Тогда в любой момент времени нормальные перемещения точек подошвы ударника определяются так (рис. 2):

$$w_s(x, \tau) = w_s(\tau) - \varphi(\tau)\sqrt{a^2 + x^2} \sin \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}. \quad (8)$$

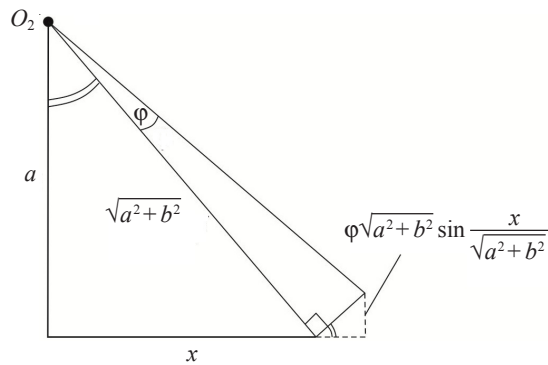


Рис. 2. Определение дополнительной составляющей нормальных перемещений ударника за счет поворота

Положим, что граница эллиптической полости γ свободна от напряжений

$$\sigma_n|_\gamma = \sigma_s|_\gamma = 0, \quad (9)$$

где σ_n и σ_s – нормальные и касательные напряжения на контуре.

Контур Γ , ограничивающий область искомого решения, состоит из действительной оси Ox и границы эллипса γ : $\Gamma = Ox \cup \gamma$.

2. Система разрешающих уравнений

Основное разрешающее граничное интегральное уравнение следует из динамической теоремы взаимности работ [7, 8]. В соответствии с граничными условиями (5) и (9) оно имеет вид:

$$\int_{-b}^b (\sigma_n * U_n - \Sigma_s * u_s) dx - \int_{-\infty}^{-b} (\Sigma_s * u_s + \Sigma_n * u_n) dx - \int_b^{\infty} (\Sigma_s * u_s + \Sigma_n * u_n) dx - \int_{\gamma} (\Sigma_s * u_s + \Sigma_n * u_n) ds = \int_{-b}^b \Sigma_n * w_s dx, \quad (10)$$

$$u_n|_{y=0} = u|_{y=0}, \quad u_s|_{y=0} = w|_{y=0}, \quad \sigma_n|_{y=0} = \sigma_{yy}|_{y=0}, \quad \sigma_s|_{y=0} = \sigma_{xy}|_{y=0},$$

где $U_s, U_n, \Sigma_s, \Sigma_n$ – фундаментальные и сингулярные решения для упругой плоскости [7, 8, 19], звездочкой обозначена свертка по времени, в левой части под интегралами содержатся искомые функции.

Алгоритм решения интегрального уравнения (10) основан на прямом методе граничных элементов [1–18] с дискретизацией по времени. Здесь определенная сложность заключается в том, что контур Γ является неограниченным. Поскольку граничные условия ставятся на внутреннем контуре γ и на всей границе $y = 0$, то вообще следовало бы всю ось Ox аппроксимировать бесконечной совокупностью граничных элементов (примыкающих друг к другу отрезков оси Ox). Однако, ввиду конечности скоростей распространения возмущений в упругой среде, в этом нет необходимости. Достаточно учесть только те из элементов, до которых успевают прийти упругие волны в рассматриваемый момент времени. Максимальная безразмерная скорость возмущений в упругой среде равна 1 (скорость волн растяжения-сжатия). Поэтому при заданном конечном значении времени расчета T достаточно рассмотреть только отрезок $[-b - T, b + T]$ оси Ox , поскольку вне этого отрезка напряжения и перемещения на поверхности полупространства $y = 0$ отсутствуют (рис. 3, c_R – безразмерная скорость волн Рэлея):

$$u_s|_{y=0, |x|>b+T} = u_n|_{y=0, |x|>b+T} = \sigma_s|_{y=0, |x|>b+T} = \sigma_n|_{y=0, |x|>b+T} = 0. \quad (11)$$

Исходя из вышесказанного, в дальнейшем под контуром Γ будем понимать отрезок $[-b - T, b + T]$ оси Ox и контур полости γ . Контур Γ можно полагать односвязным, проведя разрез в плоскости Oxy , как показано на рис. 3, так как при этом интегралы по берегам разреза (контурам γ_1 и γ_2), входящие в граничное интегральное уравнение, вследствие противоположного направления обхода контуров γ_1 и γ_2 , сокращаются.

Тогда в уравнении (10) все интегралы становятся определенными и уравнение примет вид

$$\int_{-b}^b (\sigma_n * U_n - \Sigma_s * u_s) dx - \int_{-b-T}^{-b} (\Sigma_s * u_s + \Sigma_n * u_n) dx - \int_b^{b+T} (\Sigma_s * u_s + \Sigma_n * u_n) dx - \int_{\gamma} (\Sigma_s * u_s + \Sigma_n * u_n) ds = \int_{-b}^b \Sigma_n * w_s dx. \quad (12)$$

Заметим, что правая часть уравнения (12) содержит под интегралом перемещения w_s подошвы штампа, которые определяются из уравнений (7), (8).

Таким образом, уравнение (12) совместно с (7), (8) составляют замкнутую систему разрешающих уравнений нестационарной контактной задачи для абсолютно твердого ударника и упругого полупространства с полостью.

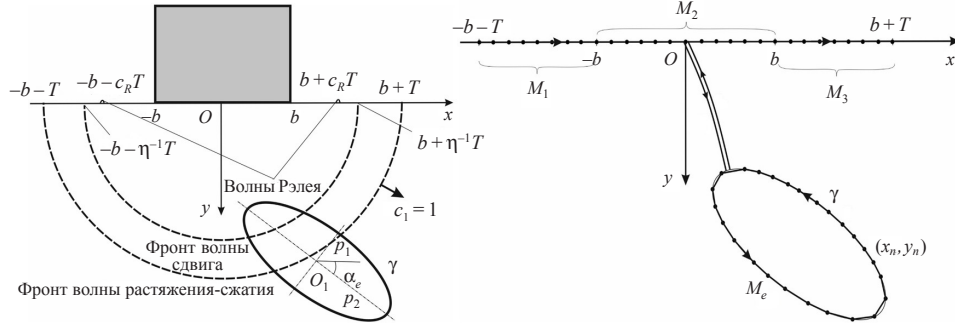


Рис. 3. Волновые фронты и схема граничных элементов

3. Алгоритм решения

Для численного решения уравнения задачи применим дискретизацию по времени. Для этого разделим временной интервал $[0, \tau]$ на N равных промежутков длительностью Δ_t : $t_k = k\Delta_t$, $k = 1, 2, \dots, N$; $\tau = N\Delta_t$. Перемещения и напряжения в исходной задаче аппроксимируем линейно по времени [7, 8, 20–23]:

$$\begin{aligned} u_n(s, t) &= u_n^k(s)m_1(t) + u_n^{k-1}(s)m_2(t), & u_s(s, t) &= u_s^k(s)m_1(t) + u_s^{k-1}(s)m_2(t), \\ \sigma_n &= \sigma_n^k(s)m_1(t) + \sigma_n^{k-1}(s)m_2(t), & \sigma_s &= \sigma_s^k(s)m_1(t) + \sigma_s^{k-1}(s)m_2(t), \\ m_1(t) &= \frac{t - t_{k-1}}{\Delta_t}, & m_2(t) &= \frac{t_k - t}{\Delta_t}, \\ u_n^k(s) &= u_n(s, t_k), & u_s^k(s) &= u_s(s, t_k), \\ \sigma_n^k(s) &= \sigma_n(s, t_k), & \sigma_s^k(s) &= \sigma_s(s, t_k). \end{aligned} \quad (13)$$

Контур Γ аппроксимируем с помощью $M = M_1 + M_2 + M_3 + M_e$ примыкающих друг к другу прямолинейных отрезков (см. рис. 3). Полагаем, что в пределах каждого граничного элемента напряжения и перемещения остаются постоянными и изменяются только во времени.

В соответствии со схемой граничных элементов, представленной на рис. 3, и дискретизацией по времени (13) построим численный аналог уравнения (12) [7, 8, 20–23]:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{M_1} (u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N) + \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} (u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N - \sigma_n^{N,j} b_{ns,ij}^N) + \\ & + \sum_{j=M_1+M_2+1}^{M_1+M_2+M_3} (u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N) + \sum_{j=M_1+M_2+M_3+1}^M (u_s^{N,j} a_{ss,ij}^N + u_n^{N,j} a_{ns,ij}^N) = F_{si}^N, \\ & \sum_{j=1}^{M_1} (u_s^{N,j} a_{sn,ij}^N + u_n^{N,j} a_{nn,ij}^N) + \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} (u_s^{N,j} a_{sn,ij}^N - \sigma_n^{N,j} b_{nn,ij}^N) + \\ & + \sum_{j=M_1+M_2+1}^{M_1+M_2+M_3} (u_s^{N,j} a_{sn,ij}^N + u_n^{N,j} a_{nn,ij}^N) + \sum_{j=M_1+M_2+M_3+1}^M (u_s^{N,j} a_{sn,ij}^N - u_n^{N,j} a_{nn,ij}^N) = F_{ni}^N, \end{aligned} \quad (14)$$

$$F_{si}^N = -\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} u_n^{k,j} a_{ns,ij}^k, \quad F_{ni}^N = -\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} u_n^{k,j} a_{nm,ij}^k, \quad i = \overline{1, M},$$

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_e.$$

Коэффициенты $a_{ss,ij}^N$ системы уравнений имеют вид [7, 8, 20–23]:

$$a_{ss,ij}^N = \int_{-0,5\Delta_j}^{0,5\Delta_j} \sum_{ss,ij}^N dx, \quad \sum_{ss,ij}^N \int_{\tau-\Delta_t}^{\tau} \sum_{sij} m_1(t) dt, \quad \sum_{sij} = \sum_s (x - c_{ij}, -d_{ij}, \tau - t), \quad (15)$$

где Δ_j – длина граничного элемента с номером j ; (c_{ij}, d_{ij}) – координаты центра i -го элемента в локальной системе координат, связанной с центром j -го элемента. Остальные коэффициенты определяются аналогично.

Система уравнений (14) дополняется дискретными аналогами уравнений (6) и (7):

$$w_{p,k} = \frac{V_0 k \Delta_t}{m} + \frac{\Delta_t^2}{2m} \sum_{l=1}^k \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} (x_j - x_{j-1}) [2(k-l) + 1] \sigma_n^{l,j},$$

$$\Phi_k = \frac{\Delta_t^2}{4J} \sum_{l=1}^k \sum_{j=M_1+1}^{M_1+M_2} (x_j^2 - x_{j-1}^2) [2(k-l) + 1] \sigma_n^{l,j}, \quad (16)$$

$$u_n^{k,j} = w_s \left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}, k \Delta_t \right) = w_{p,k} - \frac{\Phi_k}{2} \sqrt{4a^2 + (x_j + x_{j-1})^2} \sin \frac{x_j + x_{j-1}}{\sqrt{4a^2 + (x_j + x_{j-1})^2}},$$

где x_{j-1}, x_j – координаты начала и конца j -го элемента, расположенного под подошвой ударника в глобальной системе координат Oxy .

На каждом шаге по времени из системы уравнений (14) и (16) определяются граничные значения всех искомым функций – перемещений и напряжений, включая контактные напряжения под подошвой ударника.

Для контроля сходимости в алгоритме реализована процедура адаптивного подбора шага по времени. На каждом шаге проводится оценка погрешности

$$\|\Delta_N\| < \varepsilon, \quad \Delta_N = \max_j |u_n^{N,j} - u_n^{N-1,j}|, \quad (17)$$

где ε – требуемая точность.

Если неравенство (17) не выполняется, то на текущем цикле по времени шаг уменьшается в 2 раза и выполняется пересчет значений искомым функций. Затем значение шага возвращается к выбранному начальному значению. Таким образом, алгоритм позволяет легко реализовать адаптивный подбор шага Δ на каждом цикле по времени.

В процессе контактного взаимодействия возможен частичный отрыв граничных поверхностей ударника и полупространства в зоне контакта. Для учета этого эффекта разработана итерационная процедура уточнения области контакта с учетом деформируемости границы полупространства $y = 0$. Область контактного взаимодействия на нулевой итерации предполагается односвязной. Ее граница так же, как и перемещения ударника, определяется из уравнений (14), (16). На текущем временном шаге $t_k = k\Delta_t$ находятся перемещения границ полупространства и ударника, а также определяется распределение контактного давления по области взаимодействия. Далее вычисляется разность нормальных перемещений подошвы ударника и границы полупространства Δ_{wjk} :

$$\Delta_{wjk} = \Delta_w(x_j, \tau_k),$$

$$\Delta_w(x, \tau) = w_s(x, \tau) - w_0(x, \tau), \quad w_0(x, \tau) = u_n|_{y=0}. \quad (18)$$

Если на текущем временном шаге τ_k для некоторой области, принадлежащей свободной поверхности полупространства, разность перемещений Δ_{wjk} отлична от нуля, то граничные элементы, принадлежащие этой области, исключаются из элементов, принадлежащих области контакта на следующей итерации. Так же из области контакта исключаются элементы с наличием неотрицательных нормальных напряжений. После уточнения зоны контакта с учетом возможной ее многосвязности производится повторный расчет граничных значений всех искомых функций (напряжений и перемещений).

Анализ сходимости итерационного процесса проводится по норме разности между функциями нормальных перемещений, определенных на текущей и на предыдущей итерации. Если ее величина не превышает одной сотой длины наименьшего граничного элемента, то итерационный процесс останавливается, и алгоритм переходит к выполнению расчетов на следующем шаге по времени.

4. Пример расчета

Рассмотрим плоскую нестационарную контактную задачу о внедрении абсолютно жесткого ударника, имеющего прямоугольное в плане сечение с размерами $b = 0,5$, $a = 0,25$, в полупространство с эллиптической полостью. Геометрия полости характеризуется полуосями, равными $p_1 = 0,25$, $p_2 = 0,125$, и углом $\alpha_e = \pi/4$ между большей полуосью и осью глобальной декартовой системы координат Ox . Центр полости расположен в точке $O_1(0,5, 0,7)$ (рис. 4).

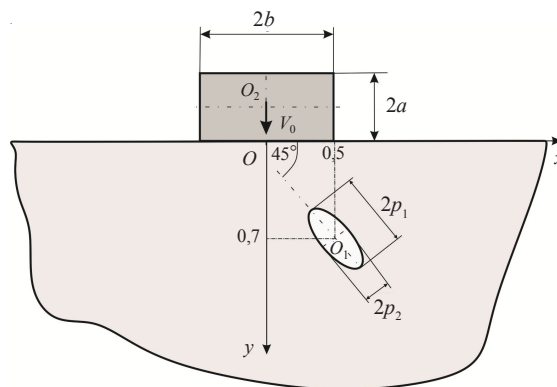


Рис. 4. Начальный момент времени контактного взаимодействия

В качестве материала полупространства примем сталь с $\eta = 1,87$. Начальная скорость движения ударника $V_0 = 0,1$. Положим время расчета $T = 3$, число шагов по времени равным 300, количество граничных элементов на эллипсе $M_e = 30$, под подошвой штампа $M_2 = 20$, на участках свободной границы вне штампа $M_1 = M_3 = 60$.

Кривые на рис. 5 иллюстрируют распределения безразмерного контактного давления $p = -\sigma_{xx}|_{y=0}$ под подошвой ударника в моменты времени $\tau = 1$ (сплошная кривая), $\tau = 2$ (штриховая кривая) и $\tau = 3$ (штрихпунктирная кривая). Из результатов видно, что распределение контактного давления несимметрично, появляются

подобласти, в которых контактное давление равно нулю. Это объясняется приходом отраженных волн от границы эллиптической полости.

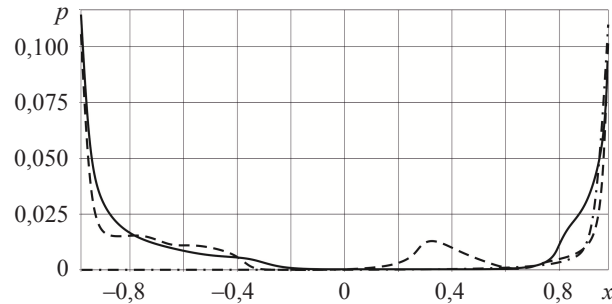


Рис. 5. Распределения контактного давления

На рис. 6 представлены распределения нормальных перемещений границы полупространства $w = u_n|_{y=0}$ в моменты времени $\tau = 1$ (сплошная кривая), $\tau = 2$ (штриховая кривая) и $\tau = 3$ (штрихпунктирная кривая). Здесь также хорошо заметно влияние полости, вызванное приходом отраженных волн от ее границы, что проявляется в несимметричности распределений при $\tau > 1$. Видно, что при $\tau = 3$ произошел отрыв подошвы штампа от границы полупространства, поскольку распределение перемещений в области контакта имеет нелинейный характер, что соответствует моменту начала отскока.

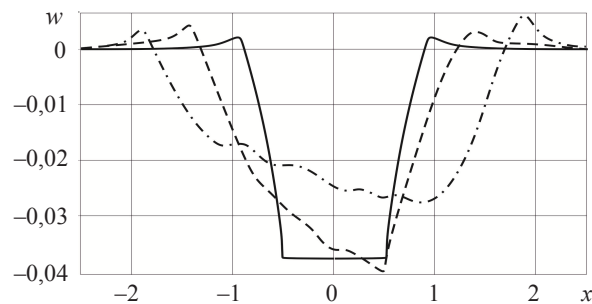


Рис. 6. Распределение нормальных перемещений границы полупространства в различные моменты времени

На рис. 7 представлены распределения нормальных перемещений по границе полупространства (сплошная кривая) и по подошве ударника (штриховая кривая) в момент времени $\tau = 2$.

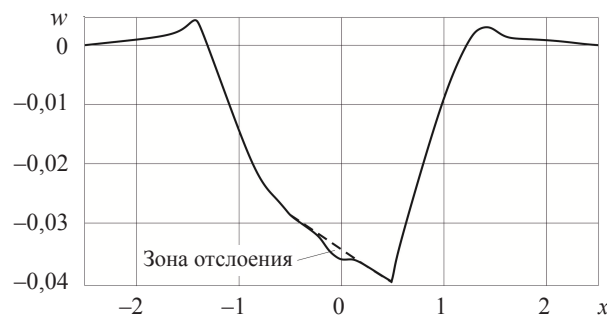


Рис. 7. Распределение нормальных перемещений границы полупространства и ударника

Видно, что появляется область отслоения граничных поверхностей в зоне контакта.

На рис. 8 представлены зависимости от времени нормальных (сплошная кривая) и тангенциальных (штриховая кривая) перемещений в ближайшей к границе $y = 0$ точке эллиптической полости. Следует отметить, что до момента времени прихода упругих возмущений от воздействия штампа в рассматриваемую точку перемещения в этой точке отсутствуют. Это согласуется с характером движения упругих волн, которые распространяются в полупространстве с конечной скоростью.

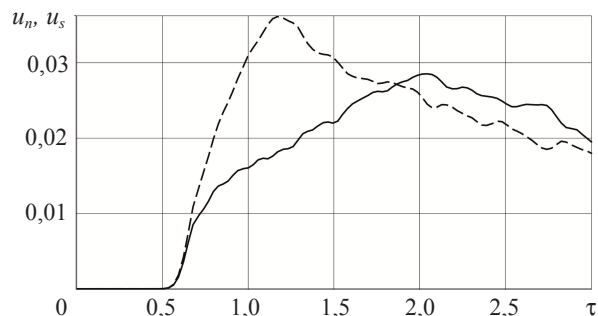


Рис. 8. Зависимости нормальных и тангенциальных перемещений от времени

Отметим, что работа алгоритма с начальным значением шага по времени продолжалась без автоматического уточнения с помощью адаптивного подбора шага и итерационной процедуры до момента времени $\tau = 1,04$. Начиная с этого момента времени на каждом шаге выполнялась работа итерационной процедуры и проводилось адаптивное уточнение шага по времени.

Заключение

Проведено исследование процесса нестационарного контактного взаимодействия абсолютно твердого ударника с полупространством, имеющим заглубленную полость. Из анализа результатов следует, что влияние полости на процесс нестационарного контактного взаимодействия начинает сказываться с момента прихода отраженных волн от ее границы. При этом существенно меняется характер нестационарного напряженно-деформированного состояния и перемещений. Ударник начинает поворачиваться за счет «оседания среды» в направлении границы полости, напряжения и перемещения становятся несимметричными относительно оси симметрии ударника, начинают появляться и развиваться зоны отрыва подошвы ударника от поверхности полупространства.

Список литературы

1. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N., Belov A.A. Boundary-element modeling of 3-D poroelastic half-space dynamics. *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 1040. P. 881–885. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1040.881.
2. Igumnov L.A., Ipatov A.A., Petrov A.N., Vorobtsov I.V. The time-step boundary-element scheme on the nodes of the Lobatto method in problems of 3-D dynamic poroelasticity. *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No 1. P. 103–111. DOI: 10.18720/MPM.4212019_9.
3. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N. A numerical study of wave propagation on poroelastic half-space with cavities by use the BEM and Runge–Kutta method. *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28. No 1-2. P. 96–100.

4. Ипатов А.А. Гранично-элементный анализ распространения волн в поровязкоупругом слоистом полупространстве и полупространстве с полостью. *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82. №3. С. 364–376. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-3-364-376.
5. Alielahi H., Kamalian M., Adampira M.A. BEM investigation on the influence of underground cavities on the seismic response of canyons. *Acta Geotechnica*. 2016. Vol. 11. P. 391–413. DOI: 10.1007/s11440-015-0387-7.
6. Alielahi H., Adampira M. Seismic effects of two-dimensional subsurface cavity on the ground motion by BEM: Amplification patterns and engineering applications. *International Journal of Civil Engineering*. 2016. Vol. 14. P. 233–251. DOI: 10.1007/s40999-016-0020-7.
7. Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная контактная задача для абсолютно твердого штампа и упругого полупространства с полостью. *Труды МАИ*. 2020. №113. С. 1–28. DOI: 10.34759/trd-2020-113-02.
8. Yulong Li, Arutiunian A.M., Kuznetsova E.L., Fedotenkov G.V. Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location. *Incas Bulletin*. 2020. Vol. 12. Special Iss. P. 99–113. DOI: 10.13111/2066-8201.2020.12.S.
9. Игумнов Л.А., Аменицкий А.В., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н. Численно-аналитическое исследование динамики вязко- и пористо-упругих тел. *Прикладная механика и техническая физика*. 2014. Т. 55. №1 (323). С. 108–114. <https://elibrary.ru/item.asp?id=21903147>.
10. Игумнов Л.А., Марков И.П. Моделирование динамики трехмерных однородных электроупругих тел методом граничных элементов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Вып. 76. Ч. 3. С. 191–197. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2014-76-3-191-197>.
11. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Моделирование динамики частично насыщенных пороупругих тел на основе метода гранично-временных элементов. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. №3. С. 47–61. DOI: 10.15593/pern.mech/2016.3.03.
12. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Тарлаковский Д.В., Локтева Н.А. Численное моделирование динамики составного пороупругого тела. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 2. С. 130–136. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-2-130-136>.
13. Игумнов Л.А., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Белов А.А. Гранично-элементный анализ волн на упругом, пористом и вязкоупругом полупространствах. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 2. С. 145–151. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-2-145-151>.
14. Ipatov A.A., Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Lyubimov A.K. Modification of numerical inversion of Laplace transform in solving problems of poroviscoelasticity via BEM. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40. No 3. P. 304–310. DOI: 10.1134/S1995080219030090.
15. Abrosimov N.A., Elesin A.V., Igumnov L.A. Numerical simulation of the process of loss of stability of composite cylindrical shells under combined quasi-static and dynamic actions. *Mechanics of Composite Materials*. 2019. Vol. 55. No 1. P. 41–52. DOI: 10.1007/s11029-019-09790-4.
16. Igumnov L.A., Markov I.P., Boev A.V. A static boundary element analysis of 3D anisotropic elastic problems. *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No 4. P. 461–469. DOI: 10.18720/MPM.4242019_11.
17. Carrer J.A.M., Pereira W., Mansur W.J. Two-dimensional elastodynamics by the timedomain boundary element method: Lagrange interpolation strategy in time integration. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2012. Vol. 36. No 7. P. 1164–1172. DOI: 10.1016/J.ENGANABOUND.2012.01.004.
18. Weidong Lei, Duofa Ji, Guopeng Zhu. Time-domain boundary element method with von Mises model for solving 2-D elastoplastic dynamic problems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2019. Vol. 41. P. 1–13. DOI: 10.1007/s40430-019-1770-3.
19. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
20. Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В. Нестационарные контактные задачи для абсолютно твердых тел и полупространства с полостями. *Динамические и техноло-*

гические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXIV международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. Т. 2. Москва, 19–23 марта 2018 г. М.: ООО «ТРП», 2018. С. 12–14.

21. Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В. Применение метода прямых граничных интегралов к исследованию распространения нестационарных возмущений в полупространстве с заглубленной цилиндрической полостью. *Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы: Тезисы докладов VI Международного научного семинара*. МАИ, 12–13 нояб. 2017 г. М.: ООО «ТРП», 2017. С. 12–13.

22. Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В. Начально-краевая задача для упругого полупространства с полостью. *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXVI международного симпозиума им. А.Г. Горшкова*. Т. 2. Москва, 16–20 марта 2020 г. М.: ООО «ТРП», 2020. С. 8–9.

23. Арутюнян А.М., Кузнецова Е.Л., Федотенков Г.В. Плоская нестационарная задача для абсолютно твердого ударника и упругого полупространства. *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Материалы XXV международного симпозиума им. А.Г. Горшкова*. Т. 2. Москва, 18–22 марта 2019 г. М.: ООО «ТРП», 2019. С. 22–23.

References

1. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N., Belov A.A. Boundary-element modeling of 3-D poroelastic half-space dynamics. *Adv. Mat. Res.* 2014. Vol. 1040. P. 881–885. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1040.881.

2. Igumnov L.A., Ipatov A.A., Petrov A.N., Vorobtsov I.V. The time-step boundary-element scheme on the nodes of the Lobatto method in problems of 3-D dynamic poroelasticity. *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No 1. P. 103–111. DOI: 10.18720/MPM.4212019_9.

3. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N. A numerical study of wave propagation on poroelastic half-space with cavities by use the BEM and Runge–Kutta method. *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28. No 1-2. P. 96–100.

4. Ipatov A.A. Granichno-elementnyy analiz rasprostraneniya voln v porovyazkoupругom sloistom poluprostranstve i poluprostranstve s polostyu [BEM analysis of wave propagation in poroviscoelastic layered halfspace and halfspace with cavity]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2020. Vol. 82. No 3. P. 364–376. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-3-364-376 (In Russian).

5. Alielahi H., Kamalian M., Adampira M.A. BEM investigation on the influence of underground cavities on the seismic response of canyons. *Acta Geotech.* 2016. Vol. 11. P. 391–413. DOI: 10.1007/s11440-015-0387-7.

6. Alielahi H., Adampira M. Seismic effects of two-dimensional subsurface cavity on the ground motion by BEM: Amplification patterns and engineering applications. *Int. J. Civ. Eng.* 2016. Vol. 14. P. 233–251. DOI: 10.1007/s40999-016-0020-7.

7. Arutyunyan A.M., Kuznetsova E.L., Fedotenko G.V. Ploskaya nestatsionarnaya kontaktnaya zadacha dlya absolyutno tverdogo shtampa i uprugogo poluprostranstva s polostyu [Plane unsteady contact problem for a rigid stamp and an elastic half-space with a cavity]. *Trudy MAI*. 2020. No 113. P. 1–28. DOI: 10.34759/trd-2020-113-02 (In Russian).

8. Yulong Li, Arutiunian A.M., Kuznetsova E.L., Fedotenko G.V. Method for solving plane unsteady contact problems for rigid stamp and elastic half-space with a cavity of arbitrary geometry and location. *Incas Bulletin*. 2020. Vol. 12. Special Iss. P. 99–113. DOI: 10.13111/2066-8201.2020.12.S.

9. Igumnov L.A., Amenitskii A.V., Belov A.A., Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N. Numerical-analytic investigation of the dynamics of viscoelastic and porous elastic bodies. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2014. Vol. 55. No 1. P. 89–94. DOI: 10.1134/S002189441401012Xю

10. Igumnov L.A., Markov I.P. Modelirovanie dinamiki trekhmernykh odnorodnykh elektropругikh tel metodom granichnykh elementov [Modeling the dynamics of 3D homogeneous piezoelectric solids using boundary element method]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems*

of Strength and Plasticity]. 2014. Iss. 76. Pt. 3. P. 191–197. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2014-76-3-191-197> (In Russian).

11. Igumnov L.A., Petrov A.N. Modelirovanie dinamiki chastichno nasyshehenykh porouprugikh tel na osnove metoda granichno-vremennykh elementov [Dynamics of partially saturated poroelastic solids by boundary-element method]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [Perm National Research Polytechnic University Mechanics Bulletin]. 2016. No 3. P. 47–61. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.03 (In Russian).

12. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Tarlakovsky D.V., Lokteva N.A. Chislennoe modelirovanie dinamiki sostavnogo porouprugogo tela [Numerically modeling the dynamics of a compound poroelastic body]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2013. Iss. 75. Pt. 2. P. 130–136. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-2-130-136> (In Russian).

13. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Belov A.A. Granichno-elementnyy analiz voln na uprugom, poristom i vyzkouprugom poluprostranstvakh [Boundary-element analysis of waves over elastic, poro- and viscoelastic half-spaces]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2013. Iss. 75. Pt. 2. P. 145–151. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-2-145-151> (In Russian).

14. Ipatov A.A., Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Lyubimov A.K. Modification of numerical inversion of Laplace transform in solving problems of poroviscoelasticity via BEM. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40. No 3. P. 304–310. DOI: 10.1134/S1995080219030090.

15. Abrosimov N.A., Elesin A.V., Igumnov L.A. Numerical simulation of the process of loss of stability of composite cylindrical shells under combined quasi-static and dynamic actions. *Mech. Compos. Mater.* 2019. Vol. 55. No 1. P. 41–52. DOI: 10.1007/s11029-019-09790-4.

16. Igumnov L.A., Markov I.P., Boev A.V. A static boundary element analysis of 3D anisotropic elastic problems. *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No 4. P. 461–469. DOI: 10.18720/MPM.4242019_11.

17. Carrer J.A.M., Pereira W., Mansur W.J. Two-dimensional elastodynamics by the time domain boundary element method: Lagrange interpolation strategy in time integration. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2012. Vol. 36. No 7. P. 1164–1172. DOI: 10.1016/J.ENGANABOUND.2012.01.004.

18. Weidong Lei, Duofa Ji, Guopeng Zhu. Time-domain boundary element method with von Mises model for solving 2-D elastoplastic dynamic problems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2019. Vol. 41. P. 1–13. DOI: 10.1007/s40430-019-1770-3.

19. Gorshkov A.G., Medvedsky A.L., Rabinsky L.N., Tarlakovsky D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuum Media]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).

20. Arutyunyan A.M., Kuznetsova E.L., Fedotenkov G.V. Nestatsionarnye kontaktnye zadachi dlya absolutno tverdykh tel i poluprostranstva s polostyami [Non-stationary contact problems for absolutely rigid bodies and half-space with cavities]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksiy i sploshnykh sred: Materialy XXIV mezhdunarodnogo simpoziuma im. A.G. Gorshkova* [Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Continuum and Structures dedicated to Anatoly G. Gorshkov: Proceedings of the XXIV International Symposium]. Vol. 2. Moscow, 19–23 Mar. 2018. Moscow. LLC “TRP” Publ. 2018. P. 12–14 (In Russian).

21. Arutyunyan A.M., Kuznetsova E.L., Fedotenkov G.V. Primenenie metoda pryamykh granichnykh integralov k issledovaniyu rasprostraneniya nestatsionarnykh vozmushcheniy v poluprostranstve s zaglublennoy tsilindricheskoy polostyu [Application of the method of direct boundary integrals to the study of the propagation of unsteady perturbations in a half-space with a deepened cylindrical cavity]. *Dinamicheskoe deformirovanie i kontaktnoe vzaimodeystvie tonkostennykh konstruksiy pri vozdeystvii poley razlichnoy fizicheskoy prirody: Tezisy dokladov VI Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara* [Dynamic Deformation and Contact Interaction of Thin-Walled Structures under the Influence of Fields of Different Physical Nature: Papers of the VI International Scientific Seminar]. MAI, 12–13 Nov. 2017. Moscow. LLC “TRP” Publ. 2017. P. 12–13 (In Russian).

22. Arutyunyan A.M., Kuznetsova E.L., Fedotenkov G.V. Nachalno-kraevaya zadacha dlya uprugogo poluprostranstva s polostyu [Initial boundary value problem for an elastic half-space with a cavity]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksiy i sploshnykh*

sred: *Materialy XXVI mezhdunarodnogo simpoziuma im. A.G. Gorshkova [Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Continuum and Structures" dedicated to Anatoly G. Gorshkov: Proceedings of the XXVI International Symposium]*. Vol. 2. Moscow, 16–20 Mar. 2020. Moscow. LLC "TRP" Publ. 2020. P. 8–9 (In Russian).

23. Arutyunyan A.M., Kuznetsova E.I., Fedotenkov G.V. Ploskaya nestatsionarnaya zadacha dlya absolyutno tverdogo udarnika i uprugogo poluprostranstva [Plane nonstationary problem for perfectly rigid die and an elastic half-space]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruktivnykh i sploshnykh sred: Materialy XXV mezhdunarodnogo simpoziuma im. A.G. Gorshkova [Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Continuum and Structures Dedicated to Anatoly G. Gorshkov: Proceedings of the XXV International Symposium]*. Vol. 2. Moscow, 18–22 Mar. 2019. Moscow. LLC "TRP" Publ. 2019. P. 22–23 (In Russian).

TRANSIENT CONTACT INTERACTION OF A RIGID DIE AND ELASTIC HALF-SPACE WITH A CAVITY

Arutyunyan A.M.¹, Fedotenkov G.V.^{1,2}

¹*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

²*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

A closed mathematical formulation of plane non-stationary contact problems for rigid dies and an elastic half-space with deepened cavities is constructed. Using the dynamic theorem of reciprocity of works, a system of resolving equations is obtained. It includes the basic boundary integral equation arising from the principle of reciprocity and boundary conditions, as well as the equations of translational and rotational motion of the die. The fundamental and singular solutions for the elastic plane are the cores of the main resolving equation. They determine displacements and stresses in the elastic plane from the applied single instantaneous concentrated force. An original solution algorithm based on the method of boundary integrals with an additional iterative procedure that allows one to take into account the partial separation of the boundary surfaces of the die and the half-space in the contact area has been developed and implemented on a computer. In this case, at each moment of time in the half-space, there is a region that is in a perturbed state and outside of which there are no perturbations. The integral operators of the resolving system of equations are replaced by discrete analogs in the spatial variable and in time. A parametric study of the process of unsteady contact of an absolutely rigid rectangular die with a half-space having a recessed cavity is carried out. Analysis of the calculation results revealed the manifestation of a significant effect of the cavity on the process of non-stationary contact interaction. The influence of the cavity begins to show itself from the moment the reflected waves arrive from its boundary. In this case, the nature of the unsteady stress-strain state and displacements changes significantly. The developed calculation algorithm can be used in engineering practice by design and research organizations in the process of designing and calculating buildings and structures under the influence of natural and man-made vibrations propagating in the soil.

Keywords: half-space, cavity, non-stationary contact problems, mixed boundary conditions, superposition principle, boundary elements, integral transformations, numerical-analytical algorithms.