

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-1-76-86

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

© 2021 г.

Белов А.А., Петров А.Н.

*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

belov_a2@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 03.11.2020

Рассмотрено применение неклассического подхода метода граничных интегральных уравнений совместно с интегральным преобразованием Лапласа по времени к моделированию волновых процессов в анизотропных упругих телах. В отличие от классического подхода граничных интегральных уравнений, который успешно реализуется для решения трехмерных изотропных задач динамической теории упругости, вязко- и пороупругости, представлен альтернативный классической формулировке метода граничных интегральных уравнений подход, использующий регулярные интегральные уравнения Фредгольма первого рода (интегральные уравнения на плоской волне). Построение таких граничных интегральных уравнений опирается на структуру динамического фундаментального решения. Подход использует точные граничные интегральные уравнения, обратное преобразование Лапласа строится численно методом Дурбина. Представлено численное решение динамической задачи анизотропной теории упругости методом граничных интегральных уравнений в неклассической формулировке. Гранично-элементная схема метода граничных интегральных уравнений построена на базе регулярного интегрального уравнения первого рода. Решена задача в анизотропной постановке о действии нагрузки по нормали в виде функции Хевисайда на грань куба, ослабленного кубической полостью. Проведено сравнение полученных гранично-элементных решений с конечно-элементными решениями. Численные результаты свидетельствуют об эффективности использования граничных интегральных уравнений на одиночной плоской волне при решении трехмерных анизотропных динамических задач теории упругости. Проведено исследование на сходимость гранично-элементных решений на трех вариантах дискретизации поверхности. Достигнутая точность расчетов не уступает точности гранично-элементных схем для классических граничных интегральных уравнений. Проведен гранично-элементный анализ решений для куба с полостью и без полости.

Ключевые слова: трехмерные задачи, метод граничных элементов, обращение преобразования Лапласа, уравнение Фредгольма первого рода.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-08-00442).

Введение

Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) является универсальным численно-аналитическим методом решения трехмерных волновых начально-краевых задач теорий упругости, вязко- и пороупругости [1–7]. Преимущества этого метода заключаются в автоматическом выполнении условий поведения решений на бесконечности при рассмотрении нестационарных процессов в полубесконечных телах и средах и снижении размерности исследуемой задачи на единицу.

Расширение метода ГИУ для решения динамических анизотропных задач нуждается в разработке новых специальных схем [8]. Представлено неклассическое распространение методов ГИУ и метода граничных элементов (МГЭ) на анизотропные динамические начально-краевые задачи. Рассматриваемый подход является альтернативой методу ГИУ с двойным применением теоремы взаимности [9, 10] и интегральному представлению матриц Грина в форме, предложенной в [11]. Подход использует структуру динамического фундаментального решения, описанного в статье В.А. Бабешко [12]. Переход из области Лапласа во временную область строится численно методом Дурбина [13]. Настоящая статья является продолжением исследований, представленных в [14, 15].

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается кусочно-однородное тело Ω с границей $\Gamma = \partial\Omega$ в трехмерном евклидовом пространстве R^3 , в котором введена декартова система координат. Уравнения движения упругодеформируемой среды и краевые условия имеют вид:

$$Lu=0, \quad L = \sigma_{ij,j} - \partial_i^2, \quad (l^0 u)_i = u_i|_{\partial\Omega},$$

$$(l^1 u)_i = \sigma_{ij}(u)m_j|_{\partial\Omega} = c_{ijkl}m_j u_{l,k}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3,$$

где $\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{k,l}$, σ – тензор напряжений; $u = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор смещений; c_{ijkl} – модули упругости, l^0 и l^1 – соответствующие граничные операторы, $m = (m_1, m_2, m_3)$ – вектор внешней нормали.

Тензор Грина для линейной анизотропной теории упругости записывается в виде [16]:

$$U(x, \omega) = -c\Delta \int_{S^2} G(\xi, \omega, n) F^{(0)} dS(n),$$

$$G(\xi, \omega, n) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\exp(ik_\alpha |\xi|)}{2ik_\alpha \lambda_\alpha} A_\alpha(\text{sgn } \xi) \otimes A_\alpha(\text{sgn } \xi), \quad \xi = nx,$$

$$U(x, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{2} A_\alpha(v_\alpha^2 M + K) A_\alpha, \quad v_\alpha = \omega/k_\alpha,$$

где $K = L_0(n)$, $M = \rho I$, $F^{(0)} = 1$, ρ – плотность, I – единичная матрица, $c = -(8\pi^2)^{-1}$, Δ – оператор Лапласа в пространстве R^3 , k_α – собственные числа, \hat{A}_α – собственные вектора матрицы $c_{ijkl}n_j n_l$, ω – частота, $n = \{n_1, n_2, n_3\}$ – внешний вектор, определяющий направление распространения плоских волн.

Для динамических задач справедливы уравнения [17]:

$$\gamma \hat{A}_\alpha \otimes \hat{A}_\alpha \int_{\Gamma} [l^1 \exp(ik_\alpha n(x-y)) l^0 \psi(y) - \exp(ik_\alpha n(x-y)) l^1 \psi(y)] d_y \Gamma = 0, \quad (1)$$

$$\gamma \hat{A}_\alpha \otimes \hat{A}_\alpha \int_{\Gamma} [l^1 \delta(\tau) * l^0 \psi(y, t) - \delta(\tau) * l^1 \psi(y, t)] d_y \Gamma = 0, \quad (2)$$

$$\det A(k_\alpha) = 0, \quad A(k, \omega, n) \hat{A} = 0,$$

$$A^*(k_\alpha \operatorname{sgn} \xi) = \operatorname{tr} A^*(k_\alpha) \hat{A}_\alpha(\operatorname{sgn} \xi) \otimes \hat{A}_\alpha(\operatorname{sgn} \xi), \quad \tau = t - \frac{n(x-y)}{v_\alpha},$$

$$\pm \gamma c \sum_{\alpha=1}^N i g_S(k_\alpha) \int_{\Gamma} [l^1 \exp(ik_\alpha n(x-y)) l^0 \psi(y) - \exp(ik_\alpha n(x-y)) l^1 \psi(y)] d_y \Gamma = 0, \quad (3)$$

$$\pm \gamma c \sum_{\alpha=1}^N i g_S(k_\alpha) \int_{\Gamma} [l^1 \delta(\tau) * \psi(y, t) - \delta(\tau) * l^1 \psi(y, t)] d_y \Gamma = 0, \quad (4)$$

где «*» означает свертку по t ; $g_S = \bar{u}$, \bar{u} – вектор смещения в изображениях, $A_{ij}(\partial) = c_{ijkl} \partial_j \partial_l$, A^* – сопряженный дифференциальный оператор A , $\psi = (\psi^0, \psi^1)$ – граничные функции; $\gamma = (l^0, l^1)$; δ – дельта-функция Дирака; \otimes – векторное произведение.

Таким образом, решение задачи методом ГИУ означает, что выполняются соответствующие соотношения из (1)–(4) для собственных чисел k_α и собственных векторов \hat{A}_α . Для теории упругости из уравнений (1) с учетом соотношения

$$\frac{iA^*(k_\alpha \operatorname{sgn} \xi)}{[\det A(k)]|_{k=k_\alpha}} = \frac{1}{2ik_\alpha \lambda_\alpha} A_\alpha(\operatorname{sgn} \xi) \otimes A_\alpha(\operatorname{sgn} \xi)$$

выделяется интегральное уравнение, совпадающее (при $x=0$) с уравнением из [12, 18].

В.А. Бабешко предложил метод построения новых интегральных уравнений для решения краевых задач [12]. На базе уравнений (1), (2) можно построить МГЭ-схему решения динамических краевых задач.

2. Гранично-элементная дискретизация

Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности $\partial\Omega$ на граничные элементы: четырехугольные и треугольные восьмиузловые биквадратичные элементы (рис. 1).

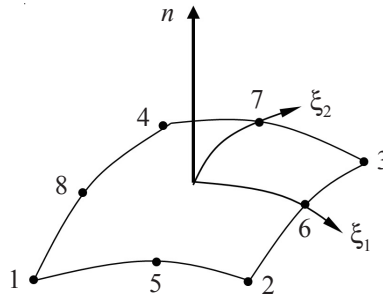


Рис. 1. Четырехугольный граничный элемент

Треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы. Связь локальной $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ и глобальной $y = (y_1(\xi_1), y_2(\xi_2), y_3(\xi_2))$ систем координат записывается через функции формы $N_i(\xi)$:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \xi \in \Delta_e,$$

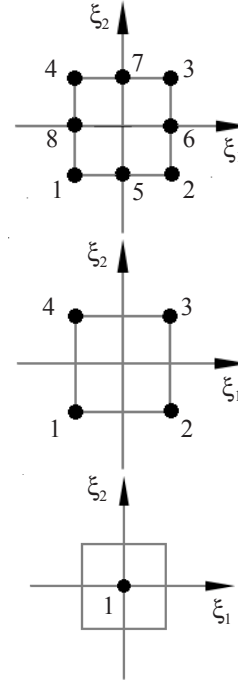
где $\beta(k, l)$ – глобальный номер узла, имеющего в k -м элементе локальный номер l .

Далее определяется естественный базис, метрический тензор и единичная нормаль на элементе:

$$x_e(\xi_1, \xi_2) = \sum_{n=1}^8 F_n(\xi_1, \xi_2) x_n^{\gamma(e,n)}, \quad x \in \Gamma_e,$$

$$\bar{u}(\xi_1, \xi_2, s) = \sum_{n=1}^4 R_n(\xi_1, \xi_2) \bar{u}_n^{\gamma(e,n)}(s),$$

$$\bar{t}(\xi_1, \xi_2, s) = \bar{t}^{\gamma(e,1)}(s),$$



$\gamma(e, n)$ – глобальный номер узла, имеющего в e -м элементе локальный номер n , $F_n(\xi_1, \xi_2)$ – квадратичные функции формы, $R_n(\xi_1, \xi_2)$ – линейные функции формы.

Неизвестные граничные поля интерполируются через узловые значения. Рассмотрим случай, называемый согласованным интерполированием, где для аппроксимации граничных перемещений применим билинейные элементы, а для аппроксимации поверхностных сил – постоянные элементы.

Для получения дискретного аналога ГИУ применим метод коллокации. В качестве узлов коллокации y^m выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируется система линейных алгебраических уравнений.

Численное интегрирование по Гауссу организовано на основе формулы с фиксированным порядком. Для решения итоговой системы линейных алгебраических уравнений $Ay = f$ используется алгоритм регуляризации по Тихонову:

1. Строится $A^* = (\bar{a}_{ji})$ – комплексно-сопряженная и транспонированная матрица.
2. Вместо исходной системы рассматривается система $(\alpha E + A^* A) y_\alpha = A^* f$.

3. Численное обращение преобразования Лапласа

Для получения оригинала решения применяется метод Дурбина численного преобразования Лапласа с линейной аппроксимацией трансформанты [7]:

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \bar{f}(s) \exp(st) ds,$$

$$f(0) \approx \sum_{k=1}^n \left[\frac{(F_{k+1} - F_k) \Delta_k}{2\pi} \right],$$

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta_k} (\cos(\omega_{k+1}t) - \cos(\omega_k t)) + \frac{G_{k+1} - G_k}{\Delta_k} (\sin(\omega_{k+1}t) - \sin(\omega_k t)) \right],$$

где

$$\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k, \quad \tau_k = (\omega_{k+1} + \omega_k) / 2, \quad F_k = \operatorname{Re} \bar{f}(\alpha + i\tau_k), \quad G_k = \operatorname{Im} \bar{f}(\alpha + i\tau_k).$$

4. Численные исследования

Решена задача в анизотропной постановке о действии нагрузки по нормали в виде функции Хевисайда на грань куба с длиной ребра $l_1 = 1$ м, ослабленного кубической полостью с длиной ребра $l_2 = 0,45$ м (рис. 2) [19]. Верхняя грань куба в направлении, противоположном оси x_3 , подвергается нагрузке хевисайдовского типа, а на противоположной грани куба смоделировано условие жесткой заделки, остальная поверхность куба свободна. Изучено влияние пространственной дискретизации на результаты МГЭ-анализа. Для куба с полостью и без полости использовались по три различные однородные поверхностные сетки с количеством элементов 216, 384, 600 на поверхности внешнего куба и 96, 216, 384 на поверхности внутреннего куба соответственно.

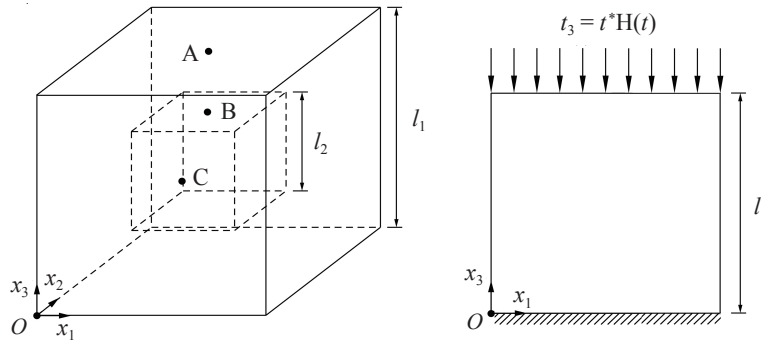


Рис. 2. Физическая постановка задачи

Полость расположена в центре куба. На $x_3 = l_1$ нагрузка: $t_3 = t^* \cdot H(t)$, $t^* = -100$ Па, $H(t)$ – функция Хевисайда. На грани $x_3 = 0$: $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Остальная поверхность свободна от поверхностных усилий. Точки наблюдения: A (0,5, 0,5, 1,0), B (0,5, 0,5, 0,725), C (0,5, 0,275, 0,5) расположены в центрах верхней грани куба, верхней грани полости и передней грани полости соответственно. Рассмотрены две конфигурации: однородное тело и тело с полостью с параметрами материала: $\rho = 3227$ кг/м³, матрица упругих параметров материала

$$C = \begin{bmatrix} 257 & 90 & 65 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 200 & 79 & 0 & 0 & 0 \\ 65 & 79 & 203 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 62 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 74 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 65 \end{bmatrix} \text{ ГПа.}$$

Проведено сравнение гранично-элементных решений с конечно-элементным решением (рис. 3–5). Проведен сравнительный анализ гранично-элементных решений для куба с полостью и без полости. На рисунках обозначено: НГИУ – неклассический подход к решению методом ГИУ; КГИУ – классический подход к решению методом ГИУ; МКЭ – решение методом конечных элементов. Исследование сходимости показало, что в случае тела с полостью требуется большее количество граничных элементов по сравнению со случаем тела без полости, хотя в обоих случаях приемлемые результаты достигаются даже при сравнительно небольшом количестве граничных элементов.

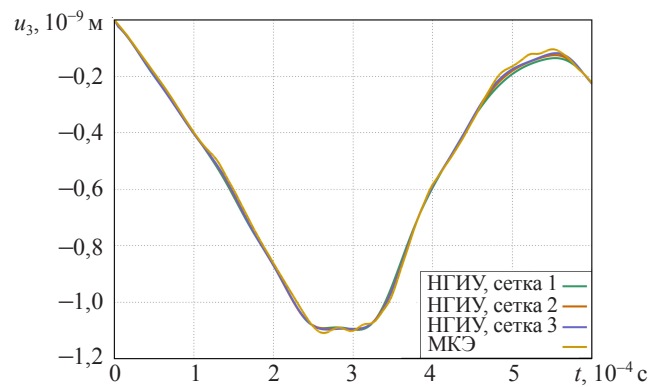


Рис. 3. Перемещения в точке А при отсутствии полости

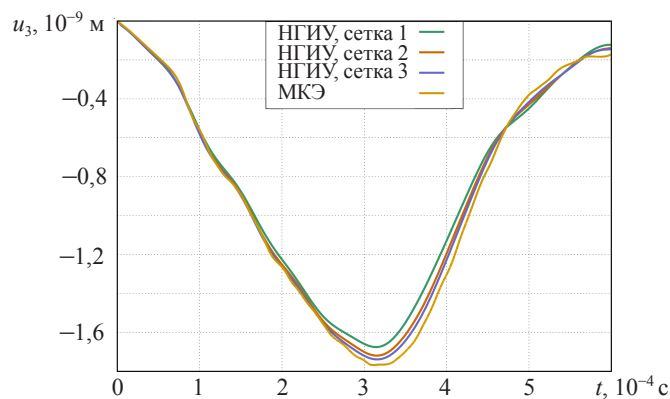


Рис. 4. Перемещения в точке А при наличии полости

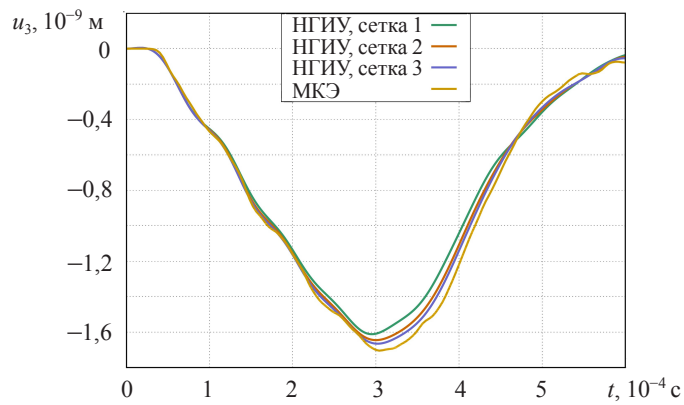


Рис. 5. Перемещения в точке В при наличии полости

Проведен сравнительный анализ решений, полученных по классической схеме ГИУ и неклассической схеме [20] (рис. 6–8).

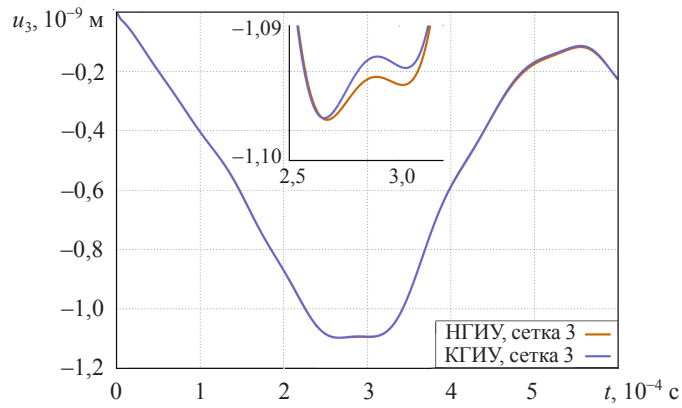


Рис. 6. Перемещения в точке А при отсутствии полости

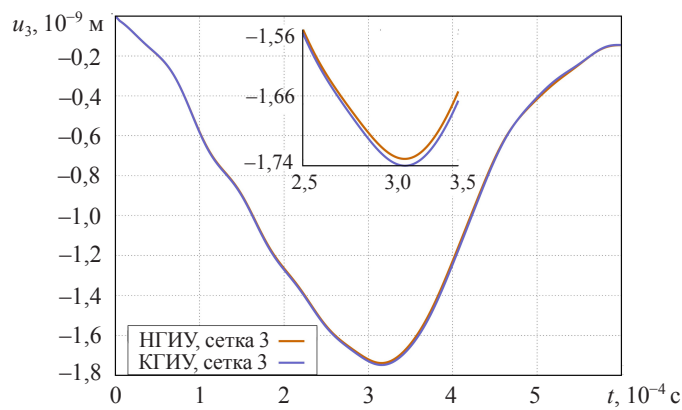


Рис. 7. Перемещения в точке А при наличии полости

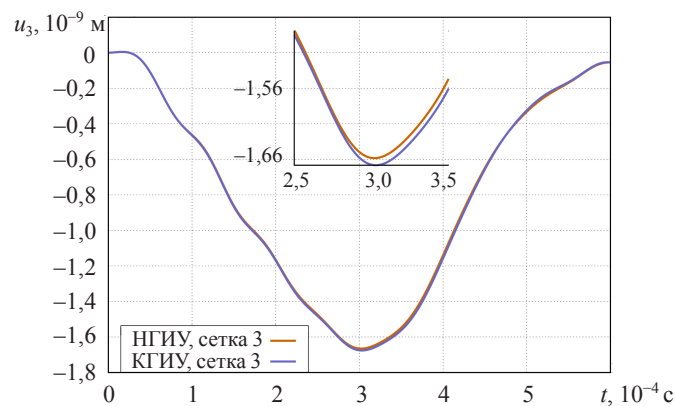


Рис. 8. Перемещения в точке В при наличии полости

Заключение

Полученные результаты свидетельствуют о перспективности использования ГИУ на одиночной плоской волне для решения трехмерных динамических задач теории упругости. Достигнутая точность расчетов не уступает точности МГЭ-схем для классических ГИУ.

Список литературы

1. Schanz M. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua*. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
2. Liu Y.J., Mukherjee S., Nishimura N., Schanz M., Ye W., Sutradhar A., Pan E., Dumont N.A., Frangi A., Saez A. Recent advances and emerging applications of the boundary element method. *Applied Mechanics Reviews*. 2011. Vol. 64. No 3. 39 p. DOI: 10.1115/1.4005491.
3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. No 2. P. 168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. No 2. P. 179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.
5. Manolis G.D., Dineva P.S. Elastic waves in continuous and discontinuous geological media by boundary integral equation methods: A review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2015. Vol. 70. P. 11–29. DOI: 10.1016/J.SOILDYN.2014.11.013.
6. Manolis G.D., Beskos D.E. Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity. *Acta Mechanica*. 1989. № 76. P. 89–104.
7. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями*. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
8. Igumnov L.A., Markov I.P., Rataushko Y.Y. Modeling the dynamics of 3D elastic anisotropic solids using boundary element method. *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 1040. P. 633–637. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1040.633.
9. Gaul L., Kogl M., Wagner M. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Berlin: Springer, 2003. 488 p.
10. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L. *Boundary Element Techniques*. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 464 p.
11. Wang C.Y., Achenbach J.D. Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. 1995. Vol. 449. Iss. 1937. P. 441–458. DOI:10.1098/rspa.1995.0052.

12. Бабешко В.А. Новый метод решения краевых задач механики сплошной среды и математической физики для неклассических областей. *ДАН СССР*. 1985. Т. 284. №1. С. 73–76.
13. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal*. 1974. Vol. 17. No 4. P. 371–376. DOI:10.1093/comjnl/17.4.371.
14. Igumnov L.A., Rataushko Y.Y., Ipatov A.A. Treating coupled boundary value problems of 3D elastodynamics by means of boundary integral equations method. *Advanced Materials – Studies and Applications*. 2015. P. 283–299.
15. Игумнов Л.А., Белов А.А. Численное решение интегральных уравнений на одиночной плоской волне для начально-краевых задач трехмерной теории упругости конечных тел. *Проблемы прочности и пластичности*. 2006. Вып. 68. С. 22–26. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2006-68-1-7-21>.
16. Norris A.N. Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. 1994. Vol. 447. Iss. 1929. P. 175–188. <https://doi.org/10.1098/rspa.1994.0134>.
17. Игумнов Л.А. Граничные интегральные уравнения трехмерных задач на плоских волнах. *Докл. РАН*. 2006. Т. 409. №5. С. 622–624.
18. Ватульян А.О. О граничных интегральных уравнениях I-го рода в динамических задачах анизотропной теории упругости. *Докл. РАН*. 1993. Т. 333. №3. С. 312–314.
19. Roy S., Gebert J.-M., Stasiuk G., Piat R., Weidenmann K.A., Wanner A. Complete determination of elastic moduli of interpenetrating metal/ceramic composites using ultrasonic techniques and micromechanical modeling. *Materials Science and Engineering A*. 2011. Vol. 528. Iss. 28. P. 8226–8235. DOI:10.1016/j.msea.2011.07.029.
20. Белов А.А., Петров А.Н. Анализ динамики анизотропных упругих тел на основе неклассических граничных интегральных уравнений. *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Матер. XXVI Международ. симпози. им. А.Г. Горшкова*. Т. 1. Москва, 16–20 марта 2019 г. М.: ООО «ТРИП», 2020. С. 44–46.

References

1. Schanz M. *Wave Propagation in Viscoelastic and Poroelastic Continua*. Berlin. Springer. 2001. 170 p.
2. Liu Y.J., Mukherjee S., Nishimura N., Schanz M., Ye W., Sutradhar A., Pan E., Dumont N.A., Frangi A., Saez A. Recent advances and emerging applications of the boundary element method. *Appl. Mech. Rev.* 2011. Vol. 64. No 3. 39 p. DOI: 10.1115/1.4005491.
3. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *Acoust. Soc. Am.* 1956. Vol. 28. No 2. P. 168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
4. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. Vol. 28. No 2. P. 179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.
5. Manolis G.D., Dineva P.S. Elastic waves in continuous and discontinuous geological media by boundary integral equation methods: A review. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2015. Vol. 70. P. 11–29. DOI: 10.1016/J.SOILDYN.2014.11.013.
6. Manolis G.D., Beskos D.E. Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity. *Acta Mech.* 1989. № 76. P. 89–104.
7. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integral'nykh uravneniy i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoy dinamicheskoy teorii uprugosti s sopryazhennymi polyami [The Method of Boundary Integral Equations and Boundary Elements in Solving the Problem of Three-Dimensional Dynamic Theory of Elasticity with Conjugate Fields]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 352 c. (In Russian).
8. Igumnov L.A., Markov I.P., Rataushko Y.Y. Modeling the dynamics of 3D elastic anisotropic solids using boundary element method. *Adv. Mater. Res.* 2014. Vol. 1040. P. 633–637. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1040.633.
9. Gaul L., Kogl M., Wagner M. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. Berlin. Springer. 2003. 488 p.

10. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L. *Boundary Element Techniques*. Berlin. Springer-Verlag. 1984. 464 p.
11. Wang C.Y., Achenbach J.D. Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. 1995. Vol. 449. Iss. 1937. P. 441–458. DOI:10.1098/rspa.1995.0052.
12. Babeshko V.A. Novyy metod resheniya kraevykh zadach mekhaniki sploshnoy sredy i matematicheskoy fiziki dlya neklassicheskikh oblastey [A new method for solving boundary value problems of continuum mechanics and mathematical physics for nonclassical domains]. *Doklady Akademii nauk SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Science]*. 1985. Vol. 284. No 1. P. 73–76 (In Russian).
13. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *Computer J*. 1974. Vol. 17. No 4. P. 371–376. DOI:10.1093/comjnl/17.4.371.
14. Igumnov L.A., Rataushko Y.Y., Ipatov A.A. Treating coupled boundary value problems of 3D elastodynamics by means of boundary integral equations method. *Advanced Materials – Studies and Applications*. 2015. P. 283–299.
15. Igumnov L.A., Belov A.A. Chislennoe reshenie integralnykh uravneniy na odinochnoy ploskoy volne dlya nachalno-kraevykh zadach trekhmernoy teorii uprugosti konechnykh tel [Numerical solution of nonstationary problems of three-dimensional theory of elasticity using method of integral equations on a single plane wave]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2006. Iss. 68. P. 22–26. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2006-68-1-7-21> (In Russian).
16. Norris A.N. Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*. 1994. Vol. 447. Iss. 1929. P. 175–188. <https://doi.org/10.1098/rspa.1994.0134>.
17. Igumnov L.A. Granichnye integralnye uravneniya trekhmernykh zadach na ploskikh volnakh [Boundary integral equations on plane waves for 3D problems]. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk [Proceedings of the Russian Academy of Sciences]*. 2006. Vol. 409. No 5. P. 622–624 (In Russian).
18. Vatulyan A.O. On boundary integral equations of the first kind in dynamic problems in the anisotropic theory of elasticity. *Doklady Mathematics*. 1993. Vol. 38. No 11. P. 459–460.
19. Roy S., Gebert J.-M., Stasiuk G., Piat R., Weidenmann K.A., Wanner A. Complete determination of elastic moduli of interpenetrating metal/ceramic composites using ultrasonic techniques and micromechanical modeling. *Mater. Sci. Eng. A-Struct.* 2011. Vol. 528. Iss. 28. P. 8226–8235. DOI:10.1016/j.msea.2011.07.029.
20. Belov A.A., Petrov A.N. Analiz dinamiki anizotropnykh uprugikh tel na osnove neklassicheskikh granichnykh integral'nykh uravneniy [Analysis of the dynamics of anisotropic elastic bodies based on non-classical boundary integral equations]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksiy i sploshnykh sred: Materialy XXVI mezhdunarodnogo simpoziuma im. A.G. Gorshkova [Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Continuum and Structures Dedicated to Anatoly G. Gorshkov: Proceedings of the XXVI International Symposium]*. Vol. 1. Moscow. 16–20 Mar. 2019. Moscow. LLC “TRP” Publ. 2020. P. 44–46 (In Russian).

**NUMERICAL ANALYSIS OF THE DYNAMICS
OF THREE-DIMENSIONAL ANISOTROPIC BODIES
BASED ON NON-CLASSICAL BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS**

Belov A.A., Petrov A.N.

*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

The application of non-classical approach of the boundary integral equation method in combination with the integral Laplace transform in time to anisotropic elastic wave modeling is considered. In contrast to the classical approach of the boundary integral equation method which is successfully implemented for solving three-dimensional isotropic problems of the dynamic theory of elasticity,

viscoelasticity and poroelasticity, the alternative nonclassical formulation of the boundary integral equations method is presented that employs regular Fredholm integral equations of the first kind (integral equations on a plane wave). The construction of such boundary integral equations is based on the structure of the dynamic fundamental solution. The approach employs the explicit boundary integral equations. The inverse Laplace transform is constructed numerically by the Durbin method. A numerical solution of the dynamic problem of anisotropic elasticity theory based on the boundary integral equations method in a nonclassical formulation is presented. The boundary element scheme of the boundary integral equations method is built on the basis of a regular integral equation of the first kind. The problem is solved in anisotropic formulation for the load acting along the normal in the form of the Heaviside function on the cube face weakened by a cubic cavity. The obtained boundary element solutions are compared with finite element solutions. Numerical results prove the efficiency of using boundary integral equations on a single plane wave in solving three-dimensional anisotropic dynamic problems of elasticity theory. The convergence of boundary element solutions is studied on three schemes of surface discretization. The achieved calculation accuracy is not inferior to the accuracy of boundary element schemes for classical boundary integral equations. Boundary element analysis of solutions for a cube with and without a cavity is carried out.

Keywords: three-dimensional problems, boundary element method, Laplace transform inversion, Fredholm equation of the first kind.