

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-1-61-75

**КВАЗИГАРМОНИЧЕСКАЯ ИЗГИБНАЯ ВОЛНА,  
РАСПРОСТРАНЯЮЩАЯСЯ В БАЛКЕ ТИМОШЕНКО,  
ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ\***

© 2021 г.

**Ерофеев В.И.<sup>1,2</sup>, Леонтьева А.В.<sup>2</sup>**

*<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

*<sup>2</sup>Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального  
исследовательского центра «Институт прикладной физики РАН»,  
Нижний Новгород, Российская Федерация*

erof.vi@yandex.ru

*Поступила в редакцию 26.11.2020*

Рассматривается модуляционная неустойчивость квазигармонической изгибающей волны, распространяющейся в однородной балке, закрепленной на нелинейно-упругом основании. Динамическое поведение балки определяется теорией Тимошенко. Модель Тимошенко, уточняющая техническую теорию изгиба стержней, предполагает, что поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформируемой срединной линии стержня; нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, равны нулю; учитываются инерционные составляющие, связанные с поворотом поперечных сечений. Уникальность модели заключается в том, что, позволяя хорошо описывать многие процессы, происходящие в реальных конструкциях, она остается достаточно простой, доступной для аналитических исследований. Система уравнений, описывающая изгибные колебания балки, сводится к одному нелинейному уравнению четвертого порядка относительно поперечных смещений частиц балки.

Методом многих масштабов получено нелинейное уравнение Шредингера – одно из основных уравнений нелинейной волновой динамики. Согласно критерию Лайтхилла определены области модуляционной неустойчивости. Показано, как границы этих областей смещаются при изменении параметров, характеризующих упругие свойства материала балки и нелинейность основания. Рассмотрены нелинейные стационарные волны огибающих. Получено и проанализировано качественно уравнение, обобщающее уравнение Дуффинга, которое содержит два дополнительных слагаемых в отрицательной степени (первой и третьей). Найдены решения уравнения Шредингера в виде солитонов огибающих и проанализированы зависимости их основных параметров (амплитуда, ширина) от параметров системы. В пределах области модуляционной неустойчивости показано динамическое поведение точек пересечения

---

\*Выполнено при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект №0729-2020-0054).

амплитуд и ширин «светлых» солитонов в случае мягкой нелинейности основания.

*Ключевые слова:* модуляционная неустойчивость, изгибная волна, балка Тимошенко, нелинейно-упругое основание, солитоны огибающих.

## **Введение**

Балки, лежащие на упругом основании, благодаря их широкому использованию в технике, много лет привлекают внимание исследователей. К расчетной модели такой балки могут быть сведены железнодорожные пути, подземные трубопроводы, подводные плавучие тоннели, сеть балок в конструкции пола для судов, зданий и мостов, вибрационные машины на упругом фундаменте и т.д. [1].

Дж. Эллингтон [2] показал, что балка на отдельных упругих креплениях, расположенных через равные промежутки друг от друга, функционирует аналогично балке на упругом основании. Точность этой аналогии зависит как от изгибной жесткости балки, так и от коэффициента упругости крепления и расстояния, на которое они удалены друг от друга.

При исследовании динамического поведения конструкций с подвижными нагрузками наибольший интерес вызывает нахождение их критических скоростей. При движении поездов со скоростью, близкой к скорости распространения волн Рэлея в окружающем железнодорожное полотно грунте, возникает усиление вибрации поезда и железнодорожного полотна [3–6]. В зависимости от типа почвы эта скорость может варьироваться от 250 до 800 км/ч. Современные высокоскоростные поезда уже превосходят нижний предел этого интервала. Еще больших скоростей достигают ракетные поезда, разгоняющие полезную нагрузку по направляющим специализированных треков [7–10]. Усиление вибраций на высоких скоростях – опасное явление, которое приводит к быстрому изнашиванию железнодорожного полотна и может вызвать сход поезда с рельсов. Поэтому при строительстве высокоскоростных железнодорожных магистралей, особенно на мягких почвах, увеличивают жесткость грунта. Увеличение жесткости грунта, в свою очередь, обязывает учитывать при расчетах нелинейность упругого основания. Вводятся в рассмотрение балки, лежащие на нелинейно-упругом основании. Параметр нелинейности является малой добавкой к жесткости основания. При положительном значении этой добавки имеем систему с «жестким» типом нелинейности (по терминологии Рейснера – «упрочняющееся основание» [11]), а при отрицательном значении – с «мягким» типом нелинейности («размягченное» основание [11]).

В качестве базовой модели для проведения анализа конструкции часто выбирается математическая модель балки, предложенная С.П. Тимошенко [12–32]. Модель балки Тимошенко занимает особое место в механике: позволяя хорошо описывать многие процессы, происходящие в реальных конструкциях, она остается достаточно простой, доступной для аналитических исследований.

Математическая модель, позволяющая описать динамику балки Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании, была предложена в [33]. В линейном приближении эта модель применяется для изучения дисперсионных свойств балки [34], что имеет первостепенное значение для нахождения критических скоростей нагрузок, движущихся по деформируемым направляющим путевых структур [2–6]. Влияние нелинейности упругого основания на формирование несинусоидальных изгибных волн исследовалось в [33, 34].

В настоящей статье рассматриваются особенности распространения квазигармонической изгибной волны в балке Тимошенко, закрепленной на нелинейно-упругом основании.

## 1. Математическая модель

В рамках теории Тимошенко динамическое поведение стержня, закрепленного на нелинейно-упругом основании, описывается системой уравнений [33, 34]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \kappa c_\tau^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \kappa c_\tau^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h_1 w + h_2 w^3 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\kappa c_\tau^2}{r_y^2} \left( \varphi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (2)$$

где  $w(x, t)$  – поперечное смещение частиц срединной линии балки;  $\varphi(x, t)$  – угол отклонения сечения балки от вертикального положения;  $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ ,  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  – соответственно скорости распространения сдвиговых волн в неограниченной среде и продольных волн в стержне;  $\rho$  – плотность материала;  $\mu$  – модуль сдвига;  $E$  – модуль Юнга;  $r_y = \sqrt{I_y/F}$  – осевой радиус инерции;  $I_y$  – осевой момент инерции (для прямоугольного поперечного сечения  $I_y = a^3 b/12$ );  $F$  – площадь поперечного сечения балки;  $\kappa$  – поправочный коэффициент, учитывающий отклонение от теории плоских сечений, его величина зависит от способа определения среднего значения для угла сдвига и характера распределения сдвигов по сечению (для балки прямоугольного сечения  $\kappa = 5/6$ );  $h_1, h_2$  – коэффициенты, характеризующие нелинейно-упругое основание.

Система уравнений (1), (2) сводится к одному уравнению относительно поперечного смещения частиц  $w$ :

$$\left( 1 + \frac{h_1 r_y^2}{\kappa c_\tau^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{c_0^2 h_1 r_y^2}{\kappa c_\tau^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_0^2 r_y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{r_y^2}{\kappa c_\tau^2} (c_0^2 + \kappa c_\tau^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{r_y^2}{\kappa c_\tau^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + h_1 w + h_2 w^3 + \frac{h_2 r_y^2}{\kappa c_\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w^3) - \frac{c_0^2 h_2 r_y^2}{\kappa c_\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w^3) = 0. \quad (3)$$

В безразмерных переменных уравнение (3) принимает вид:

$$(1 + m_1) \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - m_1 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - (1 + m_2) \frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial \tau^2} + m_2 \frac{\partial^4 W}{\partial \tau^4} + \frac{m_1}{m_2} W + \frac{m_3}{m_2} W^3 + m_3 \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (W^3) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (W^3) \right) = 0, \quad (4)$$

где  $W = w/w_0$ ,  $z = x/r_y$ ,  $\tau = c_0 t/r_y$  – безразмерные величины перемещения, координаты и времени соответственно. Безразмерные параметры

$$m_1 = \frac{h_1 r_y^2}{\kappa c_\tau^2}, \quad m_2 = \frac{c_0^2}{\kappa c_\tau^2}, \quad m_3 = \frac{h_2 r_y^2 w_0^2}{\kappa c_\tau^2}$$

характеризуют линейную жесткость основания ( $m_1$ ), отношение скоростей ( $2 \leq \kappa m_2 \leq 3$ ), зависящих от коэффициента Пуассона  $\nu$  ( $E/\mu = 2(1 + \nu)$ ,  $0 \leq \nu \leq 1/2$ ), и нелинейность системы. Для жесткой нелинейности основания параметр  $m_3 > 0$ , для мяг-

кой нелинейности  $m_3 < 0$ . Параметр  $m_1 \rightarrow 0$ , если линейная жесткость основания существенно уступает жесткости балки  $h_1 \ll \kappa c_\tau^2 / r_y^2$ . Если линейная жесткость основания существенно превосходит жесткость балки  $h_1 \gg \kappa c_\tau^2 / r_y^2$ , то  $m_1 \rightarrow \infty$ . Параметр  $m_1 \rightarrow 1$ , если линейная жесткость основания и жесткость балки сопоставимы, то есть  $h_1 \approx \kappa c_\tau^2 / r_y^2$ .

## 2. Модуляционная неустойчивость

Для анализа нелинейного уравнения (4) воспользуемся методом многих масштабов [35]. Решение уравнения (4) будем искать в виде ряда

$$W = \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \varepsilon^3 W_3 + \dots,$$

где  $W_i$  – функции нескольких пространственных и временных переменных  $Z_n = \varepsilon^n z$ ,  $T_n = \varepsilon^n \tau$  ( $\varepsilon$  – малый параметр,  $\varepsilon \ll 1$ ). Выделяя члены одинаковых порядков малости, получим в первом приближении по  $\varepsilon$ :

$$\hat{L}W_1 = (1+m_1) \frac{\partial^2 W_1}{\partial T_0^2} - m_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial Z_0^2} + \frac{\partial^4 W_1}{\partial Z_0^4} - (1+m_2) \frac{\partial^4 W_1}{\partial Z_0^2 \partial T_0^2} + m_2 \frac{\partial^4 W_1}{\partial T_0^4} + \frac{m_1}{m_2} W_1 = 0, \quad (5)$$

где  $\hat{L}$  – дифференциальный оператор линейной части уравнения (4).

Решение уравнения (5) в виде бегущей квазигармонической волны имеет вид:

$$W_1 = W_{10}(Z_1, Z_2, T_1, T_2) \exp i(\omega T_0 - k Z_0) + \text{к.с.}, \quad (6)$$

где  $W_{10}$  – комплексная амплитуда волны, зависящая от медленных переменных координаты и времени; к.с. – комплексно-сопряженная величина; частота  $\omega$  и волновое число  $k$  связаны дисперсионным уравнением  $m_2(\omega^2 - k^2)(m_1 - m_2\omega^2 + k^2) = m_1 - m_2\omega^2$  [34].

Во втором приближении по малому параметру с учетом решения (6) имеем

$$\begin{aligned} \hat{L}W_2 + 2i \left[ \omega((1+m_1) + (1+m_2)k^2 - 2m_2\omega^2) \frac{\partial W_{10}}{\partial T_1} + \right. \\ \left. + k(m_1 + 2k^2 - (1+m_2)\omega^2) \frac{\partial W_{10}}{\partial Z_1} \right] \exp i(\omega T_0 - k Z_0) + \text{к.с.} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Из условия отсутствия секулярных слагаемых в решении  $W_2$  получаем уравнение, которое с учетом дисперсионного уравнения принимает вид:

$$\frac{\partial W_{10}}{\partial T_1} + v_{\text{gr}} \frac{\partial W_{10}}{\partial Z_1} = 0, \quad (8)$$

где выражение для групповой скорости представляется зависимостью

$$v_{\text{gr}} = \frac{k(m_1 + 2k^2 - (1+m_2)\omega^2)}{\omega(1+m_1 + (1+m_2)k^2 - 2m_2\omega^2)}.$$

В качестве решения уравнения (7) можно выбрать  $W_2 = 0$ . Тогда условие отсутствия секулярного решения уравнения третьего приближения с учетом (8) и дисперсионного уравнения позволяет получить следующее уравнение:

$$i \left( \frac{\partial W_{10}}{\partial T_2} + v_{\text{gr}} \frac{\partial W_{10}}{\partial Z_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 W_{10}}{\partial Z_1^2} + q |W_{10}|^2 W_{10} = 0;$$

$$\frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{d}{dk} v_{\text{gr}} =$$

$$= \frac{-(1+m_1+(1+m_2)k^2-6m_2\omega^2)v_{\text{gr}}^2 - 4(1+m_2)k\omega v_{\text{gr}} + m_1 - (1+m_2)\omega^2 + 6k^2}{(1+m_1+(1+m_2)k^2-2m_2\omega^2)\omega},$$

$$q = -\frac{3}{2} \frac{m_3(1+m_2(k^2-\omega^2))}{m_2(1+m_1+(1+m_2)k^2-2m_2\omega^2)\omega}.$$

Переходя в движущуюся с групповой скоростью систему координат, приходим к нелинейному уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial W_{10}}{\partial T_2} + \frac{1}{2} \omega'' \frac{\partial^2 W_{10}}{\partial Z_1^2} + q |W_{10}|^2 W_{10} = 0, \quad (9)$$

одному из основных уравнений нелинейной волновой динамики [35] (здесь для упрощения записи введено обозначение  $\omega'' = d^2\omega/dk^2$ ).

Известно, что в нелинейной среде квазигармоническая волна при определенных условиях оказывается неустойчивой по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты (эффект самомодуляции или модуляционная неустойчивость) [36].

Наличие модуляционной неустойчивости может быть определено непосредственно из уравнения Шредингера (9). Для этого следует воспользоваться критерием Лайтхилла [37, 38], согласно которому модуляционная неустойчивость пространственно-однородного решения возможна при выполнении условия  $\omega'' \cdot q > 0$ . Графическое изображение зависимости  $f(k) = \omega'' q$  при различных параметрах  $m_1$  представлено на рис. 1 (где  $a$  – при  $m_1 = m_1^{(1)}$ ,  $b$  – при  $m_1 = 1$ ,  $в$  – при  $m_1 = m_1^{(2)}$ ,  $г$  – при  $m_1 = m_1^{(3)}$ ;  $0 < m_1^{(1)} < 1 < m_1^{(2)} < m_1^{(3)}$ ;  $m_3 < 0$ ).

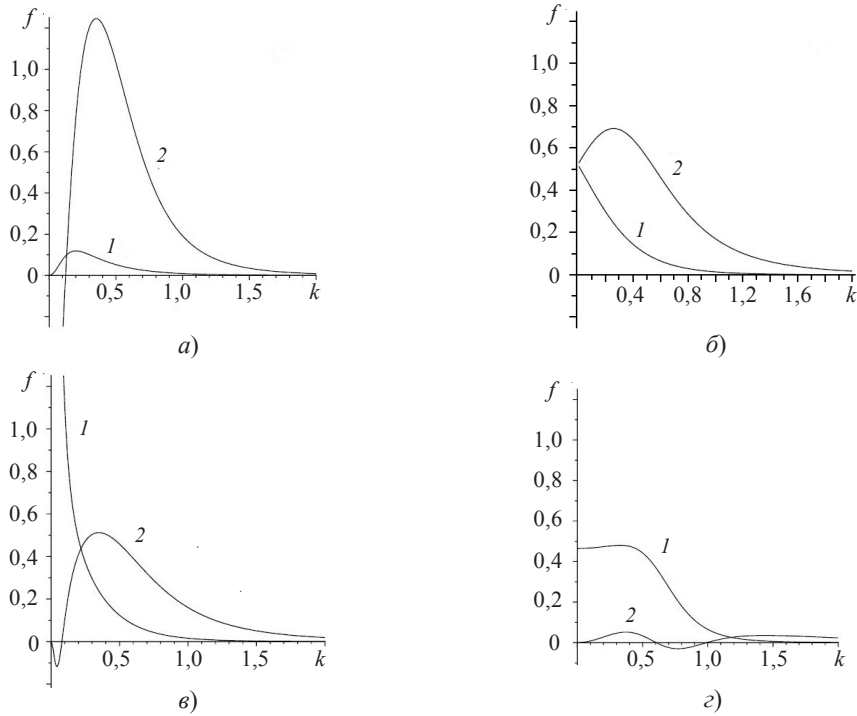


Рис. 1. Зависимости  $f(k)$  при различных значениях параметра  $m_1$

Кривая 1 на рисунке соответствует верхней ветви дисперсионной кривой  $\omega(k)$ , кривая 2 – нижней. При положительных значениях параметра  $m_3$  графики отображаются симметрично относительно оси абсцисс. Кривая 1 не пересекает горизонтальную ось ни при каких значениях параметров  $m_1$  и  $m_2$ .

На рис. 2 показаны области модуляционной неустойчивости. Штриховкой отмечена область неустойчивости при  $m_3 < 0$ ; области, свободные от штриховки, соответствуют области неустойчивости при  $m_3 > 0$ .

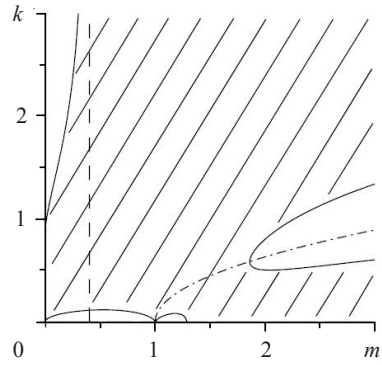


Рис. 2. Зависимость  $k(m_1)$  при фиксированных параметрах  $m_2, m_3$

Изменение границы области неустойчивости для малых значений волнового числа при изменении параметра  $m_2$  изображено на рис. 3 ( $m_2 \rightarrow 1$  – штриховая линия,  $m_2 = m_2^{(1)}$  – сплошная линия,  $m_2 = m_2^{(2)}$  – штрихпунктир;  $1 < m_2^{(1)} < m_2^{(2)}$ ).

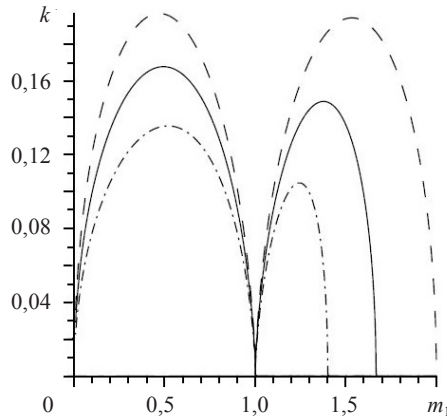


Рис. 3. Зависимость  $k(m_1)$  при изменении параметра  $m_2$

При увеличении значения параметра  $m_2$  область (устойчивости, неустойчивости) сужается, интервал волновых чисел сокращается, параметр  $m_1$  при этом находится в пределах  $0 < m_1 < 1$  и  $1 < m_1 < 1 + 1/m_2$ . При  $m_3 > 0$  область неустойчивости в окрестности кривой  $k = \sqrt{(m_1 - 1)/(m_2 - 1)}$  (на рис. 2 отмечена штрихпунктиром) сужается относительно этой кривой и сдвигается в сторону уменьшения волновых чисел и значений параметра. Для больших значений волнового числа область неустойчивости ограничена прямой  $m_1 = 1/(m_2 - 1)$  (штриховая линия на рис. 2).

### 3. Нелинейные стационарные волны огибающих

Стационарные решения уравнения (9) ищем в виде  $W_{10} = w_{10} \exp i\phi$ , где  $w_{10} = w_{10}(\xi_1)$ ,  $\phi = \phi(\xi_2)$  – вещественные амплитуда и фаза;  $\xi_1 = Z_1 - V_1 T_2$ ,  $\xi_2 = Z_1 - V_2 T_2$  – бегущие переменные;  $V_1, V_2$  – скорости стационарной волны.

Разделяя вещественную и мнимую части в уравнении (9), получим систему уравнений

$$\begin{cases} -w_{10} \frac{\partial \phi}{\partial T_2} + \frac{1}{2} \omega'' \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial Z_1^2} - \frac{1}{2} \omega'' w_{10} \left( \frac{\partial \phi}{\partial Z_1} \right)^2 + q w_{10}^3 = 0, \\ \frac{\partial w_{10}}{\partial T_2} + \omega'' \frac{\partial w_{10}}{\partial Z_1} \frac{\partial \phi}{\partial Z_1} + \frac{1}{2} \omega'' w_{10} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z_1^2} = 0, \end{cases}$$

которая в переменных бегущей волны запишется в виде

$$\begin{cases} w_{10} V_2 \phi' + \frac{1}{2} \omega'' w_{10}'' - \frac{1}{2} \omega'' w_{10} (\phi')^2 + q w_{10}^3 = 0, \\ -V_1 (w_{10}^2)' + \omega'' (w_{10}^2 \phi') = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Интегрируя второе уравнение системы (10), получим

$$\phi' = \frac{1}{\omega''} \left( V_1 + \frac{C}{w_{10}^2} \right), \quad (11)$$

где  $C$  – константа интегрирования. Первое уравнение системы с учетом (11) примет вид

$$w_{10}'' + \frac{V_1(2V_2 - V_1)}{(\omega'')^2} w_{10} + \frac{2q}{\omega''} w_{10}^3 + \frac{2C(V_2 - V_1)}{(\omega'')^2} w_{10}^{-1} - \frac{C^2}{(\omega'')^2} w_{10}^{-3} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) содержит помимо слагаемых уравнения Дуффинга еще два слагаемых в отрицательной степени. Первый интеграл этого уравнения запишется в виде

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dw_{10}}{d\xi_1} \right)^2 + \frac{q}{2\omega''} w_{10}^4 + \frac{V_1(2V_2 - V_1)}{2(\omega'')^2} w_{10}^2 + \frac{2C(V_2 - V_1)}{(\omega'')^2} \ln |w_{10}| + \frac{C^2}{2(\omega'')^2} w_{10}^{-2} = E_0,$$

где константа интегрирования  $E_0$  имеет смысл полной энергии системы.

Фазовый портрет уравнения (12) изображен на рис. 4, где параметры системы принадлежат области модуляционной неустойчивости.

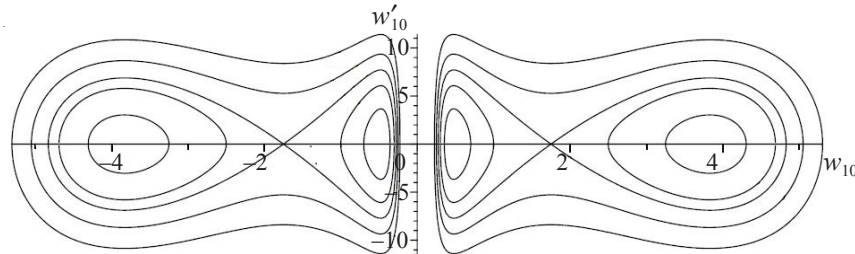


Рис. 4. Фазовый портрет в плоскости  $(w_{10}, w_{10}')$

Фазовый портрет симметричен относительно вертикальной оси, являющейся асимптотой. На правой части портрета находятся два устойчивых положения равновесия типа «центр» и одно неустойчивое положение равновесия типа «седло». Траектории, расположенные вблизи «центров», соответствуют квазигармоническим решениям уравнения (12). Нелинейным периодическим решениям уравнения соответствуют траектории, расположенные внутри сепаратрисных петель вблизи седловой точки. Профили таких решений показаны на рис. 5а и рис. 5б. Траектории, расположенные вокруг сепаратрисных петель вблизи седловой точки, соответствуют сильно нелинейным решениям уравнения, профиль которых показан на рис. 5в.

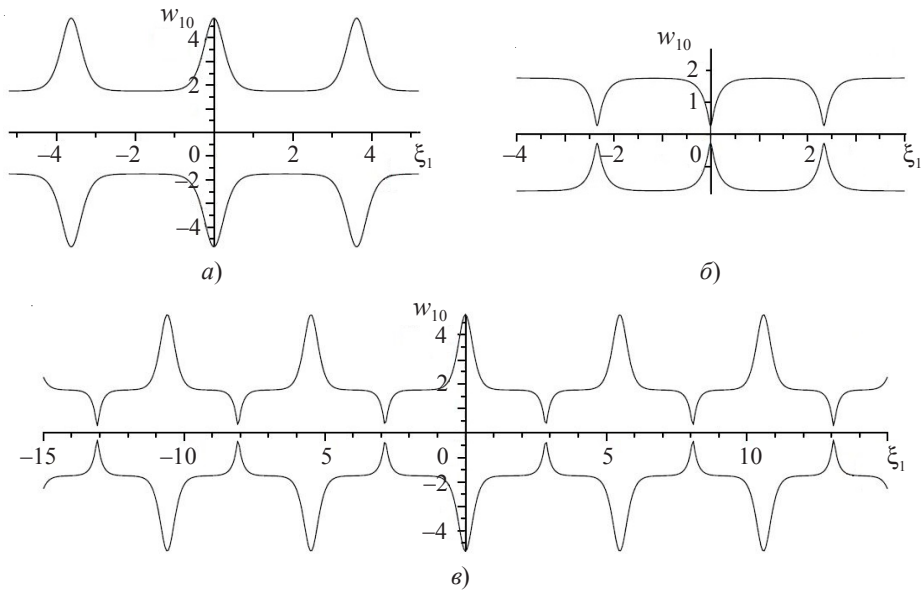


Рис. 5. Зависимости  $w_{10}(\xi_1)$  (периодические решения)

Очевидно, что уравнение (12) имеет два солитонных решения колоколообразного вида с положительной и отрицательной полярностью и отображением в нижнюю полуплоскость. Предельные варианты нелинейных периодических решений, изображенных на рис. 5а и рис. 5б, показаны соответственно на рис. 6а и рис. 6б. На рис. 6б профиль решения напоминает пересечение кинка и антикинка, но в отличие от последних имеет разрыв  $w_{10} = 0$ .

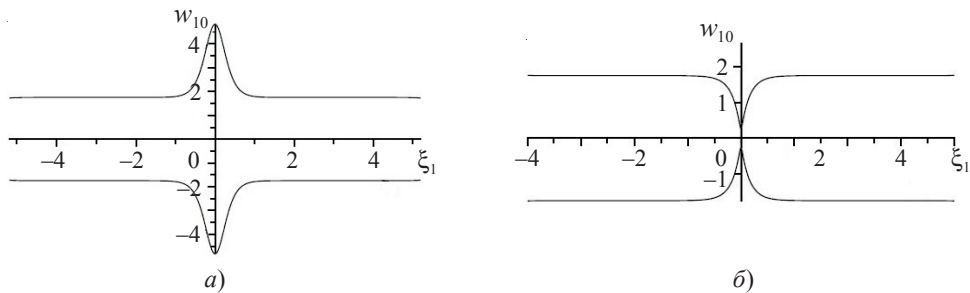


Рис. 6. Зависимости  $w_{10}(\xi_1)$  (солитонные решения)

Если скорости стационарной волны совпадают ( $V_1 = V_2 = V$ ), то уравнение (12) запишется так:



$$w_{10}'' + \frac{V^2}{(\omega'')^2} w_{10} + \frac{2q}{\omega''} w_{10}^3 - \frac{C^2}{(\omega'')^2} w_{10}^{-3} = 0. \quad (13)$$

В пределах области модуляционной неустойчивости коэффициент последнего уравнения при кубическом слагаемом положителен. Исследование уравнения осциллятора с одной нелинейностью в отрицательной степени в зависимости от знаков коэффициентов уравнения приведено в [39]. Из него следует, что в рассматриваемой системе на фазовом портрете имеются два состояния равновесия типа «центр», расположенных симметрично относительно вертикальной оси. Решениями уравнения (13) являются квазигармонические и нелинейные периодические решения.

Считаем, что фазовая модуляция не вызывает амплитудную модуляцию, то есть в выражении (11) константа интегрирования равна нулю ( $C = 0$ ). Уравнение (12) сводится к уравнению Дуффинга

$$w_{10}'' + \frac{V_1(2V_2 - V_1)}{(\omega'')^2} w_{10} + \frac{2q}{\omega''} w_{10}^3 = 0, \quad (14)$$

описывающему колебания ангармонического осциллятора с кубической нелинейностью. Исследование уравнения (14) на наличие сепаратрисных решений и его решения при различных значениях коэффициентов также приведены в [39].

Решения уравнения (9) в виде солитонов огибающих при  $V_1 > 2V_2$ ,  $2q/\omega'' > 0$  и  $V_1 < 2V_2$ ,  $2q/\omega'' < 0$  имеют, соответственно, вид:

$$W_{10(1)} = a_{m(1)} \operatorname{sech} \left( \frac{\xi_1}{\Delta_1} \right) \exp \left( i \frac{V_1}{\omega''} \xi_2 \right), \quad (15)$$

$$W_{10(2)} = a_{m(2)} \operatorname{th} \left( \frac{\xi_1}{\Delta_2} \right) \exp \left( i \frac{V_1}{\omega''} \xi_2 \right); \quad (16)$$

$$a_{m(i)} = \frac{1}{\Delta_i} \sqrt{\left| \frac{\omega''}{q} \right|}, \quad \Delta_1 = \frac{|\omega''|}{\sqrt{V_1(V_1 - 2V_2)}}, \quad \Delta_2 = \frac{\sqrt{2} |\omega''|}{\sqrt{V_1(2V_2 - V_1)}}$$

– амплитуды и ширины солитонов огибающих. Профили решений (15), (16) в некоторый момент времени изображены на рис. 7.

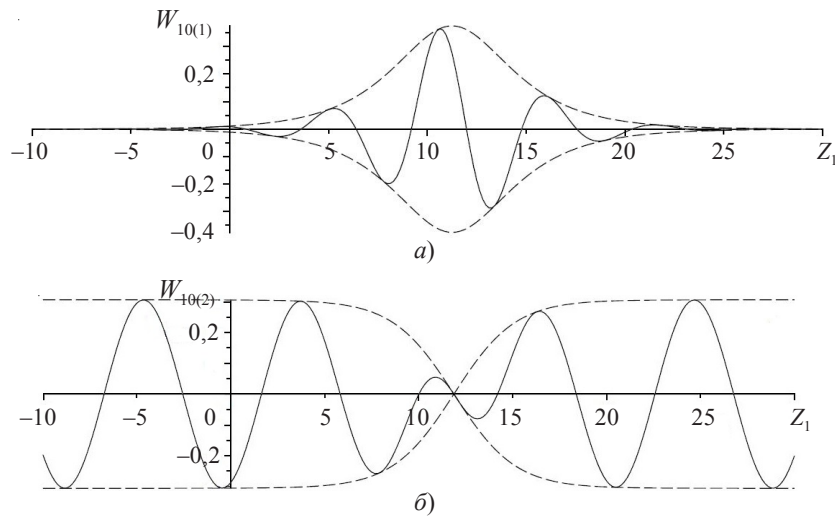


Рис. 7. Зависимости  $W_{10(1)}(Z_1)$  (а) и  $W_{10(2)}(Z_1)$  (б)

В границах области модуляционной неустойчивости справедливо только решение (15). Ширина «светлого» солитона обратно пропорциональна его амплитуде

$$\Delta_1 = \frac{1}{a_{m(1)}} \sqrt{\frac{\omega''}{q}}. \quad (17)$$

Амплитуды и ширины двух «светлых» солитонов ведут себя неоднозначно относительно друг друга. На рис. 8 сплошная линия при  $a_{m(1)}^{(1)} = a_{m(1)}^{(2)}$  изображает смещение точки пересечения амплитуд солитонов, пунктиром отмечена граница области неустойчивости, штриховыми линиями при  $\Delta_1^{(1)} = \Delta_1^{(2)}$  показано смещение точки пересечения ширины «светлых» солитонов.

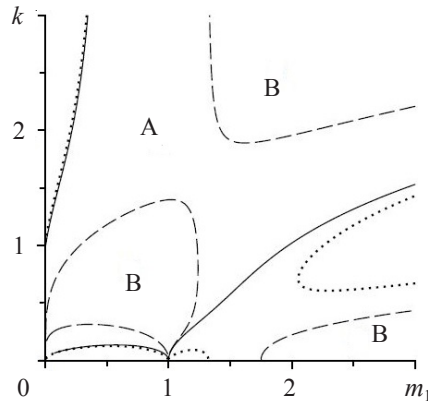


Рис. 8. Зависимости  $k(m_1)$ ,  $m_3 < 0$

В области А (ограничена сплошной линией на рис. 8) для амплитуд солитонов выполняется неравенство  $a_{m(1)}^{(1)} > a_{m(1)}^{(2)}$ . В областях В (границы областей отмечены штриховыми линиями) для ширины солитонов справедливо неравенство  $\Delta_1^{(1)} < \Delta_1^{(2)}$ . В соседних с А и В областях амплитуды и ширины солитонов удовлетворяют, соответственно, неравенствам  $a_{m(1)}^{(1)} < a_{m(1)}^{(2)}$  и  $\Delta_1^{(1)} > \Delta_1^{(2)}$ .

Отношение ширины солитона огибающей, определяющейся выражением (17), к длине квазигармонической несущей волны  $\lambda$  имеет вид

$$\frac{\Delta_1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{1-m}} \quad (18)$$

и зависит только от отношения скоростей  $m = 2V_2/V_1$ .

Соотношение (18) показывает количество длин квазигармонической волны, укладывающихся в ширине солитона огибающей. Величина отношения увеличивается при стремлении  $m \rightarrow 1$  и уменьшается до  $1/(2\pi)$  при стремлении  $m \rightarrow 0$ . Физически реализуемыми являются случаи  $\Delta_1/\lambda > 5$ .

Отдельного исследования заслуживает вопрос о возможности стабилизации модуляционной неустойчивости (демодуляции) с помощью изменения параметров упругого основания. Ранее [40] такой процесс был описан применительно к плоской сдвиговой волне, распространяющейся в нелинейной пластине, лежащей на упругом основании, параметры которого изменяются по закону бегущей волны.

## Заключение

Показано, что учет внешнего нелинейно-упругого основания влияет на распространение квазигармонических волн в балке Тимошенко, совершающей поперечные колебания.

В условиях мягкой нелинейности модуляционная неустойчивость возможна для волн, описываемых верхней дисперсионной ветвью во всем диапазоне волновых чисел (частот) и при любых значениях параметров системы. Для волн, описываемых нижней дисперсионной ветвью, диапазоны волновых чисел (частот), соответствующие модуляционной неустойчивости, зависят от параметров, характеризующих линейную жесткость основания и упругие свойства материала стержня.

Для жесткой нелинейности модуляционная неустойчивость проявится только у волн, описываемых нижней дисперсионной ветвью. Область неустойчивости зависит от параметров системы. С увеличением коэффициента Пуассона интервал частот уменьшается в области длинных волн и увеличивается в области коротких волн.

Тип нелинейности («мягкая», «жесткая») внешнего упругого основания влияет на существование локализованных волн огибающих и форму периодических волн огибающих, распространяющихся в балке Тимошенко. В области модуляционной неустойчивости возможно распространение двух «светлых» солитонов в случае мягкой нелинейности и одного «светлого» солитона в случае жесткой нелинейности основания.

### Список литературы

1. *Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. Т. 1: Колебания линейных систем.* Под ред. В.В. Бологина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
2. Ellington J.P. The beam on discrete elastic support. *Bulletin of International Railway Congress Association*. 1957. Vol. 34. No 12. P. 933–941.
3. *Noise and Vibration from High Speed Trains.* Ed. V.V. Krylov. London: Thomas Telford Publishing, 2001. 436 p.
4. Иванченко И.И. *Динамика транспортных сооружений: высокоскоростные подвижные, сейсмические и ударные нагрузки.* М.: Наука, 2011. 574 с.
5. Метрикин А.В., Веричев С.Н., Вострухов А.В. *Фундаментальные задачи высокоскоростного наземного транспорта.* Saarbrücken, Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2014. 208 с.
6. *Ground Vibrations from High-Speed Railway: Prediction and Mitigation.* Ed. V.V. Krylov. London: ICE Publishing, 2019. 368 p.
7. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека. *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2015. №1. С. 3–8.
8. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Каныгин И.И. Оценка резонансоопасных гармоник при колебаниях упругой направляющей с движущимся по ней двухопорным объектом. *Проблемы прочности и пластичности.* 2015. Т. 77. № 4. С. 412–424. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-4-412-424>.
9. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. Расчет изгибно-крутильных колебаний рельсовой направляющей ракетного трека. *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2016. №3. С. 25–27.
10. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г., Одзериho И.А. Условие на скользящем контакте в анализе устойчивости движения ступени на ракетном треке. *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2018. №3. С. 21–27. DOI: 10.7868/S0235711918030033.
11. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Studies in Applied Mathematics*. 1970. Vol. XLIX. No 1. P. 45–57. DOI: 10.1002/sapm197049145.

12. Achenbach J.D., Sun C.T. Moving load on a flexible supported Timoshenko beam. *International Journal of Solid and Structures*. 1965. Vol. 1. Iss. 4. P. 353–370. DOI: 10.1016/0020-7683(65)90001-6.
13. Слепьян Л.И. *Нестационарные упругие волны*. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
14. Вольмир А.С. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. М.: Наука, 1972. 432 с.
15. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. *Неклассические теории стержней, пластин и оболочек*. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
16. Abbas B.A.H., Thomas J. Dynamic stability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*. 1978. Vol. 60. Iss. 1. P. 33–44. DOI:10.1016/0022-460X(78)90399-1.
17. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. *Введение в акустическую динамику машин*. М.: Наука, 1979. 296 с.
18. Сагомоян А.Я. *Волны напряжения в сплошных средах*. М.: Изд-во МГУ, 1985. 416 с.
19. Yokoyama T. Parametric instability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation. *Computers and Structures*. 1988. Vol. 28. No 2. P. 207–216. DOI: 10.1016/0045-7949(88)90041-7.
20. Kar R.C., Sujata T. Parametric instability of Timoshenko beam with thermal gradient resting on a variable Pasternak foundation. *Computers and Structures*. 1990. Vol. 36. Iss. 4. P. 659–665. DOI: 10.1016/0045-7949(90)90081-C.
21. Lee S.Y., Kuo Y.H., Lin F.Y. Stability of a Timoshenko beam resting on a Winkler elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*. 1992. Vol. 153. Iss. 2. P. 193–202. DOI: 10.1016/S0022-460X(05)80001-X.
22. Felszeghy S.F. The Timoshenko beam on an elastic foundation and subject to a moving step load. Part I: Steady-state response. *Journal of Vibration and Acoustics*. 1996. Vol. 118. Iss. 3. P. 277–284. DOI: 10.1115/1.2888178.
23. Kim J.H., Choo Y.S. Dynamic stability of a free-free Timoshenko beam subjected to a pulsating follower force. *Journal of Sound and Vibration*. 1998. Vol. 216. Iss. 4. P. 623–636. DOI: 10.1006/jsvi.1998.1717.
24. Lee H.P. Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass. *Applied Acoustics*. 1998. Vol. 55. Iss. 3. P. 203–215. [https://doi.org/10.1016/S0003-682X\(97\)00097-2](https://doi.org/10.1016/S0003-682X(97)00097-2).
25. Suiker A.S.J., de Borst R., Esveld C. Critical behavior of a Timoshenko beam half plane system under a moving load. *Archive of Applied Mechanics*. 1998. Vol. 68. Iss. 3-4. P. 158–168. DOI: 10.1007/s004190050153.
26. Wu T.X., Thompson D.J. A double Timoshenko beam model for vertical vibration analysts of railway track at high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*. 1999. Vol. 224. Iss. 2. P. 329–348. DOI:10.1006/JSVI.1999.2171.
27. Chen Y.H., Huang Y.H. Dynamic stiffness of infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation in moving co-ordinate. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000. Vol. 48. Iss. 1. P. 1–18. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000510\)48:1<1::AID-NME858>3.0.CO;2-G](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000510)48:1<1::AID-NME858>3.0.CO;2-G).
28. Chen Y.H., Huang Y.H., Shih C.T. Response of an infinite Timoshenko beam on a viscoelastic foundation to a harmonic moving load. *Journal of Sound and Vibration*. 2001. Vol. 241. No 5. P. 809–824. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3333>.
29. Весницкий А.И. *Волны в системах с движущимися границами и нагрузками*. М.: Наука, Физматлит, 2001. 320 с.
30. Metrikine A.V., Verichev S.N. Instability of vibrations of a moving two-mass oscillator on a flexibly supported Timoshenko beam. *Archive of Applied Mechanics*. 2001. Vol. 71. P. 613–624. DOI: 10.1007/s004190100177.
31. Verichev S.N. *Instability of a Vehicle Moving on an Elastic Structure*. Delft, Netherlands: Delft University Press, 2002. 190 p.
32. Suiker A.S.J. *The Mechanical Behaviour of Ballasted Railway Tracks*. Delft, Netherlands: Delft University Press, 2002. 236 p.
33. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2008. №3. С. 30–36.

34. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Дисперсия и пространственная локализация изгибных волн, распространяющихся в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Изв. РАН. МТТ*. 2021. №4 (в печати).
35. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. *Нелинейные волны*. М.: Ленанд, 2017. 312 с.
36. Zakharov V.E., Ostrovsky L.A. Modulation instability: The beginning. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2009. Vol. 238. Iss. 5. P. 540–548. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.002.
37. Lighthill J. *Waves in Fluids*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 504 p.
38. Островский Л.А., Потапов А.И. *Введение в теорию модулированных волн*. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
39. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
40. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Сандалов В.М. Демодуляция сдвиговой волны в нелинейной пластине, лежащей на упругом основании, параметры которого изменяются по закону бегущей волны. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Т. 75. №4. С. 268–272. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-4-268-272>.

#### References

1. *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik. V 6 t. T. 1: Kolebaniya lineynykh sistem [Vibrations in Technology: Handbook. In 6 vol. Vol. 1. Oscillations of Linear Systems]*. Ed. V.V. Bolotin. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1999. 504 p. (In Russian).
2. Ellington J.P. The beam on discrete elastic support. *Bulletin of International Railway Congress Association*. 1957. Vol. 34. No 12. P. 933–941.
3. *Noise and Vibration from High Speed Trains*. Ed. V.V. Krylov. London. Thomas Telford Publishing. 2001. 436 p.
4. Ivanchenko I.I. *Dinamika transportnykh sooruzheniy: vysokoskorostnye podvizhnye, seysmicheskie i udarnye nagruzki [Dynamics of Transport Facilities: High-Speed Mobile, Seismic and Impact Loads]*. Moscow. Nauka Publ. 2011. 574 p. (In Russian).
5. Metrikine A.V., Verichev S.N., Vostrukhov A.V. *Fundamental'nye zadachi vysokoskorostnogo nazemnogo transporta [Fundamental Challenges for High-Speed Land Transport]*. Saarbrucken, Germany. LAP Lambert Academic Publishing. 2014. 208 p. (In Russian).
6. *Ground Vibrations from High-Speed Railway: Prediction and Mitigation*. Ed. V.V. Krylov. London. ICE Publishing. 2019. 368 p.
7. Butova S.V., Gerasimov S.I., Kamchatnyi V.G., Erofeev V.I. Stability of high-speed objects moving along a rocket track guide. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2015. Vol. 44. No 1. P. 1–5. DOI: 10.3103/S1052618815010021.
8. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kamchatnyi V.G., Kanygin I.I. Otsenka rezonansoopasnykh garmonik pri kolebaniyakh uprugoy napravlyayushchey s dvizhushchimsya po ney dvukhopornym ob'ektom [Estimation of resonance- dangerous harmonics arising in a vibrating elastic guide along which an object with two supports moves]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2015. Vol. 77. No 4. P. 412–424. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2015-77-4-412-424> (In Russian).
9. Gerasimov S.I., Erofeev V.I. Calculation of flexural-and-torsional vibrations of a rocket track rail. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016. Vol. 45. No 3. P. 211–213. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618816030055>.
10. Gerasimov S. I., Erofeev V. I., Kamchatnyi V. G., Odzerikho I. A. The sliding contact condition in stability analysis of stage motion for a rocket sled track facility. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2018. Vol. 47. No 3. P. 221–226. DOI: <https://doi.org/10.3103/S105261881803007X>.
11. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Studies Appl. Math.* 1970. Vol. XLIX. No 1. P. 45–57. DOI: 10.1002/sapm197049145.
12. Achenbach J.D., Sun C.T. Moving load on a flexible supported Timoshenko beam. *Int. J. Solids Struct.* 1965. Vol. 1. Iss. 4. P. 353–370. DOI: 10.1016/0020-7683(65)90001-6.
13. Slepyan L.I. *Nestatsionarnye uprugie volny [Non-Stationary Elastic Waves]*. Leningrad. Sudostroenie Publ. 1972. 376 p. (In Russian).

14. Volmir A.S. *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow. Nauka Publ. 1972. 432 p. (In Russian).
15. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. *Neklassicheskie teorii sterzhney, plastin i obolochek* [Non-Classical Theories of Rods, Plates and Shells]. Moscow. VINITI Publ. 1973. 272 p. (In Russian).
16. Abbas B.A.H., Thomas J. Dynamic stability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation. *J. Sound Vib.* 1978. Vol. 60. Iss. 1. P. 33–44. DOI:10.1016/0022-460X(78)90399-1.
17. Artobolevskiy I.I., Bobrovnikskiy Yu.I., Genkin M.D. *Vvedenie v akusticheskuyu dinamiku mashin* [Introduction to the Acoustic Dynamics of Machines]. Moscow. Nauka Publ. 1979. 296 p. (In Russian).
18. Sagomonyan A.Ya. *Volny napryazheniya v sploshnykh sredakh* [Stress Waves in Continuous Media]. Moscow. MGU Publ. 1985. 416 p. (In Russian).
19. Yokoyama T. Parametric instability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation. *Comp. Struct.* 1988. Vol. 28. No 2. P. 207–216. DOI: 10.1016/0045-7949(88)90041-7.
20. Kar R.C., Sujata T. Parametric instability of Timoshenko beam with thermal gradient resting on a variable Pasternak foundation. *Comp. Struct.* 1990. Vol. 36. Iss. 4. P. 659–665. DOI: 10.1016/0045-7949(90)90081-C.
21. Lee S.Y., Kuo Y.H., Lin F.Y. Stability of a Timoshenko beam resting on a Winkler elastic foundation. *J. Sound Vib.* 1992. Vol. 153. Iss. 2. P. 193–202. DOI: 10.1016/S0022-460X(05)80001-X.
22. Felszeghy S.F. The Timoshenko beam on an elastic foundation and subject to a moving step load. Part 1: Steady-state response. *J. Vib. Acoust.* 1996. Vol. 118. Iss. 3. P. 277–284. DOI: 10.1115/1.2888178.
23. Kim J.H., Choo Y.S. Dynamic stability of a free-free Timoshenko beam subjected to a pulsating follower force. *J. Sound Vib.* 1998. Vol. 216. Iss. 4. P. 623–636. DOI: 10.1006/jsvi.1998.1717
24. Lee H.P. Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass. *Appl. Acoust.* 1998. Vol. 55. Iss. 3. P. 203–215. [https://doi.org/10.1016/S0003-682X\(97\)00097-2](https://doi.org/10.1016/S0003-682X(97)00097-2).
25. Suiker A.S.J., de Borst R., Esveld C. Critical behavior of a Timoshenko beam half plane system under a moving load. *Arch. Appl. Mech.* 1998. Vol. 68. Iss. 3-4. P. 158–168. DOI: 10.1007/s004190050153.
26. Wu T.X., Thompson D.J. A double Timoshenko beam model for vertical vibration analysts of railway track at high frequencies. *J. Sound Vib.* 1999. Vol. 224. Iss. 2. P. 329–348. DOI:10.1006/JSVI.1999.2171.
27. Chen Y.H., Huang Y.H. Dynamic stiffness of infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation in moving co-ordinate. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2000. Vol. 48. Iss. 1. P. 1–18. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000510\)48:1<::AID-NME858>3.0.CO;2-G](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000510)48:1<::AID-NME858>3.0.CO;2-G).
28. Chen Y.H., Huang Y.H., Shih C.T. Response of an infinite Timoshenko beam on a viscoelastic foundation to a harmonic moving load. *J. Sound Vib.* 2001. Vol. 241. No 5. P. 809–824. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3333>.
29. Vesnitskiy A.I. *Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami i nagruzkami* [Waves in Systems with Moving Boundaries and Loads]. Moscow. Nauka Publ. Fizmatlit Publ. 2001. 320 p. (In Russian).
30. Metrikine A.V., Verichev S.N. Instability of vibrations of a moving two-mass oscillator on a flexibly supported Timoshenko beam. *Arch. Appl. Mech.* 2001. Vol. 71. P. 613–624. DOI: 10.1007/s004190100177.
31. Verichev S.N. *Instability of a Vehicle Moving on an Elastic Structure*. Delft, Netherlands. Delft University Press. 2002. 190 p.
32. Suiker A.S.J. *The Mechanical Behaviour of Ballasted Railway Tracks*. Delft, Netherlands. Delft University Press. 2002. 236 p.
33. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., Semerikova N.P. Nonsinusoidal bending waves in Timoshenko beam lying on nonlinear elastic foundation. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability.* 2008. Vol. 37. No 3. P. 230–235. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618808030059>.
34. Erofeev V.I., Leontyeva A.V. Dispersiya i prostranstvennaya lokalizatsiya izgibnykh voln, rasprostranyayushchikhsya v balke Timoshenko, lezhashchey na nelineyno-uprugom osnovanii [Dispersion and spatial localization of flexural waves propagating in a Timoshenko beam lying on

a nonlinear elastic foundation]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela [Mech. Solids]*. 2021. No 4 (In press). (In Russian).

35. Ryskin N.M., Trubetskov D.I. *Nelineynye volny [Nonlinear Waves]*. Moscow. Lenand Publ. 2017. 312 p. (In Russian).

36. Zakharov V.E., Ostrovsky L.A. Modulation instability: The beginning. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2009. Vol. 238. Iss. 5. P. 540–548. DOI: 10.1016/j.physd.2008.12.002.

37. Lighthill J. *Waves in Fluids*. Cambridge. Cambridge University Press. 1978. 504 p.

38. Ostrovskiy L.A., Potapov A.I. *Vvedenie v teoriyu modulirovannykh voln [Introduction to the Theory of Modulated Waves]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2003. 400 p. (In Russian).

39. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost [Waves in the Rods. Dispersion. Dissipation. Non-linearity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 208 p. (In Russian).

40. Erofeev V.I., Kolesov D.A., Sandalov V.M. Demodulyatsiya sdvigovoy volny v nelineynoy plastine, lezhashchey na uprugom osnovanii, parametry kotorogo izmenyayutsya po zakonu begushchey volny [Demodulation of a shear wave in a nonlinear plate resting on an elastic foundation with the parameters changing following the running wave law]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2013. Vol. 75. No 4. P. 268–272. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-4-268-272> (In Russian).

## **QUASI-HARMONIC BENDING WAVE, DISTRIBUTING IN THE BALK OF TIMOSHENKO, LYING ON A NONLINEAR ELASTIC BASE**

**Erofeev V.I.<sup>1,2</sup>, Leontieva A.V.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University  
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences – Branch  
of Federal Research Center “Institute of Applied Physics of the RAS”,  
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

In this paper, we consider the modulation instability of a quasi-harmonic flexural wave propagating in a homogeneous beam fixed on a nonlinear elastic foundation. The dynamic behavior of the beam is determined by Timoshenko's theory. Timoshenko's model, refining the technical theory of rod bending, assumes that the cross-sections remain flat, but not perpendicular to the deformable midline of the rod; normal stresses on sites parallel to the axis are zero; the inertial components associated with the rotation of the cross sections are taken into account. The uniqueness of the model lies in the fact that, allowing a good description of many processes occurring in real structures, it remains quite simple, accessible for analytical research. The system of equations describing the bending vibrations of the beam is reduced to one nonlinear fourth-order equation for the transverse displacements of the beam particles. The nonlinear Schrödinger equation, one of the basic equations of nonlinear wave dynamics, is obtained by the method of many scales. Regions of modulation instability are determined according to the Lighthill criterion. It is shown that the boundaries of these areas shift when the parameters characterizing the elastic properties of the beam material and the nonlinearity of the base change. Nonlinear stationary envelope waves are considered. An equation that generalizes the Duffing equation, which contains two additional terms in negative powers (first and third), is obtained and qualitatively analyzed. Solutions of the Schrödinger equation in the form of envelope solitons are found and the dependences of their main parameters (amplitude, width) on the parameters of the system are analyzed. The dynamics of the points of intersection of the amplitudes and widths of "light" solitons in the case of soft nonlinearity of the base is shown within the region of modulation instability.

*Keywords:* modulation instability, flexural wave, Timoshenko beam, nonlinear elastic base, envelope solitons.