

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-1-49-60

ОПТИМАЛЬНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ*

© 2021 г.

Афанасьев В.С., Баничук Н.В.

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва, Российская Федерация*

banichuk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 05.11.2020

Изучается процесс гашения поперечных колебаний вращающегося в горизонтальной плоскости упругого стержня, закрепленного на одном из его концов. Предполагается, что стержень вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью и совершает поперечные колебания в вертикальной плоскости, колебания предполагаются малыми по амплитуде. Поперечные колебания вращающегося стержня совершаются под внешним механическим воздействием. С применением классической балочной модели поперечные колебания описываются функцией смещений и рассматриваются во вращающейся плоскости. Выведены необходимые условия оптимальности, применяемые для подавления упругих колебаний на конечном интервале времени. Задача оптимального подавления поперечных колебаний, вызванных начальными возмущениями, сформулирована в виде вариационной задачи с ограничениями, которые учитывают подавляющее воздействие на стержень. Ограничивающие условия представлены в виде неравенств. С введением дополнительной переменной эти ограничения сводятся к стандартному интегральному равенству, при этом учитываются энергетические ограничения, налагаемые на управляющие воздействия. Предложенный итерационный алгоритм решения сформулированной задачи является численно-аналитическим алгоритмом и заключается в минимизации квадратичного критерия качества. Этот критерий характеризует процесс гашения колебаний и позволяет реализовать улучшающие вариации. В результате проводимых операций выяснена зависимость процесса гашения колебаний от определяющих параметров, таких как угловая скорость вращения, изопараметрическая энергетическая константа и протяженность рассматриваемого процесса подавления колебаний во времени. Приведен пример, иллюстрирующий реализацию предложенного алгоритма и показывающий эффективность указанного метода подавления поперечных колебаний.

Ключевые слова: вращающийся стержень, гашение колебаний, оптимизация подавляющих воздействий.

* Выполнено по теме Госзадания (номер госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант №20-08-00082а).

Введение

Изучение поперечных колебаний движущихся тонкостенных элементов деформируемых конструкций в широком диапазоне скоростей, материальных свойств и внешних воздействий имеет теоретический и прикладной интерес. Это объясняется тем, что соответствующие динамические процессы часто сопровождаются явлениями неустойчивости и разрушениями различного вида.

В некоторых публикациях, посвященных исследованиям продольно движущихся и совершающих поперечные колебания элементов конструкций, состоящих из упругих и вязкоупругих материалов, находящихся под влиянием внешних воздействий, широко использовались математические модели продольно движущихся струн, стержней, мембран и пластин, характеризующихся упругим, вязкоупругим и термоупругим поведением [1–10]. Гидротермоупругому и аэроупругому взаимодействиям продольно движущихся тонкостенных элементов конструкций с потоком жидкости (газа) посвящены статьи [11–15].

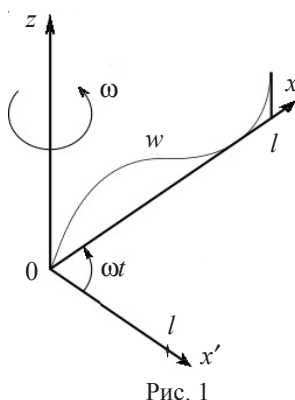
Проблемы оптимального подавления поперечных колебаний изучались в [16–19] как для случая продольно движущихся термоупругих панелей, так и для случая упругой панели, совершающей продольное движение в потоке жидкости. При этом исследовались активные способы гашения колебаний за счет использования внешних взаимодействий (актюаторных систем) и пассивные способы подавления возмущений при создании внутренних демпфирующих структур.

Для вращающихся тонкостенных элементов конструкций (струн, балок, дисков и др.) из упругих, термоупругих и вязкоупругих материалов изучение малых поперечных колебаний отражено в [20–24] в рамках мембранной модели, пригодной для описания процесса колебаний при больших угловых скоростях вращения. Устойчивость вращающегося диска изучалась в рамках пластинчатой модели в [25–27] (см. также [28, 29]) с учетом приложения к диску внешних поперечных воздействий.

В настоящей статье предложен итерационный алгоритм решения задачи оптимального подавления поперечных колебаний, основанный на применении метода Галеркина, и выведены условия оптимальности, применяемые для подавления упругих колебаний на конечном интервале времени.

Основные соотношения задачи оптимизации

Рассматривается вращающийся вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω упругий стержень (рис. 1), закрепленный в точке $x = 0$, колебания



происходят в вертикальной плоскости и описываются функцией смещений $w = w(x, t)$ во вращающейся плоскости xz . Считается, что колебания вращающегося стержня являются малыми и совершаются под внешним механическим воздействием $q(x, t)$. Обозначая массу единицы длины стержня через ρ , а через EI цилиндрическую (балочную) жесткость, представим уравнение колебаний, происходящих во вращающейся плоскости xz , в виде

$$\rho w_{tt} - \frac{\rho \omega^2}{2} [(l^2 - x^2) w_x]_x + EI w_{xxxx} = q(x, t), \quad (1)$$

где l, E, I – соответственно длина стержня, модуль Юнга, момент инерции поперечного сечения, а нижними индексами x и t обозначены частные производные по соответствующим переменным. Используя обозначения для постоянных множителей и функции интенсивности нагрузки

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2}, \quad \beta = \frac{EI}{\rho}, \quad g(x, t) = \frac{q(x, t)}{\rho}, \quad (2)$$

запишем уравнение колебаний в удобном для проведения дальнейших операций виде:

$$L(w) = w_{tt} - \alpha[(l^2 - x^2)w_x]_x + \beta w_{xxxx} = g(x, t). \quad (3)$$

Уравнение (3) рассматривается при следующих краевых и начальных условиях:

$$w|_{x=0} = w_x|_{x=0} = 0, \quad w_{xx}|_{x=l} = w_{xxx}|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

$$w|_{t=0} = g_1(x), \quad w_t|_{t=0} = g_2(x). \quad (5)$$

Краевые условия (4) выполняются при $t \in [0, t_f]$, а начальные условия (5) задают распределения перемещений и скоростей при $x \in [0, l]$. Здесь $g_1(x), g_2(x)$ – заданные функции, а t_f – время окончания рассматриваемого процесса гашения колебаний. Заметим, что краевые условия при $x = 0$ соответствуют жесткому закреплению, а условия при $x = l$ предполагают отсутствие моментов и перерезывающих сил на свободном крае стержня.

Функция $g(x, t)$ рассматривается далее в качестве управляющего воздействия, реализующего подавление колебаний стержня. Качество процесса подавления колебаний вращающегося стержня оценивается значением функционала

$$J_g = \int_0^l (\alpha_1 w^2 + \alpha_2 w_t^2)|_{t=t_f} dx, \quad (6)$$

зависящего от перемещений $w(x, t_f)$ и скоростей $w_t(x, t_f)$ в конечный момент времени $t = t_f$. Параметры $\alpha_1 \geq 0$ и $\alpha_2 \geq 0$ считаются заданными.

На подавляющее воздействие $g(x, t)$ налагается энергетическое ограничение в виде неравенства

$$J_\mu = \int_0^l \int_0^{t_f} g^2(x, t) dx dt \leq M_0, \quad (7)$$

где $M_0 > 0$ – заданная постоянная ограничения энергии.

Подавление колебаний в оптимизационной постановке заключается в отыскании управляющего воздействия $g(x, t)$, удовлетворяющего энергетическому неравенству (7) и минимизирующего квадратичный функционал качества (6).

Условия оптимальности

Для минимизации рассматриваемого функционала качества (6) выведем условия оптимальности, варьируя с этой целью основные соотношения начально-краевой задачи:

$$\delta w|_{t=0} = 0, \quad \delta w_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, l], \quad (8)$$

$$\delta w|_{x=0} = \delta w_x|_{x=0} = 0, \quad \delta w_{xx}|_{x=l} = \delta w_{xxx}|_{x=l} = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (9)$$

$$\delta L(w) = L(\delta w) = (\delta w)_t - \alpha[(l^2 - x^2)(\delta w)_x]_x + \beta(\delta w)_{xxxx} = \delta g. \quad (10)$$

Используем также выражения для вариаций минимизируемого функционала δJ_g и ограничения (7), записанного предварительно в виде равенства при помощи введения вспомогательной величины θ [30–32]:

$$J_\mu - M_0 + \theta^2 = 0. \quad (11)$$

Будем иметь

$$\delta J_g = 2 \int_0^l (\alpha_1 w \delta w + \alpha_2 w_t \delta w_t) \Big|_{t=t_f} dx, \quad (12)$$

$$\delta(J_\mu - M_0 + \theta^2) = 2 \int_0^l \int_0^{t_f} g \delta g dx dt + 2\theta \delta \theta = 0. \quad (13)$$

Введем в рассмотрение сопряженную переменную $v(x, t)$, удовлетворяющую граничным условиям:

$$v|_{x=0} = v_x|_{x=0} = 0, \quad v_{xx}|_{x=l} = v_{xxx}|_{x=l} = 0, \quad (14)$$

совпадающим с граничными условиями, наложенными на переменную w в (4). Затем умножим уравнение в вариациях (10) на переменную $v(x, t)$ с последующим интегрированием произведения по t и по x . Учитывая начально-краевые условия (8) и (9) и выполняя интегрирование по частям, получим

$$\delta J_a = \int_0^{t_f} \int_0^l v [L(\delta w) - \delta g] dx dt = \int_0^{t_f} \int_0^l \{ [L(v)] \delta w - v \delta g \} dx dt + \int_0^l (v \delta w_t - v_t \delta w) \Big|_{t=t_f} dx. \quad (15)$$

Необходимое условие оптимальности процесса гашения колебаний вращающегося стержня сводится к равенству нулю вариации расширенного функционала Лагранжа J , то есть

$$\delta J = \delta J_g + \delta J_a + \mu \left(2 \int_0^{t_f} \int_0^l g \delta g dx dt + 2\theta \delta \theta \right) = 0, \quad (16)$$

где μ – множитель Лагранжа, соответствующий учету энергетического неравенства (7). Подстановка выражений (12), (13), (15) в уравнение (16) и учет произвольности вариаций δg , δw и вариации $\delta \theta$ приводит к необходимому условию оптимальности

$$g(x, t) = \frac{1}{2\mu} v(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t \in [0, t_f], \quad (17)$$

если ограничение (7) выполняется со знаком строгого равенства и, следовательно, $\theta = 0$. В этом случае

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} \int_0^l v^2(x, t) dx dt. \quad (18)$$

В случае строгого неравенства в (7) величина вспомогательной переменной θ в (11) отлична от нуля, а из необходимого условия экстремума ($\mu \theta = 0$), которое получается из (16), следует, что $\mu = 0$.

Из условия обращения в ноль полной (расширенной) вариации в (16) также получим однородное дифференциальное уравнение в частных производных для сопряженной переменной

$$L(v) = v_{tt} - \alpha[(l^2 - x^2)v_x]_x + \beta v_{xxxx} = 0, \quad (19)$$

удовлетворяющей условиям в конечный момент времени $t = t_f$ рассматриваемого временного интервала $[0, t_f]$:

$$v|_{t=t_f} = -2\alpha_2 w_t|_{t=t_f}, \quad v_t|_{t=t_f} = 2\alpha_1 w|_{t=t_f}, \quad x \in [0, l]. \quad (20)$$

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального гашения колебаний вращающегося стержня сводится к решению связанных начально-краевой задачи для $w(x, t)$ и краевой задачи для $v(x, t)$ с условиями в конечный момент времени $t = t_f$. При этом оптимальное демпфирующее воздействие $g(x, t)$ находится с применением условий экстремума.

Итерационный алгоритм

Развиваемый итерационный алгоритм определения управляющего воздействия основывается на применении метода Галеркина [33, 34]. Представим искомые распределения поперечных перемещений стержня $w(x, t)$ и сопряженной переменной $v(x, t)$ в виде рядов

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} q_n(t) \Psi_n(x), \quad v(x, t) = \sum_{n=1}^{n_0} s_n(t) \Psi_n(x), \quad (21)$$

где $q_n(t), s_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots, n_0$) – неизвестные функции времени, подлежащие определению с использованием уравнений, определяющих w и v , а $\Psi_n(x)$ – функции формы, удовлетворяющие граничным условиям (4) для w и аналогичным условиям (14) для v . Получим обыкновенные дифференциальные уравнения для координатных функций метода Галеркина $q_n(t)$ и $s_n(t)$, подставив выражения (21) в соответствующие динамические уравнения (3), (19) и умножив получающиеся соотношения на $\Psi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$) с последующим интегрированием по x ($0 \leq x \leq l$). Выполнив стандартные операции [35], будем иметь

$$\sum_{n=1}^{n_0} \{A_{jn}(q_n)_{tt} + (\beta C_{jn} - \alpha B_{jn})q_n\} - G_j(t) = 0, \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} \{A_{jn}(s_n)_{tt} + (\beta C_{jn} - \alpha B_{jn})s_n\} = 0, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} A_{jn} &= \int_0^l \Psi_n \Psi_j dx, & B_{jn} &= \int_0^l [(l^2 - x^2) \Psi_n]_x \Psi_j dx, \\ C_{jn} &= \int_0^l (\Psi_n)_{xxxx} \Psi_j dx, & G_j(t) &= \int_0^l g(x, t) \Psi_j dx, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Начальные условия для q_j при $t = 0$ и условия для s_j в конечный момент времени $t = t_f$ записываются в виде:

$$\sum_{n=1}^{n_0} q_n|_{t=0} A_{jn} = \int_0^l g_1 \Psi_j dx, \quad \sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_t|_{t=0} A_{jn} = \int_0^l g_2 \Psi_j dx, \quad (25)$$

$$\sum_{n=1}^{n_0} s_n|_{t=t_j} A_{jn} = -2\alpha_2 \sum_{n=1}^{n_0} (q_n)_t|_{t=t_f} A_{jn}, \quad \sum_{n=1}^{n_0} (s_n)_t|_{t=t_j} A_{jn} = 2\alpha_1 \sum_{n=1}^{n_0} q_n|_{t=t_f} A_{jn}. \quad (26)$$

Пример приближенного решения задачи оптимизации

Рассмотрим пример, полагая $n_0 = 1$ и беря функцию формы

$$\Psi_1(x) = 1 - \frac{4(l-x)}{3l} + \frac{(l-x)^4}{3l^4}, \quad (27)$$

удовлетворяющую краевым условиям для w и v .

Как следует из (24), (27),

$$A_{11} = \lambda_1 = 0,9905l \approx l, \quad B_{11} = \lambda_2 = 0,6025l^3, \quad C_{11} = \lambda_3 = \frac{3,2}{l^3}. \quad (28)$$

Полагая, что $g_1(x) = \Psi_1(x)$ и $g_2(x) = 0$ и что на первой итерации $g^{(1)} = 1$, получим

$$G_1^{(1)} = \int_0^l g^{(1)} \Psi_1 dx = \lambda_0 = \frac{2}{5}l, \quad (29)$$

$$q_1^{(1)}|_{t=0} = \int_0^l g_1 \Psi_1 dx = \lambda_1, \quad (q_1^{(1)})_t|_{t=0} = A_{11}^{-1} \int_0^l g_2 \Psi_1 dx = 0. \quad (30)$$

Учитывая выражение (29) и начальные условия (30), а также общее соотношение (22), приходим к дифференциальному уравнению для координатной функции $q_1^{(1)}$ (на первой итерации)

$$(q_1^{(1)})_{tt} + \gamma_1 q_1^{(1)} + \gamma_0 = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (31)$$

в котором

$$\gamma_0 = -G_1^{(1)} = -\lambda_0, \quad \gamma_1 = \beta C_{11} - \alpha B_{11}, \quad (32)$$

а решение дается формулой

$$q_1^{(1)} = \left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, \quad t \in [0, t_f]. \quad (33)$$

Дифференциальное уравнение для сопряженной переменной $s_1^{(1)}$ и условия в конечный момент времени, как следует из (23), (26), имеют вид

$$(s_1^{(1)})_{tt} + \gamma_1 s_1^{(1)} = 0, \quad t \in [0, t_f], \quad (34)$$

$$s_1^{(1)}|_{t=t_f} = -2\alpha_2 (q_1^{(1)})_t|_{t=t_f} = 0, \quad (35)$$

$$(s_1^{(1)})_t|_{t=t_f} = 2\alpha_1 q_1^{(1)}|_{t=t_f} = 2\alpha_1 \left[\left(\lambda_1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right) \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f) + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \right] = Q. \quad (36)$$

Далее положим $\alpha_2 = 0$. Интегрируя уравнение (34) в обратном направлении с условиями (35), (36) в конечный момент времени, получим

$$s_1^{(1)}(t) = Q_1 \sin(\sqrt{\gamma_1} t) + Q_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t), \quad t \in [0, t_f], \quad (37)$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\sqrt{\gamma_1}} \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f), \quad Q_2 = -\frac{Q}{\sqrt{\gamma_1}} \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f).$$

С использованием представлений (17), (18) приходим к выражениям для подавляющего воздействия:

$$g^{(2)} = \frac{1}{2\mu} v^{(1)}(x, t) = \frac{1}{2\mu} s_1^{(1)}(t) \Psi_1(x), \quad (38)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{4M_0} \int_0^l \int_0^{t_f} (s_1^{(1)}(t))^2 (\Psi_1(x))^2 dx dt = \frac{1}{4M_0} \int_0^{t_f} (s_1^{(1)}(t))^2 dt. \quad (39)$$

Применим найденное подавляющее воздействие $g^{(2)}(x, t)$ для отыскания соответствующего второго приближения $q_1^{(2)}$ на основе интегрирования дифференциального уравнения

$$(q_1^{(2)})_t + \gamma_1 q_1^{(2)} + \gamma_2 = 0, \quad (40)$$

$$\gamma_2(t) = -G_1^{(2)}(t) = -\int_0^l \Psi_1 g^{(2)} dx = -\frac{1}{2\mu} s_1^{(2)}(t). \quad (41)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$q_1^{(2)}(t) = \chi_1 \sin(\sqrt{\gamma_1} t) + \chi_2 \cos(\sqrt{\gamma_1} t) + \frac{1}{4\mu\gamma_1} [(\mathcal{Q}_1 \sqrt{\gamma_1} t - \mathcal{Q}_2) \cos(\sqrt{\gamma_1} t) - \mathcal{Q}_2 \sqrt{\gamma_1} t \sin(\sqrt{\gamma_1} t)]. \quad (42)$$

Произвольные постоянные χ_1 и χ_2 находятся при помощи условий

$$q_1^{(2)}|_{t=0} = \int_0^l \Psi_1(x) g_1(x) dx = \int_0^l (\Psi_1(x))^2 dx = 1, \quad (43)$$

$$(q_1^{(2)})_t|_{t=0} = \int_0^l \Psi_1(x) g_2(x) dx = 0.$$

Получаем выражения для констант интегрирования:

$$\chi_1 = -\frac{\mathcal{Q}_1}{4\mu\gamma_1} = -\frac{\mathcal{Q} \cos(\sqrt{\gamma_1} t_f)}{4\mu\gamma_1^{3/2}}, \quad (44)$$

$$\chi_2 = 1 + \frac{\mathcal{Q}_2}{4\mu\gamma_1} = 1 - \frac{\mathcal{Q} \sin(\sqrt{\gamma_1} t_f)}{4\mu\gamma_1^{3/2}}.$$

В рассмотренном случае оптимального подавления колебаний величина критерия качества будет равна

$$J_g^* = J_g|_{g=g^*} = \alpha_1 (q_1^{(2)})^2|_{t=t_f}. \quad (45)$$

Для сравнения: при отсутствии подавляющих воздействий в рассматриваемом случае, когда $g = G_1 = \gamma_0 = 0$ и $\alpha_2 = 0$, будем иметь

$$q_1(t) = \lambda \cos(\sqrt{\gamma_1} t), \quad J_g|_{g=0} = \alpha_1 \lambda^2 \cos^2(\sqrt{\gamma_1} t_f) \quad (\lambda_1 \approx 1). \quad (46)$$

На рис. 2 представлена зависимость функционала J_g от параметра задачи t_f . Сплошная кривая соответствует соотношению (45) при оптимальном воздействии на стержень, а штриховая – соотношениям (46) при отсутствии подавляющего воз-

действия. При расчетах (опуская соответствующие размерности) полагалось $\alpha_1 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $l = 1$, $\mu = 0,25$.

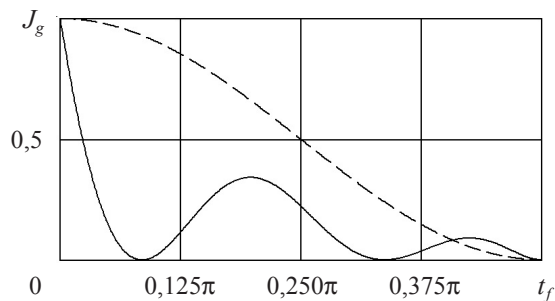


Рис. 2

Некоторые замечания и выводы

Описана новая постановка задачи оптимального подавления возникающих поперечных колебаний вращающегося стержня. Представлены основное уравнение динамики упругого стержня и сопряженное уравнение, учитывающие поперечную силу инерции, центробежную силу и изгибную (балочную) жесткость. Развита и проиллюстрирована на примере алгоритм численно-аналитического отыскания оптимального уравнения, основанный на эффективном применении метода Галеркина.

В качестве замечаний отметим: выполняемые в излагаемом примере операции показывают, что без существенных усложнений постановка задачи оптимизации может быть расширена на основе использования в общем случае представления управляющего воздействия в виде $g(x, t) = f(t)k(x)$ с разделенными функциями положения и времени, описывающими как конкретную геометрическую реализацию расположения воздействий (приводов, актуаторов), задаваемую посредством $k(x)$ в виде δ -функций, ступенчатых функций и локализованных функций, так и способ изменения воздействий по времени, обозначаемый через $f(t)$. Такой подход позволит сравнить по эффективности способы приложения воздействий к различным частям стержня и сосредоточенных воздействий в отдельных точках, а также сопоставить такие воздействия во времени, как релейные, гармонические, ударные и другие управления.

Список литературы

1. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Об устойчивости продольного движения ортотропных термоупругих пластин. *Докл. РАН*. 2018. Т. 482. №5. С. 513–516. DOI: 10.31857/S086956520002978-8.
2. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Mathematical modeling of the axially moving panels subjected to thermomechanical actions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2018. Vol. 46. No 1. P. 101–109. DOI: 10.1080/15397734.2017.1289472.
3. Marynowski K., Kapitaniak T. Dynamics of axially moving continua. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. Vol. 81. P. 26–41. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.01.017>.
4. Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Neittaanmäki P., Tuovinen T. *Stability of Axially Moving Materials*. Cham, Switzerland: Springer, 2020. 642 p.
5. Wang J., Huang L., Liu X. Eigenvalue and stability analysis for transverse vibrations of axially moving strings based on Hamiltonian dynamics. *Acta Mechanica Sinica*. 2005. Vol. 21. Iss. 5. P. 485–494. DOI: 10.1007/s10409-005-0066-2.

6. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Afanas'ev V.S. On stability of one-dimensional movement of viscous material. *Russian Mathematics*. 2020. Vol. 64. No 10. P. 79–82. DOI: 10.3103/S1066369X20100084.
7. Chen L.-Q., Tang Y.-Q. Parametric stability of axially accelerating viscoelastic beams with the recognition of longitudinally varying tensions. *Journal of Vibration and Acoustics*. 2012. Vol. 134. No 1. P. 011008-1–011008-11. DOI: 10.1115/1.4004672.
8. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Афанасьев В.С. О поперечных колебаниях продольно движущихся панелей, описываемых гипергеометрическим уравнением. *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82. № 1. С. 16–23. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-1-16-23.
9. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. О продольном движении панели при механических и температурных воздействиях. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. № 2. С. 123–130. DOI: 10.32326/1814-9146-2016-78-2-123-130.
10. Banichuk N.V., Afanas'ev V.S., Shevchenko A.V. Instability of a longitudinal movement along the cylindrical surface for a thermoelastic web simulated by stretched and heated string. *Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 53. Iss. 2. P. 156–158. DOI: 10.3103/S002565441802005X.
11. Banichuk N., Ivanova S., Makeev E., Jeronen J., Tuovinen T. Added-mass based efficient fluid-structure interaction model for dynamics of axially moving panels with thermal expansion. *Mathematical and Computational Applications*. 2020. Vol. 25. No 9. P. 1–17. DOI: 10.3390/mca25010009.
12. Chang Y.B., Moretti P.M. Interaction of fluttering webs with surrounding air. *TAPPI Journal*. 1991. Vol. 74. No 3. P. 231–236.
13. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Исследование устойчивости продольного движения панели с учетом гидротермоупругого взаимодействия. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. № 4. С. 456–465. DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-456-465.
14. Баничук Н.В., Миронов А.А. Схема струйного обтекания для исследования равновесных форм упругих пластин в потоке жидкости и задаче оптимизации. *Прикладная математика и механика*. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 83–90.
15. Pramila A. Sheet flutter and the interaction between sheet and air. *TAPPI Journal*. 1986. Vol. 69. No 7. P. 70–74.
16. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. Оптимальное подавление возмущений движущихся термоупругих панелей. *Докл. РАН*. 2018. Т. 482. №1. С. 29–33.
17. Баничук Н.В., Иванова С.Ю. О подавлении поперечных колебаний упругой панели, продольно движущейся в потоке жидкости. *Докл. РАН. Физика, технические науки*. 2020. Т. 492. №1. С. 83–87. DOI: 10.1134/s1028335820040023.
18. Banichuk N.V., Ivanova S.Y., Sinitsyn A.V., Afanas'ev V. Optimization of axially moving layered web. *EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization*. Switzerland: Springer International Publishing, 2019. P. 657–665. DOI: 10.1007/978-3-319-97773-7_58.
19. Chen L.-Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings. *ASME Applied Mechanics Reviews*. 2005. Vol. 58. Iss. 2. P. 91–116. DOI: 10.1115/1.1849169.
20. Lamb H., Southwell R.V. The vibrations of a spinning disc. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1921. Vol. 99. P. 272–280. DOI: 10.1098/rspa.1921.0041.
21. Southwell R.V. On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre: and on the effects of rotation. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1922. Vol. 101. Iss. 709. P. 133–153. DOI: 10.1098/RSPA.1922.0032.
22. Simmonds J.G. The transverse vibrations of a flat spinning membrane. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1962. Vol. 29. No 1. P. 16–18.
23. Simmonds J.G. Axisymmetric transverse vibrations of a spinning membrane clamped at its center. *AIAA Journal*. 1962. Vol. 1. No 5. P. 1224–1225.
24. Eversman W. Transverse vibrations of a clamped spinning membrane. *AIAA Journal*. 1968. Vol. 6. No 7. P. 1395–1397. DOI: 10.2514/3.4763.
25. Barasch S., Chen Y. On the vibration of a rotating disc. *Journal of Applied Mechanics*. 1972. Vol. 39. Iss. 4. P. 1143–1144. DOI: 10.1115/1.3422847.

26. Iwan W.D., Moeller T.L. The stability of a spinning elastic disc with a transverse load system. *Journal of Applied Mechanics*. 1976. Vol. 43. No 4. P. 485–490. DOI: 10.1115/1.3423896.
27. Benson R.C., Bogy D.B. Deflection of a very flexible spinning disc due to a stationary transverse load. *Journal of Applied Mechanics*. 1978. Vol. 45. No 3. P. 636–641. DOI: 10.1115/1.3424374.
28. Crandall S.H. Stability of vibratory modes in moving media. In: *Dynamic Problems of Rigid-Elastic Systems and Structures*. Eds. N.V. Banichuk, D.M. Klimov, W. Schiehlen. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 65–72.
29. Paidoussis M.P. *Fluid-Structure Interaction: Vol. 2: Slender Structures and Axial Flow*. Elsevier Academic Press, 2003. 1040 p.
30. Баничук Н.В., Иванова С.Ю., Шаранюк А.В. *Динамика конструкций. Анализ и оптимизация*. М.: Наука. 1989. 262 с.
31. Баничук Н.В. *Введение в оптимизацию конструкций*. М.: Наука, 1986. 301 с.
32. Троицкий В.А., Петухов Л.В. *Оптимизация формы упругих тел*. М.: Наука, 1982. 432 с.
33. Келдыш М.В. О методе Б.Г. Галеркина для решения краевых задач. *Изв. АН СССР. Сер. Матем.* 1942. Т. 6. Вып. 6. С. 309–330.
34. Свирский И.В. *Методы Бубнова – Галеркина и последовательных приближений*. М.: Наука, 1968. 199 с.
35. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. М.: Наука, 1970. 512 с.

References

1. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. The stability of axial motion of orthotropic thermoelastic plates. *Doklady Physics*. 2018. Vol. 63. No 10. P. 411–413. DOI:10.1134/S102833581810004X.
2. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Mathematical modeling of the axially moving panels subjected to thermomechanical actions. *Mech. Base. Des. Struct. Mach.* 2018. Vol. 46. No 1. P. 101–109. DOI: 10.1080/15397734.2017.1289472.
3. Marynowski K., Kapitaniak T. Dynamics of axially moving continua. *Int. J. Mech. Sci.* 2014. Vol. 81. P. 26–41. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.01.017>.
4. Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Neittaanmäki P., Tuovinen T. *Stability of axially moving materials*. Cham, Switzerland. Springer. 2020. 642 p.
5. Wang J., Huang L., Liu X. Eigenvalue and stability analysis for transverse vibrations of axially moving strings based on Hamiltonian dynamics. *Acta Mechanica Sinica*. 2005. Vol. 21. P. 485–494. DOI: 10.1007/s10409-005-0066-2.
6. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Afanas'ev V.S. On stability of one-dimensional movement of viscous material. *Russian Mathematics*. 2020. Vol. 64. No 10. P. 79–82. DOI: 10.3103/S1066369X20100084.
7. Chen L.-Q., Tang Y.-Q. Parametric stability analysis of axially accelerating moving viscoelastic beams with the recognition of longitudinally varying tensions. *J. Vib. Acoust.* 2012. Vol. 134. No 1. P. 011008-1–011008-11. DOI: 10.1115/1.4004672.
8. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Afanas'ev V.S. O poperechnykh kolebaniyakh prodolno dvizhushchikhsya paneley, opisyyaemykh gipergeometricheskim uravneniem [On transverse vibrations of axially moving panels described by a hypergeometric equation]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Stress and Plasticity]*. 2020. Vol. 82. No 1. P. 16–23. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-1-16-23 (In Russian).
9. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. O prodolnom dvizhenii paneli pri mekhanicheskikh i temperaturnykh vozdeystviyakh [On axial motion of the panel under mechanical and temperature action]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2016. Vol. 78. No 2. P. 123–130. DOI: 10.32326/1814-9146-2016-78-2-123-130 (In Russian).
10. Banichuk N.V., Afanas'ev V.S., Shevchenko A.V. Instability of a longitudinal movement along the cylindrical surface for a thermoelastic web simulated by stretched and heated string. *Mechanics of Solids*. 2018. Vol. 53. Iss. 2. P. 156–158.
11. Banichuk N., Ivanova S., Makeev E., Jeronen J., Tuovinen T. Added-mass based efficient fluid-structure interaction model for dynamics of axially moving panels with thermal expansion. *Math. Comput. Appl.* 2020. Vol. 25. No 9. P. 1–17. DOI: 10.3390/mca25010009.

12. Chang Y.B., Moretti P.M. Interaction of fluttering webs with surrounding air. *TAPPI J.* 1991. Vol. 74. No 3. P. 231–236.
13. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Issledovanie ustoychivosti prodolnogo dvizheniya paneli s uchetom gidrotermouprugogo vzaimodeystviya [Stability investigation of panel axial movement taking into account hydrothermoelastic interaction]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2018. Vol. 80. No 4. P. 456–465. DOI: 10.32326/1814-9146-2018-80-4-456-465 (In Russian).
14. Banichuk N.V., Mironov A.A. The stream flow scheme for investigating the equilibrium forms of elastic plates in a stream of fluid and problems of optimization. *JAMM.* 1979. Vol. 43. No 1. P. 88–95.
15. Pramila A. Sheet flutter and the interaction between sheet and air. *TAPPI J.* 1986. Vol. 69. No 7. P. 70–74.
16. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. Optimal damping of perturbations of moving thermoelastic panel. *Doklady Physics.* 2018. Vol. 63. No 1. P. 13–17. DOI: 10.1134/S1028335818010019.
17. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu. The suppression of transverse vibrations of an elastic panel moving axially in a fluid flow. *Doklady Physics.* 2020. Vol. 65. No 5. P. 186–189. DOI: 10.31857/s2686740020020054.
18. Banichuk N.V., Ivanova S.Y., Sinitsyn A.V., Afanas'ev V. Optimization of axially moving layered web. *EngOpt 2018 Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Optimization.* Switzerland. Springer International Publishing. 2019. P. 657–665. DOI: 10.1007/978-3-319-97773-7_58.
19. Chen L.-Q. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings. *ASME Applied Mechanics Reviews.* 2005. Vol. 58. Iss. 2. P. 91–116. DOI: 10.1115/1.1849169.
20. Lamb H., Southwell R.V. The vibrations of a spinning disc. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 1921. Vol. 99. P. 272–280. DOI: 10.1098/rspa.1921.0041.
21. Southwell R.V. On the free transverse vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre: and on the effects of rotation. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 1922. Vol. 101. Iss. 709. P. 133–153. DOI: 10.1098/RSPA.1922.0032.
22. Simmonds J.G. The transverse vibrations of a flat spinning membrane. *Journal of the Aeronautical Sciences.* 1962. Vol. 29. No 1. P. 16–18.
23. Simmonds J.G. Axisymmetric transverse vibrations of a spinning membrane clamped at its center. *AIAA Journal.* 1962. Vol. 1. No 5. P. 1224–1225.
24. Eversman W. Transverse vibrations of a clamped spinning membrane. *AIAA Journal.* 1968. Vol. 6. No 7. P. 1395–1397. DOI: 10.2514/3.4763.
25. Barasch S., Chen Y. On the vibration of a rotating disc. *J. Appl. Mech.* 1972. Vol. 39. Iss. 4. P. 1143–1144. DOI: 10.1115/1.3422847.
26. Iwan W.D., Moeller T.L. The stability of a spinning elastic disc with a transverse load system. *J. Appl. Mech.* 1976. Vol. 43. No 4. P. 485–490. DOI: 10.1115/1.3423896.
27. Benson R.C., Bogy D.B. Deflection of a very flexible spinning disc due to a stationary transverse load. *J. Appl. Mech.* 1978. Vol. 45. No 3. P. 636–641. DOI: 10.1115/1.3424374.
28. Crandall S.H. Stability of vibratory modes in moving media. In: *Dynamic Problems of Rigid-Elastic Systems and Structures.* Eds. N.V. Banichuk, D.M. Klimov, W. Schiehlen. Berlin. Springer-Verlag. 1991. P. 65–72.
29. Paidoussis M.P. *Fluid-Structure Interaction: Vol. 2: Slender Structures and Axial Flow.* Elsevier Academic Press. 2003. 1040 p.
30. Banichuk N.V., Ivanova S.Yu., Sharanyuk A.V. *Dinamika konstruksiy. Analiz i optimizatsiya [Dynamics of Structures. Analysis and Optimization]*. Moscow. Nauka Publ. 1989. 262 p. (In Russian).
31. Banichuk N.V. *Introduction to Optimization of Structures.* New York. Springer-Verlag. 1990. 300 p.
32. Troitsky V.A., Petuchov L.V. *Optimizatsiya formy uprugih tel [Optimization of Shapes of Elastic Bodies]*. Moscow. Nauka Publ. 1982. 432 p. (In Russian).
33. Keldysh M.V. O metode B.G. Galerkina dlya resheniya kraevykh zadach [On Galerkin's method of solution of boundary]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya Matematika [Mathematics of the USSR. Izvestiya]*. 1942. Vol. 6. No 6. P. 309–330 (In Russian).

34. Svirsky I.V. *Metody Bubnova – Galyorkina i posledovatelnykh priblizheniy* [*Bubnov – Galerkin and Successive Approximation Methods*]. Moscow. Nauka Publ. 1968. 199 p. (In Russian).
35. Mikhlin S.G. *Variational Methods in Mathematical Physics*. Oxford. Pergamon Press. 1964. 584 p.

OPTIMAL SUPPRESSION OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF SPINNING ELASTIC RODS

Afanas'ev V.S., Banichuk N.V.

*A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

The process of suppressing transverse vibrations of an elastic rod spinning in a horizontal plane and fixed at one of its ends is studied. It is supposed that the rod spins around the vertical axis at a constant angular velocity and performs transverse vibrations in the vertical plane, the vibrations are assumed small in amplitude. Transverse vibrations of the spinning rod are performed under external mechanical action. Lateral vibrations are described by the displacement function and considered in a rotating plane by using the classical beam model. The necessary conditions of optimality are derived and applied for suppressing elastic vibrations on a finite time-interval. The problem of optimal suppression of lateral vibrations caused by initial disturbances is formulated as a variational problem with constraints that take into account the suppressing effects on the rod. The limiting restrictions are presented in the form of inequalities. With the introduction of an additional variable, these restrictions are reduced to standard integral equality, while taking into account the energy constraints imposed on the control actions. The proposed iterative algorithm for solving the formulated problem is a numerical-analytical algorithm and consists in minimizing the quadratic quality criterion. This criterion characterizes the vibration suppression process and allows the implementation of improving variations. As a result of the operations carried out, the dependence of the vibration suppression process on the determining parameters, such as the angular velocity of rotation, the isoperimetric energy constant, and the length of the considered process of vibration suppression in time, has been clarified. An example that illustrates the implementation of the proposed algorithm and shows the effectiveness of this method for suppressing lateral vibrations is given.

Keywords: spinning rod, vibration suppression, suppressing action optimization.