

УДК 539.3:621.643

DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-1-35-48

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

© 2021 г.

Дяченко И.А.¹, Миронов А.А.²

¹ООО «Газпром проектирование», Нижний Новгород, Российская Федерация

²Нижегородский государственный технический университет
им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Российская Федерация

dyachenko.i.a@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.12.2020

Исследование связано с проблемой обеспечения вибропрочности трубопроводов, подвергающихся воздействию динамических нагрузок, для которых повышенная вибрация является основной причиной развития повреждений. Решение этой проблемы включает в себя исследования параметров свободных колебаний конструкции. Решается задача определения собственных частот и форм колебаний участка круговой цилиндрической оболочки, заполненной средой, рассматриваемой в акустическом приближении. Результаты исследований параметров свободных колебаний получены как аналитическим методом по теории оболочек на основе гипотез Кирхгофа – Лява, так и с применением конечно-элементного комплекса инженерного анализа ANSYS. Показано, что влияние плотности среды на параметры свободных колебаний оболочки зависит от отношения толщины оболочки к ее радиусу, оно оказывается существенным только для формы колебаний, связанной с деформацией изгиба, и малозначимым для форм, связанных с деформациями срединного слоя. Сравнительный анализ результатов расчетов, полученных для моделей сжимаемой и несжимаемой среды, показывает, что при решении задачи определения параметров свободных колебаний оболочки сжимаемостью среды можно пренебречь. В то же время для решения практических задач, требующих учета полного спектра собственных частот системы оболочка–среда, должна использоваться модель сжимаемой среды, в рамках которой получены результаты о влиянии жесткости оболочки на спектр частот объема среды. При решении практических задач о вибрации трубопроводных систем использование метода конечных элементов в связанной постановке является эффективным инструментом, позволяющим рассмотреть все физические процессы с учетом их взаимного влияния друг на друга.

Ключевые слова: вибропрочность, цилиндрическая оболочка, цилиндрический объем среды, акустическая среда, связанная задача, свободные колебания, собственная частота, теория оболочек, конечно-элементный анализ, программный комплекс ANSYS.

Введение

Повышенная вибрация является основной причиной развития повреждений трубопроводов компрессорных станций, в связи с чем обеспечение их вибропрочности является актуальной задачей [1, 2]. Проблема вибропрочности включает в себя определение параметров совместных свободных колебаний конструкции со средой, необходимых для дальнейшего анализа вынужденной вибрации.

Задачи взаимодействия конструкций со средой в трубопроводном транспорте представляют для исследователей большой интерес. Связанные задачи позволяют рассмотреть все физические процессы с учетом их взаимного влияния друг на друга. Однако получение совместного решения для конструкции, взаимодействующей со средой, сопряжено с определенными трудностями. Основная трудность заключается в необходимости совместного решения уравнений динамики конструкции и среды, представляющей собой жидкость или газ. Разработанные к настоящему времени аналитические методы применимы преимущественно к узкому классу задач с простейшей геометрией и рядом допущений. Для решения практических задач для трубопроводных систем, имеющих сложную пространственную и топологическую конфигурацию, основным подходом является использование численного моделирования. В статье выполнен сравнительный анализ аналитического и численного решений задачи о свободных колебаниях цилиндрических оболочек, содержащих среду.

В настоящее время по теории оболочек имеется обширная научная литература. Большой вклад в разработку теории оболочек внесли В.З. Власов, А.Л. Гольденвейзер, В.В. Новожилов, А.С. Вольмир и др. Общая теория оболочек представлена в монографиях [3–9], динамическая теория – в [4, 7–10]. Решению задач о динамическом взаимодействии оболочек и среды посвящены публикации А.С. Вольмира, М.А. Ильгамова, В.П. Шмакова и других авторов. Результаты этих исследований представлены в [3, 8, 9, 11, 12]. В указанной литературе большое внимание уделяется оболочкам вращения, в частности цилиндрическим. Ряд результатов решений для цилиндрических оболочек, в том числе и взаимодействующих со средой, представлен в статьях и материалах диссертаций [13–23]. Следует отметить, что в литературе мало внимания уделяется оболочкам конечных размеров и сравнительному анализу результатов аналитических и численных решений, в частности, с использованием метода конечных элементов.

Математическая модель

Исследования в теории оболочек, приведенные в указанной литературе, основываются на использовании гипотез Кирхгофа – Лява. В этом случае дифференциальные уравнения колебаний для тонкой круговой цилиндрической оболочки с толщиной h и радиусом срединной поверхности R имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial S_{x\theta}}{\partial \theta} = -q_x + \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial x} = -q_\theta + \rho h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} - \frac{N_\theta}{R} = -q_r + \rho h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где x, θ, r – цилиндрические координаты, ρ – плотность материала оболочки, u_x, u_θ, u_r – компоненты вектора перемещений, $N_x, N_\theta, S_{\theta x}, S_{x\theta}$ – погонные усилия, M_1, M_2, H – погонные моменты, q_x, q_θ, q_r – компоненты вектора внешней погонной нагрузки, t – время.

После ряда преобразований система уравнений (1) для цилиндрической оболочки приводится к матричному виду:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} = \frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \begin{pmatrix} -q_x \\ -q_\theta \\ -q_r \end{pmatrix} + \frac{1-\nu^2}{E} R^2 \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\{L_{ij}\}$ – матрица дифференциальных операторов, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль упругости.

В качестве граничных условий приняты условия Навье, соответствующие реальным опорам трубопроводов и позволяющие получить аналитическое решение, результаты которого могут использоваться в сравнительном анализе с данными численного решения. Для граничных условий Навье формы колебаний принимают вид:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_\theta \\ u_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \cos(kx/R) \sin m\theta \sin \Omega t \\ V \sin(kx/R) \cos m\theta \sin \Omega t \\ W \sin(kx/R) \sin m\theta \sin \Omega t \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где U, V, W – амплитуды перемещений, $\Omega = 2\pi f$ – круговая частота колебаний, f – линейная частота колебаний, $k = \pi\lambda R/l$ – приведенное осевое волновое число, l – длина цилиндрической оболочки, λ и m – осевое и окружное волновые числа (рис. 1).

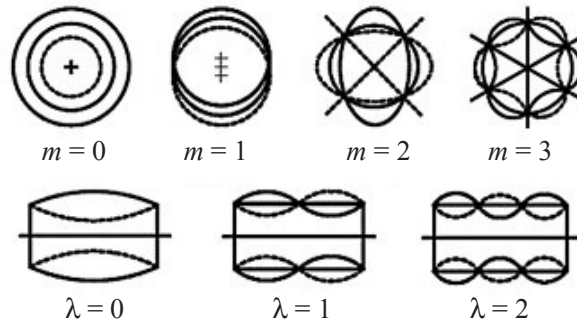


Рис. 1. Формы свободных колебаний цилиндрической оболочки

Для цилиндрической оболочки наличие среды учитывается компонентой q_r в системе уравнений (2), а компоненты q_x и q_θ принимаются равными нулю.

В случае идеальной несжимаемой среды, представляющей собой жидкость или газ, ее движение описывается потенциалом скоростей, уравнение для которого в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (4)$$

После решения уравнения (4) и перехода к безразмерным координатам давление среды на стенку оболочки будет определяться выражением:

$$q_r = \Omega^2 \rho_f \frac{J_m(R\lambda)}{\partial J_m(r\lambda)/\partial r} W \sin(kx/R) \sin m\theta \sin \Omega t, \quad (5)$$

где ρ_f – плотность жидкости, $J_m(R\lambda)$ – функция Бесселя.

Подстановка выражений (3) и (5) в матричное уравнение (2) при фиксированных значениях волновых чисел λ и m приводит к линейной однородной системе уравнений относительно неизвестных U, V, W . Эта система будет иметь ненулевое решение при условии:

$$\det L^* = 0,$$

где

$$L^* = \begin{pmatrix} k^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2 - \omega^2 & \frac{1+\nu}{2} km & -\nu k \\ \frac{1+\nu}{2} km & \frac{1-\nu}{2} (1+4a)k^2 + (1+a)m^2 - \omega^2 & -m-a(2-\nu)k^2 m - am^3 \\ -\nu k & -m-a(2-\nu)k^2 m - am^3 & 1+a(k^2+m^2)^2 - \omega^2 \left(1 + \frac{\rho_f R}{\rho h} \frac{J_m(k)}{\partial J_m(rk)/\partial r} \right) \end{pmatrix},$$

$\omega = \sqrt{(1-\nu^2)R^2\rho\Omega^2/E}$ – приведенный параметр частоты, $a = (h/R)^2/12$ – параметр относительной толщины оболочки. Приравнивание определителя матрицы к нулю при заданных осевом и окружном волновых числах λ и m приводит к частотному уравнению, результатом решения которого являются три значения частоты, соответствующие трем формам свободных колебаний.

Численный анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки со средой выполнялся с использованием программного комплекса ANSYS [24–26].

Для моделирования цилиндрической оболочки применялись оболочечные элементы SHELL181, учитывающие влияние деформаций поперечного сдвига в формулировке Бате – Дворкина. Сравнительный анализ выбора элементов для описания колебаний оболочки представлен в статье [27]. Для моделирования среды использовались акустические элементы FLUID30.

Анализ параметров свободных колебаний оболочки со средой

Исследование свободных колебаний выполнено для участка цилиндрической оболочки длиной $l = 5$ м из материала с параметрами: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, $\rho = 7850$ кг/м³. Параметры среды принимались в соответствии с таблицей 1, где c – скорость звука в среде, P – давление газа, T – температура газа. Анализ результатов проводился для волновых чисел $m = 0, 1, \dots, 5$.

Таблица 1

Параметры материала среды

Среда	ρ_f , кг/м ³	c , м/с
Газ ($P = 10$ МПа, $T = 50$ °С)	70,655	450,61
Газ ($P = 30$ МПа, $T = 50$ °С)	200,307	623,89
Нефть	730	1330
Вода	1000	1485

На рис. 2 показаны полученные с помощью программы ANSYS три формы свободных колебаний пустой цилиндрической оболочки (а) и оболочки со средой (б) для волновых чисел $\lambda = 4$, $m = 3$. Полученные формы соответствуют их аналитическому представлению.

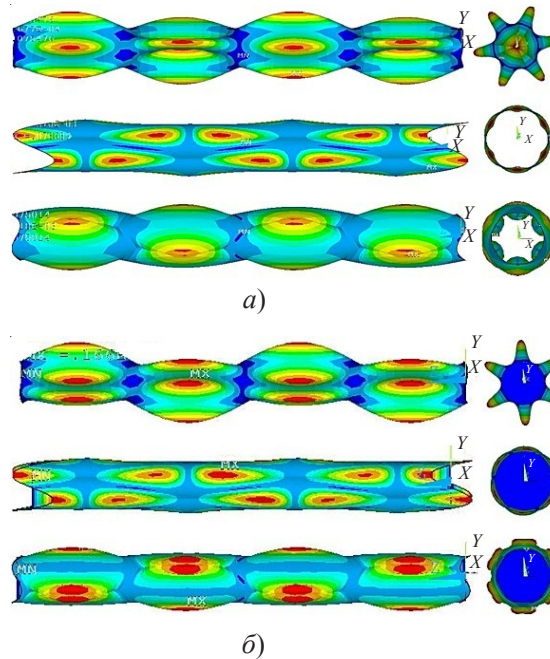


Рис. 2. Формы свободных колебаний цилиндрической оболочки

Из рисунка можно видеть, что первая форма свободных колебаний связана с деформацией изгиба. Две другие формы, соответствующие более высоким значениям частоты, характеризуют деформации срединного слоя.

В рамках модели несжимаемой жидкости в качестве иллюстрации результатов аналитического и численного расчетов на рис. 3 представлены характерные зависимости безразмерного параметра частоты ω от безразмерного волнового числа k для первой формы свободных колебаний оболочки с отношением $h/R \approx 0,04$ при различных значениях ρ_f/ρ и $m = 3$. На рисунке обозначено: сплошная линия – аналитическое решение, штриховая линия – решение по ANSYS.

Сравнение зависимостей показывает, что при одних и тех же значениях волновых чисел λ частота свободных колебаний оболочки, содержащей среду, ниже, чем для пустой оболочки. С увеличением плотности среды частота колебаний снижается, что объясняется влиянием присоединенной массы среды. Подобные закономерности наблюдаются для всех значений окружных волновых чисел m . Исключением являются осесимметричные колебания при $m = 0$, на частоту которых наличие жидкости влияния не оказывает и зависимости $\omega(k)$ одинаковы для всех вариаций ρ_f/ρ .

Отличие аналитических и численных результатов достигает 15%, что связано, с одной стороны, с отсутствием учета деформаций поперечного сдвига в аналитическом решении, а с другой – с естественным ростом ошибки численных расчетов с ростом частоты при сохранении дискретизации модели.

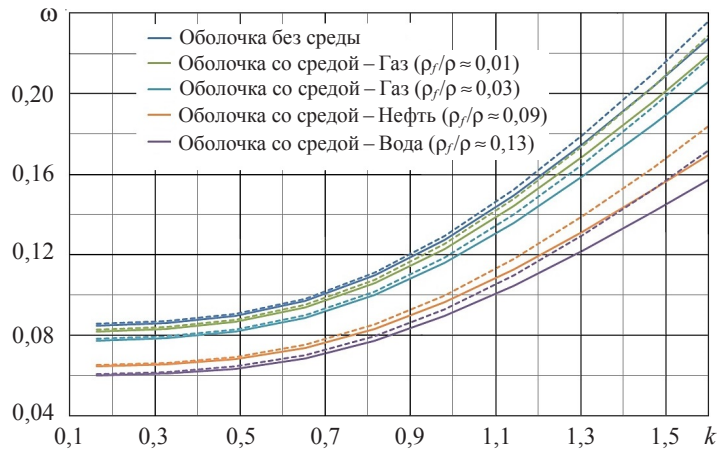


Рис. 3. Зависимость параметра частоты от приведенного волнового числа для первой формы колебаний оболочки

Выполнена оценка влияния на частоту колебаний геометрических параметров цилиндрической оболочки. На рис. 4 показана зависимость отношения ω/ω_0 от отношения h/R при различных значениях ρ_f/ρ (ω – приведенный параметр частоты для оболочки со средой, ω_0 – приведенный параметр частоты для пустой оболочки). Характерные зависимости представлены для первой формы колебаний при $m = 3$. На рисунке обозначено: сплошная линия – аналитическое решение, штриховая линия – решение в ANSYS. С увеличением толщины оболочки частота свободных колебаний возрастает и значение частоты для оболочки, содержащей среду, начинает приближаться к частоте для пустой оболочки. Аналогичные зависимости свойственны всему рассматриваемому диапазону чисел m , за исключением $m = 0$. Для $m = 0$ при любом h/R наличие жидкости не оказывает влияния на частоту.

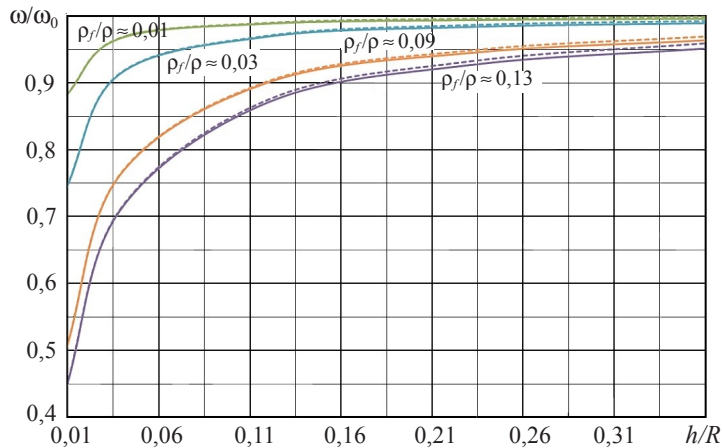


Рис. 4. Зависимость ω/ω_0 от h/R для первой формы колебаний

Анализ результатов для форм колебаний, соответствующих более высоким значениям частот и связанных с деформациями срединного слоя, показывает незначительное влияние на них отношений ρ_f/ρ и h/R , при этом отличие данных аналитического и численного решений для рассмотренных диапазонов параметров не превышает 5%.

Представленные результаты аналитического и численного решений получены для оболочки, содержащей несжимаемую среду. Как можно видеть, наличие среды влияет на значение собственной частоты, при этом формы колебаний остаются аналогичными формам колебаний для пустой оболочки. В случае определения параметров свободных колебаний цилиндрической оболочки, содержащей сжимаемую среду, решение в программе ANSYS дает, кроме форм, идентичных пустой оболочке, дополнительные формы колебаний.

Пример дополнительных форм колебаний оболочки со сжимаемой средой, полученных с помощью ANSYS, показан на рис. 5, на котором для одного и того же значения частоты представлены отдельно формы колебаний оболочки и объема среды. Из анализа форм колебаний следует, что наряду с колебаниями системы с формами оболочки (колебания оболочечного типа, рис. 5а), добавляются формы колебаний объема среды (колебания жидкостного типа, рис. 5б).

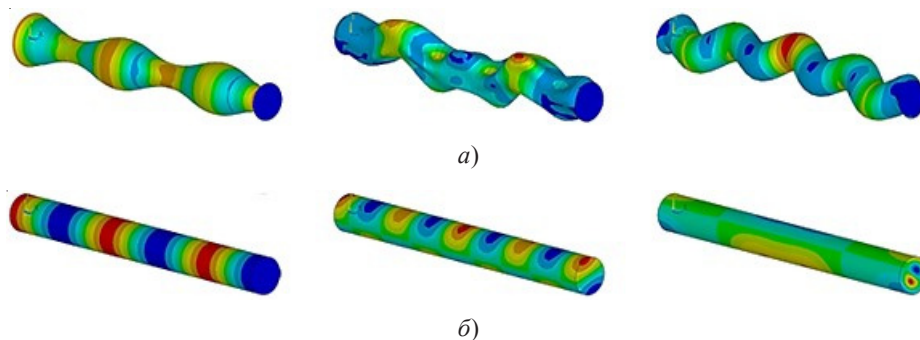


Рис. 5. Формы свободных колебаний оболочки со средой жидкостного типа

На рис. 6 представлен частотный спектр до 500 Гц для цилиндрической оболочки со сжимаемой средой при $\rho_f/\rho \approx 0,01$, отражающий наличие дополнительных форм жидкостного типа. По мере увеличения отношения ρ_f/ρ частоты колебаний жидкостного типа смещаются в зону более высоких значений.

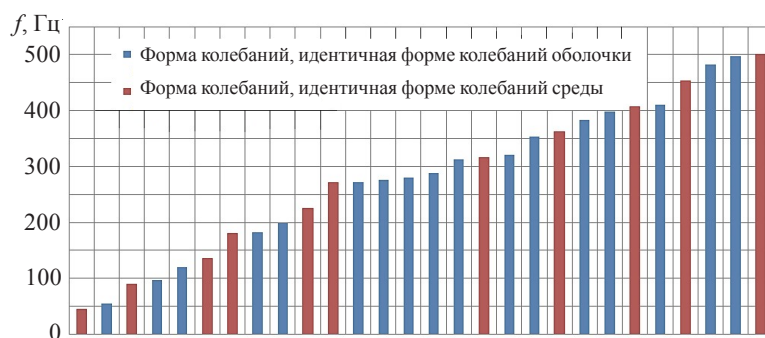


Рис. 6. Частотный спектр для цилиндрической оболочки со сжимаемой средой

Характер влияния учета сжимаемости среды с различным отношением ρ_f/ρ на изменение зависимостей частоты от осевого волнового числа для первой формы колебаний при $m = 3$ представлен на рис. 7. На рисунке сплошная линия соответствует оболочке с несжимаемой средой, штриховая линия – оболочке со сжимаемой средой. Результаты расчетов показывают, что учет сжимаемости приводит к незначительному понижению частоты свободных колебаний оболочки для всего рассмат-

риваемого диапазона m , за исключением $m = 0$, при котором влияние среды не наблюдается. В целом отличия составляют не более 2%.

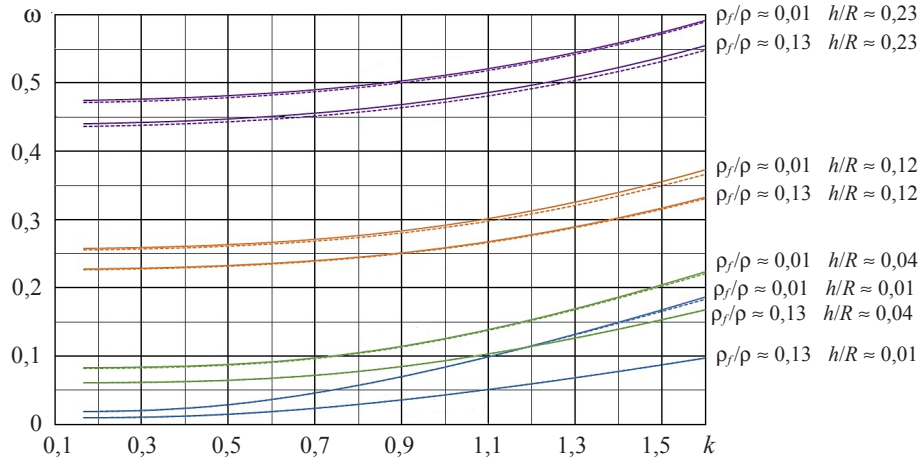


Рис. 7. Зависимость параметра частоты от приведенного волнового числа для первой формы колебаний

Свободные колебания цилиндрического объема среды

Аналитическое решение для цилиндрической оболочки, содержащей среду, не позволяет получить дополнительные формы колебаний жидкостного типа и полный спектр частот системы оболочка–среда. Частоты колебаний жидкостного типа без учета влияния на них жесткости оболочки могут быть получены на основе решения волнового уравнения для цилиндрического объема среды. В публикациях [28–32], кроме общих положений акустики, рассмотрены вопросы, связанные с колебаниями акустической среды, заключенной в круглый цилиндр.

Для продольных нормальных колебаний цилиндрического объема среды значение собственной частоты определяется выражением:

$$f_q = \frac{qc}{2l}, \quad (6)$$

где q – число вариаций поля вдоль цилиндрического объема среды.

Уравнение, определяющее частоты собственных колебаний в плоскости, ортогональной к оси трубы, основано на поиске корней y_p производной функции Бесселя: $J'(y_p) = 0$. Собственная частота, соответствующая заданной форме колебаний, определяется соотношением:

$$f_{pn} = \frac{c}{2\pi R} y_p, \quad (7)$$

где p – число вариаций поля по углу (число узловых диаметральных плоскостей), n – число вариаций поля вдоль радиуса (число внутренних узловых цилиндров). Каждая пара чисел p, n определяет некоторую волновую моду, распространяющуюся вдоль всей длины трубы без изменения.

Для цилиндрического объема среды также имеют место колебания смешанного типа. Выражение для определения собственной частоты для такого типа колебаний имеет вид:

$$f_{pnq} = \sqrt{f_q + f_{pn}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{l}\right)^2 + \left(\frac{y_{pn}}{\pi r}\right)^2}. \quad (8)$$

Применяя выражения (6)–(8) и задаваясь числами вариаций поля q, p, n (рис. 8), определим частоты свободных колебаний цилиндрического объема среды, соответствующие заданным формам колебаний.

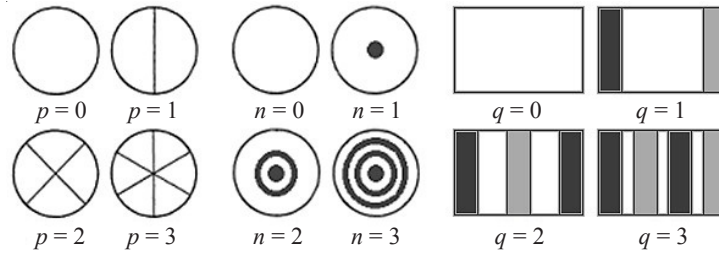


Рис. 8. Формы свободных колебаний цилиндрического объема среды

Для цилиндрического объема среды с параметрами, идентичными параметрам среды в цилиндрической оболочке, выполнено исследование свободных колебаний. Результаты расчетов, полученные аналитически и с помощью программы ANSYS, сопоставлялись с результатами, соответствующими дополнительным формам цилиндрической оболочки со средой. На примере продольных нормальных колебаний на рис. 9 представлена характерная зависимость отношения f_q^*/f_q (f_q^* – частота колебаний жидкостного типа, f_q – частота колебаний цилиндрического объема среды) от отношения h/R .

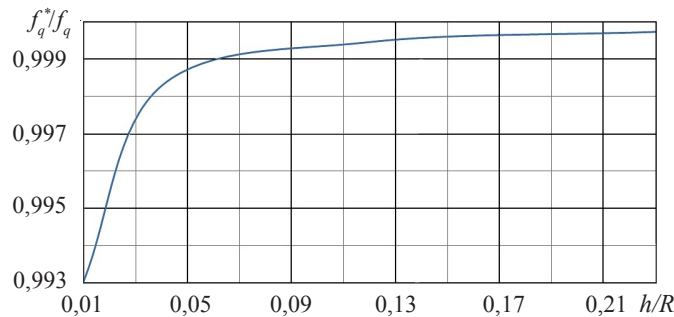


Рис. 9. Зависимость f_q^*/f_q от h/R для продольных нормальных колебаний

Из анализа результатов следует, что частоты колебаний жидкостного типа оболочки со средой незначительно ниже частот колебаний цилиндрического объема среды при сохранении форм колебаний. С ростом толщины оболочки значения дополнительных частот колебаний оболочки приближаются к значениям для объема среды, соответствующим абсолютно жестким стенкам.

Если сравнивать результаты аналитического и численного решений для цилиндрического объема среды, то для рассматриваемого диапазона чисел p, n, q наблюдается хорошее соответствие – отличие в пределах 7%.

Заключение

По результатам проведенного исследования свободных колебаний цилиндрической оболочки, заполненной средой, можно сделать следующие выводы.

Изменение плотности среды оказывает существенное влияние только на формы колебаний, связанные с деформацией изгиба, снижая их частоты с ростом плотности. Для других форм, связанных с деформациями срединного слоя, влияние среды незначительно.

Спектр частот свободных колебаний оболочки со сжимаемой средой, получаемый в связанной постановке задачи методом конечных элементов, содержит частоты, соответствующие формам колебаний оболочечного типа и жидкостного типа. Рассмотренное аналитическое решение не позволяет получить полный спектр частот системы оболочка–среда независимо от учета сжимаемости среды. Спектр частот оболочечного типа в первом приближении может быть получен из аналитического решения задачи с использованием модели несжимаемой среды. Для оценки частот и форм колебаний жидкостного типа требуется дополнительное использование решения задачи о колебании объема среды, имеющего форму оболочки.

При решении практических задач о вибрации трубопроводных систем следует использовать связанную постановку задачи. Подход, основанный на раздельном последовательном решении задач о распределении давления и его действии на трубопровод, может приводить для резонансных режимов к некорректным результатам.

Список литературы

1. Бутусов Д.С. Исследование пульсации потока в технологических трубопроводах компрессорных станций магистральных газопроводов: Дис... канд. техн. наук. РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина. М., 2000. 199 с.
2. Якубович В.А. *Вибрационная диагностика трубопроводов компрессорных станций*. М.: Недра, 2004. 333 с.
3. Flugge W. *Stresses in Shells*. New York: Springer-Verlag, 1972. 525 p.
4. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. *Свободные колебания тонких упругих оболочек*. М.: Наука, 1979. 384 с.
5. Новожилов В.В. *Теория тонких оболочек*. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
6. Власов В.З. *Общая теория оболочек: Избранные труды*. В 2 т. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
7. Leissa A.W. *Vibration of Shells*. Columbus: Acoustical Society of America, 1993. 434 p.
8. Soedel W. *Vibrations of Shells and Plates*. New York: CRC Press, 2004. 553 p.
9. Вольмир А.С. *Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи гидроупругости*. М.: Наука, 1979. 320 с.
10. Петров В.В. *Теория расчета пластин и оболочек*. М.: АСВ, 2018. 410 с.
11. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. *Расчеты оболочек с упругим наполнителем*. М.: Наука, 1987. 260 с.
12. Шмаков В.П. *Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 287 с.
13. Тер-Акопянц Г.Л. Математическое моделирование волн упругой деформации в трубах, взаимодействующих с жидкостью: Дис... канд. техн. наук. СПбГМТУ. СПб., 2015. 147 с.
14. Серегин С.В. Влияние малой присоединенной массы на собственные частоты и формы колебаний тонких круговых цилиндрических оболочек: Дис... канд. техн. наук. Комсомольский-на-Амуре гос. техн. ун-т. Комсомольск-на-Амуре, 2015. 122 с.
15. Leizerovich G.S., Taranukha N.A. Nonobvious features of dynamics of circular cylindrical shells. *Mechanics of Solids*. 2008. Vol. 43. Iss. 2. P. 246–253. DOI: 10.3103/S0025654408020106.
16. Rawat A., Matsagar V., Nagpal A. Finite element analysis of thin circular cylindrical shells.

Proceedings of the Indian National Science Academy. 2016. Vol. 82. No 2. P. 349–355. DOI: 10.16943/ptinsa/2016/48426.

17. Farshidianfar A., Oliyazadeh P. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories. *International Journal of Mechanics and Applications*. 2012. Vol. 2(5). P. 74–80. DOI: 10.5923/j.mechanics.20120205.04.

18. Грибков В.А., Адаменко Р.А. Двумерная модель жидкости для расчета собственных частот колебаний осесимметричных гидрооболочечных систем [Электронный документ]. *Инженерный журнал: наука и инновации*. Электронный научно-технический журнал. 2017. №3(63). С. 1–6. (<https://www.cyberleninka.ru/journal/n/inzhenernyy-zhurnal-nauka-i-innovatsii?i=1050026>). Проверено 03.02.2021. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-3-1593.

19. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. Волны в цилиндрической оболочке с вязкой жидкостью. *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*. 2016. Вып. 3 (34). С. 82–93. DOI: 10.17072/1993-0550-2016-3-82-93.

20. Naeem M.N., Gamkhar M., Arshad S.H., Shah A.G. Vibration analysis of submerged thin FGM cylindrical shells. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2013. Vol. 27. Iss. 3. P. 649–656. DOI: 10.1007/s12206-013-0119-6.

21. Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S.H. Vibrational study of fluid-filled functionally graded cylindrical shells resting on elastic foundations. *International Scholarly Research Network ISRN Mechanical Engineering*. 2011. Vol. 2011. P. 1–13. DOI: 10.5402/2011/892460.

22. Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K., Aziz Z.A., Prabakar K. Free vibration of layered cylindrical shells filled with fluid. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2016. Vol. 37. Iss. 6. P. 803–820. DOI: 10.1007/s10483-016-2089-6.

23. Daud N.I.M., Viswanathan K.K. Vibration of symmetrically layered angle-ply cylindrical shells filled with fluid. *PLoS One*. 2019. Vol. 14. No 7. P. 1–18. DOI: 10.1371/journal.pone.0219089.

24. *ANSYS 17.1. Theory Reference*. Documentation.

25. Кудин М.В. *Решение задач акустики в программном комплексе ANSYS*: Электрон. методич. пособие. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2011. 27 с.

26. Nami A., Radi B. *Fluid-Structure Interactions and Uncertainties: Ansys and Fluent Tools*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2017. 265 p.

27. Дяченко И.А., Миронов А.А., Свердлик Ю.М. Сравнительный анализ теорий и конечно-элементных моделей расчета свободных колебаний цилиндрических оболочек. Транспортные системы. *ИТС НГТУ*. Электрон. журн. 2019. №3(13). С. 55–63 DOI: 10.46960/62045_2019_3_55. (<https://www.transport-systems.ru/arkhiv/18-2019>). Проверено 03.02.2021.

28. Лепендин Л.Ф. *Акустика*: Учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.

29. Исакович М.А. *Общая акустика*. М.: Наука, 1973. 496 с.

30. Beranek L., Mellow T. *Acoustics: Sound Fields, Transducers and Vibration*. London: Academic Press, 2019. 879 p.

31. Pierce A.D. *Acoustics. An Introduction to its Physical Principles and Applications*. New York: Springer, 2019. 768 p.

32. Петров Б.М. *Электродинамика и распространение радиоволн*: Учебник для вузов. Изд. 2-е, испр. М.: Горячая линия–Телеком, 2007. 558 с.

References

1. Butusov D.S. Issledovanie pulsatsii potoka v tekhnologicheskikh truboprovodakh kompressornykh stantsiy magistralnykh gazoprovodov [Study of flow pulsation in process pipelines of compressor stations of main gas pipelines]. *Candidate's Thesis*. Gubkin Russian State University of Oil and Gas. Moscow. 2000. 199 p. (In Russian).

2. Yakubovich V.A. *Vibratsionnaya diagnostika truboprovodov kompressornykh stantsiy* [Vibration Diagnostics of the Gas Compressor Station Pipe Structures]. Moscow. Nedra Publ. 2004. 334 p. (In Russian).

3. Flugge W. *Stresses in Shells*. New York. Springer-Verlag. 1972. 525 p.

4. Goldenveizer A.L., Lidskii V.B., Tovstik P.E. *Svobodnye kolebaniia tonkikh uprugikh obolochek* [Free Vibrations of Thin Elastic Shells]. Moscow. Nauka Publ. 1979. 384 p. (In Russian).

5. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek [The Theory of Thin Shells]*. Leningrad. Sudpromgiz Publ. 1962. 431 p. (In Russian).
6. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek: Izbrannye trudy*. V 2 t. T. 1. [*General Theory of Shells: Selected Works*. In 2 vols. Vol. 1]. Moscow. Akademiya nauk SSSR Publ. 1962. 530 p. (In Russian).
7. Leissa A.W. *Vibration of Shells*. Columbus. Acoustical Society of America. 1993. 434 p.
8. Soedel W. *Vibrations of Shells and Plates*. New York. CRC Press. 2004. 553 p.
9. Volmir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza: Zadachi gidrouprugosti [Shells in the Flow of Liquid and Gas: Problems of Hydroelasticity]*. Moscow. Nauka Publ. 1979. 320 p. (In Russian).
10. Petrov V.V. *Teoriya rascheta plastin i obolochek [The Calculation Theory of Plates and Shells]*. Moscow. ASV Publ. 2018. 410 p. (In Russian).
11. Ilgamov M.A., Ivanov V.A., Gulin B.V. *Raschety obolochek s uprugim zapolnitelem [Calculations of Shells with Elastic Filler]*. Moscow. Nauka Publ. 1987. 260 p. (In Russian).
12. Shmakov V.P. *Izbrannye trudy po gidrouprugosti i dinamike uprugikh konstruktsiy [Selected Works on Hydroelasticity and Dynamics of Elastic Structures]*. Moscow. Bauman Moscow Technical University Publ. 2011. 287 p. (In Russian).
13. Ter-Akopiants G.L. Matematicheskoe modelirovanie voln uprugoy deformatsii v trubakh, vzaimodeystviyushchikh s zhidkostyu [Mathematical modeling of elastic deformation waves in pipes interacting with a liquid]. *Candidate's Thesis*. Saint-Petersburg State Marine Technical University. Saint-Petersburg. 2015. 147 p. (In Russian).
14. Seregin S.V. Vliyanie maloy prisoedinennoy massy na sobstvennyye chastoty i formy kolebaniy tonkikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek [Influence of a small attached mass on the natural frequencies and vibration forms of thin circular cylindrical shells]. *Candidate's Thesis*. Komsomolsk-on-Amur State Technical University. Komsomolsk-on-Amur. 2015. 122 p. (In Russian).
15. Leizerovich G.S., Taranukha N.A. Nonobvious features of dynamics of circular cylindrical shells. *Mechanics of Solids*. 2008. Vol. 43. Iss. 2. P. 246–253. DOI: 10.3103/S0025654408020106.
16. Rawat A., Matsagar V., Nagpal A. Finite element analysis of thin circular cylindrical shells. *Proc. Indian. Nat. Sci. Acad.* 2016. Vol. 82. No 2. P. 349–355. DOI: 10.16943/ptinsa/2016/48426.
17. Farshidianfar A., Oliyazadeh P. Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories. *International Journal of Mechanics and Applications*. 2012. Vol. 2. (5). P. 74–80. DOI: 10.5923/j.mechanics.20120205.04.
18. Gribkov V.A., Adamenko R.A. Dvumernaia model zhidkosti dlya rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy osesimmetrichnykh gidroobolocheknykh sistem [Two-dimensional fluid model for calculating the natural vibration frequencies of axially symmetric hydro-shell systems]. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii*. Elektronnyi nauchno-tehnicheskii zhurnal [*Electronic Science and Innovation*]. 2017. No 3(63), available at: <https://www.cyberleninka.ru/journal/n/inzhenernyy-zhurnal-nauka-i-innovatsii?i=1050026>. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-3-1593 (In Russian).
19. Safarov I.I., Tessaev M.Kh., Boltaev Z.I. Volny v tsilindricheskoy obolochke s vyazkoy zhidkostyu [Waves in cylindrical shell with a viscous fluid]. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika [Bulletin of Perm State University. Mathematics. Mechanics. Information Science]*. 2016. Iss. 3(34). P. 82–93. DOI: 10.17072/1993-0550-2016-3-82-93 (In Russian).
20. Naeem M.N., Gamkhar M., Arshad S.H., Shah A.G. Vibration analysis of submerged thin FGM cylindrical shells. *J. Mech. Sci. Technol.* 2013. Vol. 27. Iss. 3. P. 649–656. DOI: 10.1007/s12206-013-0119-6.
21. Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S.H. Vibrational study of fluid-filled functionally graded cylindrical shells resting on elastic foundations. *ISRN Mechanical Engineering*. 2011. Vol. 2011. P. 1–13. DOI: 10.5402/2011/892460.
22. Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K., Aziz Z.A., Prabakar K. Free vibration of layered cylindrical shells filled with fluid. *Appl. Math. Mech.* 2016. Vol. 37. Iss. 6. P. 803–820. DOI: 10.1007/s10483-016-2089-6.
23. Daud N.I.M., Viswanathan K.K. Vibration of symmetrically layered angle-ply cylindrical

- shells filled with fluid. *PLoS One*. 2019. Vol. 14. No 7. P. 1–18. DOI: 10.1371/journal.pone.0219089.
24. ANSYS 17.1. *Theory Reference*. Documentation.
25. Kudin M.V. *Reshenie zadach akustiki v programnom komplekse ANSYS*. Elektronnoe metodicheskoe posobie [*Solving Acoustic Problems in the ANSYS. Software Package: Electronic methodological guide*]. Nizhny Novgorod. NNGU Publ. 2011. 27 p. (In Russian).
26. Hami A., Radi B. *Fluid-Structure Interactions and Uncertainties: Ansys and Fluent Tools*. Hoboken. John Wiley & Sons. 2017. 265 p.
27. Dyachenko I.A., Mironov A.A., Sverdlik Iu.M. Sravnitelnyy analiz teoriy i konechno-elementnykh modeley rascheta svobodnykh kolebaniy tsilindricheskikh obolochek. Transportnye sistemy [Comparative analysis of theories and finite elements models of cylindrical shell free vibration calculation. Transport systems]. *ITS NGTU*. Electronic journal. 2019. No 3(13). P. 55–63. available at: <https://www.transport-systems.ru/arkhiv/18-2019>. DOI: 10.46960/62045_2019_3_55 (In Russian).
28. Lependin L.F. *Akustika*. Uchebnoe posobie dlia vuzov [*Acoustics*. Textbook for universities]. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 1978. 448 p. (In Russian).
29. Isakovich M.A. *Obshchaya akustika* [*General Acoustics*]. Moscow. Nauka Publ. 1973. 496 p. (In Russian).
30. Beranek L., Mellow T. *Acoustics. Sound Fields, Transducers and Vibration*. London. Academic Press. 2019, 879 p.
31. Pierce A.D. *Acoustics. An Introduction to its Physical Principles and Applications*. New York. Springer. 2019. 768 p.
32. Petrov B.M. *Elektrodinamika i rasprostranenie radiovoln*. Uchebnik dlia vuzov. 2-e izd., ispr. [*Electrodynamics and Radio Wave Propagation*. Textbook for universities. 2nd edition. revised]. Moscow. Goriachaya liniya–Telekom Publ. 2007. 558 p. (In Russian).

ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDIES OF FREE VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELL WITH ACOUSTIC MEDIUM

Dyachenko I.A.¹, Mironov A.A.²

¹LLC “Gazprom proektirovanie”, Nizhny Novgorod, Russian Federation

²Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev,
Nizhny Novgorod, Russian Federation

The research materials are related to the problem of ensuring vibration resistance of pipelines exposed to dynamic loads, for which increased vibration is the main cause of damage. The solution to this problem involves studying the parameters of free vibrations of the structure. The paper solves the problem of determining the natural frequencies and forms of vibrations of a section of a circular cylindrical shell filled with an medium considered in the acoustic approximation. The results of studies of the parameters of free vibrations were obtained both by the analytical method of shell theory based on the Kirchhoff-Love hypotheses, and using the finite element complex of engineering analysis ANSYS. It is shown that the influence of the medium density on the parameters of free vibrations of the shell depends on the ratio of the shell thickness to its radius it turns out to be significant only for the shape of vibrations associated with bending deformation, and insignificant for forms associated with deformations of the middle layer. A comparative analysis of the results of calculations obtained for models of compressible and incompressible medium shows that when solving the problem of determining the parameters of free vibrations of the shell, the compressibility of the medium can be neglected. At the same time, to solve practical problems that require taking into account the full spectrum of natural frequencies of the shell–medium system, a compressible medium model should be used, in which the results on the effect of shell stiffness on the frequency

spectrum of the medium volume are obtained. When solving practical problems of pipeline systems vibration, the use of the finite element method in a coupled formulation is an effective tool that allows us to consider all physical processes taking into account their mutual influence on each other.

Keywords: vibration resistance, cylindrical shell, cylindrical volume of the medium, acoustic medium, associated problem, free vibrations, natural frequency, shell theory, finite element analysis, ANSYS software package.