

УДК 539.3

**МЕТОД ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ  
В ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ БАЛКИ****Г.В. Костин, В.В. Саурин***Москва*

Получены уравнения, описывающие свободные продольные и поперечные малые колебания упругой прямолинейной балки прямоугольного поперечного сечения на основе плоской линейной теории упругости и метода интегродифференциальных соотношений. Существенной особенностью предлагаемого подхода является то, что изначально система уравнений в частных производных сводится к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Исследовано влияние геометрических и упругих характеристик балки на частоты и формы собственных колебаний.

Для нахождения приближенных решений краевых задач механики деформированного твердого тела используются различные упрощенные модели, позволяющие достаточно эффективно исследовать динамические свойства упругих тел и конструкций. Среди этих моделей особое место занимает теория балок [1]. Несмотря на то, что эта теория показала свою применимость для широкого класса задач в различных областях науки и техники, она не учитывает такие важные механические характеристики упругих конструкций, как влияние сдвиговых и анизотропных свойств материала на напряженно-деформированное состояние (НДС). Уточняющие формулы, позволяющие учесть влияние коэффициента Пуассона, были предложены как для статических (балка Тимошенко [2]), так и для динамических задач (поправка Рэлея [3]). В данной статье для вывода уравнений свободных колебаний балки применяется подход, основанный на разложении неизвестных функций напряжений и перемещений по малому параметру (отношению строительной высоты балки к ее длине) [4].

**1. Формулировка краевой задачи упругости**

Рассмотрим упругое тело, занимающее прямоугольную область  $\Omega$  с границей  $\gamma$ . Введем декартову систему координат  $Oxy$ , связанную с областью  $\Omega$  следующим образом: начало координат  $O$  расположено в середине левой вертикальной стороны пластины, а ось  $Ox$  перпендикулярна этой стороне. Ограничим рассмотрение НДС деформированного состояния изотропного тела двумерным случаем, описываемым системой дифференциальных уравнений линейной теории упругости (плоское напряженное состояние) [5]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0; \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y^0 = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \quad \varepsilon_{xy}^0 = \frac{1+\mu}{E}\tau_{xy}; \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \quad (1.3)$$

Высота пластины равна  $h$ , а длина –  $l$ . Толщина пластины  $b$  постоянна и для определенности равна единице. Считается, что граница  $\gamma$  свободна от нагрузок.

Граничные условия запишем в следующем виде:

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = 0, \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = 0, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (1.4)$$

Здесь обозначены соответственно компоненты:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  – тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ ;  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$  и  $\varepsilon_{xy}^0$  – тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ ;  $u$ ,  $v$  – вектора перемещений  $\mathbf{u}$ ;  $f_x$ ,  $f_y$  – вектора объемных сил  $\mathbf{f}$ ;  $n_x$ ,  $n_y$  – единичного вектора нормали к границе  $\mathbf{n}$ . Константы  $E$  и  $\mu$  являются модулем упругости и коэффициентом Пуассона.

Считается, что рассматриваемое тело может совершать малые упругие колебания относительно положения равновесия и вектор  $\mathbf{f}$  задается инерционными силами, вызванными движением точек упругого тела:

$$f_x = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad f_y = -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

где  $\rho$  – объемная плотность тела.

В случае, когда длина пластины  $l$  много больше ее высоты  $h$ , НДС тела описывается приближенными уравнениями классической теории балок. Уравнения продольных и поперечных колебаний балки [1, 2] имеют следующий вид:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.6)$$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (1.7)$$

где  $EI$  ( $I = h^3/12$ ) – изгибная жесткость балки.

## 2. Метод интегродифференциальных соотношений

В работах [6–8] изложены основные принципы решения задач линейной теории упругости на основе метода интегродифференциальных соотношений. В этом подходе локальные линейные соотношения (1.2) заменяются на интегральное равенство

$$\Phi = \int_{\Omega} \left[ \left( \varepsilon_x^0 - \frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E} \right)^2 + \left( \varepsilon_y^0 - \frac{\sigma_y - \mu\sigma_x}{E} \right)^2 + 2 \left( \varepsilon_{xy}^0 - \frac{1+\mu}{E} \tau_{xy} \right)^2 \right] d\Omega = 0. \quad (2.1)$$

В отличие от классической формулировки (1.1)–(1.4), в данном случае неизвестными функциями являются компоненты тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и вектора перемещений  $\mathbf{u}$ . Для решения задач упругости вводится эквивалентная вариационная формулировка:

$$\Phi[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}] \rightarrow \min_{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}} \quad (2.2)$$

при строгом выполнении дифференциальных соотношений (1.1), (1.3) и граничных условий (1.4).

Для того чтобы определить собственные колебания упругого тела, применим метод разделения переменных и представим неизвестные функции компонент тензора напряжений  $\sigma$  и вектора перемещений  $u$  в виде бесконечных рядов по степеням  $y/l$ :

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_x^{(n)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n, & \sigma_y(x, y) &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_y^{(n)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n, \\ \tau_{xy}(x, y) &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{xy}^{(n)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n, & & \\ u(x, y) &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n, & v(x, y) &= e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где  $\omega$  – неизвестная частота собственных колебаний.

Выбор разложения неизвестных функций по степеням  $y/l$  обусловлен двумя причинами: коэффициенты при соответствующих степенях  $y/l$  имеют размерности напряжений или перемещений, в случае узкой пластины ( $h \ll l$ ) разложение производится по малому параметру, так как  $|y| \leq h$ .

Чтобы найти приближенное решение задачи (2.2) с ограничениями (1.1), (1.3), (1.4), рассмотрим конечномерное представление функций напряжений и перемещений в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \left[ \sigma_x^{(0)}(x) + \sigma_x^{(1)}(x) \frac{y}{l} \right] e^{i\omega t}, \\ \tau_{xy} &= \left[ \tau_{xy}^{(0)}(x) + \tau_{xy}^{(1)}(x) \frac{y}{l} + \tau_{xy}^{(2)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^2 \right] e^{i\omega t}, \\ \sigma_y &= \left[ \sigma_y^{(0)}(x) + \sigma_y^{(1)}(x) \frac{y}{l} + \sigma_y^{(2)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^2 + \sigma_y^{(3)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^3 \right] e^{i\omega t}; \\ u &= \left[ u_0(x) + u_1(x) \frac{y}{l} \right] e^{i\omega t}, \quad v = \left[ v_0(x) + v_1(x) \frac{y}{l} \right] e^{i\omega t}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

В разложении (2.4)  $\sigma_x$  – линейная функция по  $y$ . Выбор степени аппроксимации функций  $\tau_{xy}$  и  $\sigma_y$  обусловлен тем обстоятельством, что в уравнениях равновесия (1.1) соответствующие производные от функций напряжений должны иметь одинаковый порядок разложения по малому параметру  $y/l$  для существования нетривиальных решений. Согласно гипотезам, предложенным Я. Бернулли [1]: “...прямые линии, нормальные к срединной поверхности до деформации, остаются прямыми и нормальными к срединной поверхности и после деформации не изменяют своей длины”. Линейность разложения функций перемещений в (2.5) относительно  $y/l$  предполагает выполнение этой гипотезы в части, касающейся сохранения плоскости поперечных сечений при деформировании упругого тела.

Подставляя разложения (2.4) и (2.5) в уравнения равновесия (1.1) и приравнявая

нулю выражения при соответствующих степенях  $y/l$ , получаем систему пяти линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x^{(0)}}{dx} + \tau_{xy}^{(1)} + \rho\omega^2 u_0 = 0, \quad \frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} + 2\tau_{xy}^{(2)} + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\ \frac{d\tau_{xy}^{(0)}}{dx} + \sigma_y^{(1)} + \rho\omega^2 v_0 = 0, \quad \frac{d\tau_{xy}^{(1)}}{dx} + 2\sigma_y^{(2)} + \rho\omega^2 v_1 = 0, \\ \frac{d\tau_{xy}^{(2)}}{dx} + 3\sigma_y^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Удовлетворяя граничным условиям на верхней и нижней частях пластины, которые имеют вид

$$\sigma_y(x, \pm h/2) = \tau_{xy}(x, \pm h/2) = 0, \quad (2.7)$$

выражения для компонент тензора напряжений (2.4) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)} \frac{y}{l}, \quad \tau_{xy} = \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \tau_{xy}^{(0)}, \\ \sigma_y = \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \left( \sigma_y^{(0)}(x) + \sigma_y^{(1)}(x) \frac{y}{l} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учетом (2.8) уравнения равновесия (2.6) могут быть разрешены, например, относительно неизвестных функций  $u_0, u_1, v_0, v_1$  и  $\sigma_y^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} u_0 = -\frac{1}{\rho\omega^2} \frac{d\sigma_x^{(0)}}{dx}, \quad u_1 = -\frac{1}{\rho\omega^2} \left( \frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} - \frac{8l\tau_{xy}^{(0)}}{h^2} \right), \\ v_0 = -\frac{2}{3\rho\omega^2} \frac{d\tau_{xy}^{(0)}}{dx}, \quad v_1 = \frac{8l\sigma_y^{(0)}}{\rho\omega^2 h^2}, \quad \sigma_y^{(1)} = -\frac{l}{3} \frac{d\tau_{xy}^{(0)}}{dx}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, после удовлетворения уравнениям равновесия (2.6) и граничным условиям (2.7) интегродифференциальная задача (1.1), (1.3), (1.4), (2.1) сводится к минимизации функционала  $\Phi$ , зависящего только от четырех неизвестных функций напряжений  $\sigma_x^{(0)}, \sigma_x^{(1)}, \tau_{xy}^{(0)}$  и  $\sigma_y^{(0)}$ , при следующих граничных условиях:

$$\sigma_x^{(0)}(0) = \sigma_x^{(0)}(l) = \sigma_x^{(1)}(0) = \sigma_x^{(1)}(l) = \tau_{xy}^{(0)}(0) = \tau_{xy}^{(0)}(l) = 0. \quad (2.10)$$

Собственные значения  $\omega$  находятся из условия существования нетривиальных решений сформулированной задачи. Для того чтобы построить неизвестные функции напряжений, воспользуемся сформулированным выше предположением о сохранении плоскости поперечных сечений при деформировании пластины и проанализируем более детально структуру функционала  $\Phi$ , который с учетом разложения функций напряжений и перемещений (2.3) имеет вид:

$$\Phi = \int_{\Omega} [H_1^2 + H_2^2 + 2H_3^2] d\Omega, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned}
H_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{du_i}{dx} - \frac{\sigma_x^{(i)} - \mu\sigma_y^{(i)}}{E} \right) \left( \frac{y}{l} \right)^i, \\
H_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+1)v_{i+1}}{l} - \frac{\sigma_y^{(i)} - \mu\sigma_x^{(i)}}{E} \right) \left( \frac{y}{l} \right)^i, \\
H_3 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{(i+1)u_{i+1}}{2l} + \frac{1}{2} \frac{dv_i}{dx} - \frac{(1+\mu)\tau_{xy}^{(i)}}{E} \right) \left( \frac{y}{l} \right)^i.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Равенство нулю интеграла (2.11) предполагает, что функции  $H_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , равны нулю в области  $\Omega$  везде, за исключением, быть может, множества точек меры ноль. В данной работе не предполагается возможность существования таких особых точек. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что если  $\Phi = 0$ , то  $H_i \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в области  $\Omega$ . Отсюда вытекает равенство нулю всех коэффициентов при соответствующих степенях  $y/l$  в (2.12). Используя конечномерное представление напряжений (2.4) и перемещений (2.5), можно с помощью неизвестных функций  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  и  $\sigma_y^{(0)}$  обеспечить равенство нулю только следующих четырех коэффициентов в (2.12):

$$\frac{du_0}{dx} - \frac{\sigma_x^{(0)} - \mu\sigma_y^{(0)}}{E} = 0, \quad \frac{v_1}{l} - \frac{\sigma_y^{(0)} - \mu\sigma_x^{(0)}}{E} = 0; \tag{2.13}$$

$$\frac{du_1}{dx} - \frac{\sigma_x^{(1)} - \mu\sigma_y^{(1)}}{E} = 0, \quad \frac{u_1}{l} + \frac{dv_0}{dx} - \frac{2(1+\mu)\tau_{xy}^{(0)}}{E} = 0, \tag{2.14}$$

которые не содержат нелинейных по  $y$  членов разложения (2.5). Уравнения (2.13) и (2.14) с учетом соотношений (2.9) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\tau_{xy}^{(0)}$  и  $\sigma_y^{(0)}$  с граничными условиями (2.10).

Подставляя решение этой системы  $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ ,  $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$ ,  $\tilde{\tau}_{xy}^{(0)}$  и  $\tilde{\sigma}_y^{(0)}$  в (2.11) и принимая во внимание конечномерное представление полей напряжений (2.4) и перемещений (2.5), получаем:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi} &= \int_{\Omega} [\tilde{H}_1^2 + \tilde{H}_2^2 + 2\tilde{H}_3^2] d\Omega, \\
\tilde{H}_1 &= -\frac{4\mu\tilde{\sigma}_y^{(0)}}{E} \frac{y^2}{h^2} + \frac{4\mu}{3E} \frac{d\tilde{\tau}_{xy}^{(0)}}{dx} \frac{y^3}{h^2}, \\
\tilde{H}_2 &= \frac{1}{E} \left( \frac{l}{3} \frac{d\tilde{\tau}_{xy}^{(0)}}{dx} + \mu\tilde{\sigma}_x^{(1)} \right) \frac{y}{l} + \frac{4\tilde{\sigma}_y^{(0)}}{E} \frac{y^2}{h^2} - \frac{4}{3E} \frac{d\tilde{\tau}_{xy}^{(0)}}{dx} \frac{y^3}{h^2}, \\
\tilde{H}_3 &= \frac{4}{\rho\omega^2} \frac{d\tilde{\sigma}_y^{(0)}}{dx} \frac{y}{h^2} + \frac{(1+\mu)\tilde{\tau}_{xy}^{(0)}}{E} \frac{y^2}{h^2}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Значение интеграла  $\tilde{\Phi}$  может служить критерием качества приближенного решения интегродифференциальной задачи (1.1), (1.3), (1.4), (2.1).

Важно отметить, что уравнения (2.13) приближенно описывают процесс растяжения и сжатия балки прямоугольного сечения (продольные колебания), а уравнения (2.14) – ее изгиб (поперечные колебания).

### 3. Продольные колебания балки

Подставив выражения для функций перемещений  $u_0$  и  $v_1$  из (2.9) в систему уравнений (2.13), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{E}{\rho\omega^2} \frac{d^2\sigma_x^{(0)}}{dx^2} + \sigma_x^{(0)} - \mu\sigma_y^{(0)} &= 0, \\ \frac{8\sigma_y^{(0)}}{\rho\omega^2 h^2} - \frac{\sigma_y^{(0)} - \mu\sigma_x^{(0)}}{E} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Систему (3.1) легко свести к одному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка относительно неизвестной функции  $\sigma_x^{(0)}$ :

$$\frac{d^2\sigma_x^{(0)}}{dx^2} + \lambda^2\sigma_x^{(0)} = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 h^2} \left( 1 - \frac{\omega^2 \mu^2}{\omega^2 - 8\omega_0^2} \right). \quad (3.3)$$

Здесь  $\omega_0$  – характерная частота, определяемая соотношением  $\omega_0^2 = E/(\rho h^2)$ . При этом значение  $\sigma_y^{(0)}$  находится из второго уравнения в (3.1):

$$\sigma_y^{(0)} = \frac{\mu\omega^2}{\omega^2 - 8\omega_0^2} \sigma_x^{(0)}. \quad (3.4)$$

Граничные условия записываются в следующем виде:

$$\sigma_x^{(0)}(0) = \sigma_x^{(0)}(l) = 0. \quad (3.5)$$

В отличие от классического уравнения продольных колебаний балки (1.6) относительно функции перемещения  $u$ , соотношение (3.2) содержит параметр  $\lambda$ , зависящий нелинейно от частоты собственных колебаний  $\omega$ , а также от параметров задачи  $\mu$ ,  $h$  и  $\omega_0^2$ . Значения  $\lambda^2(\omega)$  положительны при  $\omega \in (0, \omega_1) \cup (\omega_2, \infty)$  и отрицательны при  $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ , где

$$\omega_1^2 = 8\omega_0^2, \quad \omega_2^2 = \frac{8\omega_0^2}{1-\mu^2}. \quad (3.6)$$

Можно показать, что при  $\lambda^2(\omega) \leq 0$  нетривиальных решений краевой задачи на собственные значения (3.2), (3.5) не существует. При  $\lambda^2(\omega) > 0$  решение имеет вид:

$$\sigma_x^{(0)} = c \sin(\lambda x). \quad (3.7)$$

Характеристическое уравнение для определения собственных частот  $\omega$  может быть записано следующим образом:

$$\frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{\omega^2 \mu^2}{\omega^2 - 8\omega_0^2}} = \varepsilon n, \quad \varepsilon = \frac{\pi h}{l}. \quad (3.8)$$

где  $n = 1, 2, 3 \dots$

Два положительных корня  $\omega_+$  и  $\omega_-$  уравнения (3.8) могут быть получены в явном виде как функции, зависящие от  $n \geq 0$ :

$$\omega_{\pm}(n) = \sqrt{\frac{8 + \varepsilon^2 n^2 \pm \sqrt{64 + \varepsilon^2 n^2 [\varepsilon^2 n^2 - 16(1 - 2\mu^2)]}}{2(1 - \mu^2)}} \omega_0. \quad (3.9)$$

Отметим, что  $\omega_{\pm}(n)$  – монотонно возрастающие функции,  $\omega_-(0) = 0$ ,  $\omega_+(0) = \omega_2$ , и для больших значений  $n$  справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\omega_- \Big|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \omega_1, \quad \omega_+ \Big|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\omega_0 \varepsilon n}{\sqrt{1 - \mu^2}}.$$

На рис. 1 представлены функции  $\omega_{\pm}(n)$  (сплошные линии) при значениях параметров системы:  $\omega_0 = 1$ ,  $\varepsilon = \pi/10$ ,  $\mu = 0,3$ . Горизонтальные пунктирные линии отвечают значениям  $\omega = \omega_1 = 2\sqrt{2} \approx 2,828$  и  $\omega = \omega_2 \approx 2,965$ . Наклонная пунктирная линия соответствует классическому балочному решению при тех же параметрах системы. Собственные частоты определяются из приведенных зависимостей при целых значениях  $n$ . Отметим, что характер поведения функции  $\omega_-(n)$  для первых нескольких значений впервые был обоснован Рэлеем [3].

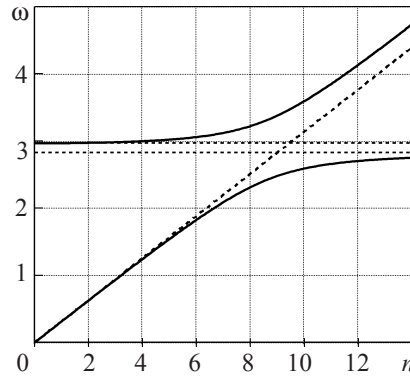


Рис. 1

Собственные формы напряжений  $\sigma_x^{(0)}$  и  $\sigma_y^{(0)}$  для различных значений  $\omega_{\pm}(n)$  при заданных параметрах показаны на рис. 2 (нижняя ветвь решения  $\omega_-$ ) и рис. 3 (верхняя ветвь решения  $\omega_+$ ). Пунктирной линией на рис. 2 представлена функция  $\sigma_x^{(0)}$ , определенная в (3.7) при  $c = 1$  и соответствующая первой форме колебаний ( $n = 1$ ).

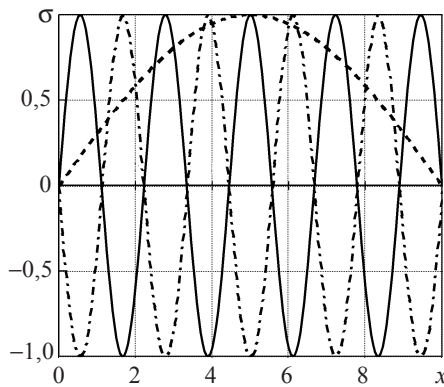


Рис. 2

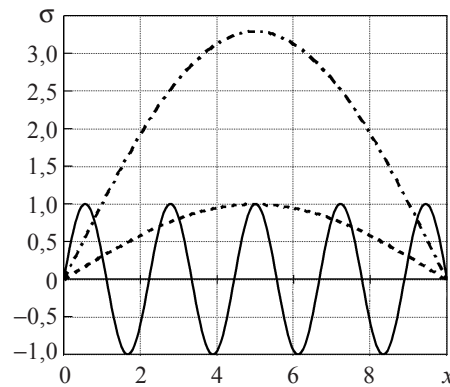


Рис. 3

При  $n = 1$  абсолютное значение  $|\sigma_y^{(0)} / \sigma_x^{(0)}| \ll 1$ . Сплошной и штрихпунктирной линиями показаны соответственно собственные функции  $\sigma_x^{(0)}$  и  $\sigma_y^{(0)}$  для  $n = 9$ . На рис. 3 пунктирной, штрихпунктирной и сплошной линиями представлены соот-

ветственно функции  $\sigma_x^{(0)}$ ,  $\sigma_y^{(0)}$  для  $\omega_+(1)$  и  $\sigma_x^{(0)} \approx \sigma_y^{(0)}$  для  $\omega_+(9)$ . Существенной особенностью продольных колебаний является то, что для нижней ветви  $\omega_-(n)$   $\sigma_y^{(0)} \sigma_x^{(0)} \leq 0$ , а для верхней  $\sigma_y^{(0)} \sigma_x^{(0)} \geq 0$ . Отметим также, что при заданных параметрах системы и  $n = 9$  максимальные значения  $\sigma_x^{(0)}$  и  $\sigma_y^{(0)}$  почти равны для обеих ветвей решения (3.9).

В табл. 1 приведены собственные частоты  $\omega_{\pm}(n)$  для  $n \leq 10$  и соответствующие им значения  $\sigma_y^{(0)} / \sigma_x^{(0)}$ , которые изменяются монотонно с увеличением  $n$ .

Таблица 1

$n$	1	2	3	4	5
$\omega_-$	0,313983	0,626863	0,937289	1,243308	1,541742
$\sigma_y/\sigma_x$	-0,00374	-0,0155	-0,03701	-0,07185	-0,12682
$\omega_+$	2,966662	2,971882	2,981411	2,996783	3,020872
$\sigma_y/\sigma_x$	3,295953	3,184337	3,000231	2,747212	2,432066
$n$	6	7	8	9	10
$\omega_-$	1,827009	2,089145	2,312314	2,480259	2,591177
$\sigma_y/\sigma_x$	-0,2148	-0,36016	-0,60457	-0,99848	-1,56654
$\omega_+$	3,059037	3,121071	3,222681	3,380023	3,59482
$\sigma_y/\sigma_x$	2,067689	1,678451	1,306006	1,00082	0,787534

#### 4. Поперечные колебания балки

Подставляя выражения для функций перемещений  $u_1$  и  $v_0$  из (2.9) в систему уравнений (2.14), получаем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $\sigma_x^{(1)}$  и  $\tau_{xy}^{(0)}$ :

$$12h^2\omega_0^2 \frac{d^2\sigma_x^{(1)}}{dx^2} + l(24\omega_0^2 - \mu\omega^2) \frac{d\tau_{xy}^{(0)}}{dx} + 12\omega^2\sigma_x^{(1)} = 0, \quad (4.1)$$

$$lh^2\omega_0^2 \frac{d^2\tau_{xy}^{(0)}}{dx^2} + 6h^2\omega_0^2 \frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} + 3l((1+\mu)\omega^2 - 4\omega_0^2)\tau_{xy}^{(0)} = 0.$$

Выражая в явном виде, например, функцию  $\tau_{xy}^{(0)}$  из системы (4.1)

$$\tau_{xy}^{(0)} = \frac{h^2\omega_0^2 \left[ 2h^2\omega_0^2 d^3\sigma_x^{(1)} / dx^3 + (24\omega_0^2 + (2-\mu)\omega^2) d\sigma_x^{(1)} / dx \right]}{2l((1+\mu)\omega^2 - 4\omega_0^2)(\mu\omega^2 - 24\omega_0^2)}, \quad (4.2)$$

получаем дифференциальное уравнение четвертого порядка для нахождения  $\sigma_x^{(1)}$ :

$$2h^4\omega_0^4 \frac{d^4\sigma_x^{(1)}}{dx^4} + (8+5\mu)h^2\omega_0^2\omega^2 \frac{d^2\sigma_x^{(1)}}{dx^2} + 6\omega^2((1+\mu)\omega^2 - 4\omega_0^2)\sigma_x^{(1)} = 0. \quad (4.3)$$

Заметим, что знаменатель в выражении (4.2) при

$$\omega = \omega_{3,4}, \quad \omega_3^2 = \frac{4\omega_0^2}{1+\mu}, \quad \omega_4^2 = \frac{24\omega_0^2}{\mu} \quad (4.4)$$

обращается в ноль. Эти случаи должны рассматриваться отдельно.

Граничные условия для уравнения (4.3) с учетом (4.2) имеют вид:

$$\sigma_x^{(1)}(0) = \sigma_x^{(1)}(l) = \tau_{xy}^{(0)}(0) = \tau_{xy}^{(0)}(l) = 0. \quad (4.5)$$



Общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (4.3) может быть записано следующим образом:

$$\sigma_x^{(1)} = \tilde{n}_1 e^{\kappa_1 x} + \tilde{n}_2 e^{\kappa_2 x} + \tilde{n}_3 e^{\kappa_3 x} + \tilde{n}_4 e^{\kappa_4 x}, \quad (4.6)$$

где  $\kappa_i(\omega)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , – корни биквадратного характеристического уравнения

$$2h^4 \omega_0^4 \kappa^4 + (14 + 1\mu)h^2 \omega_0^2 \omega^2 \kappa^2 + 12\omega^2 ((1 + \mu)\omega^2 - 2\omega_0^2) = 0, \quad (4.7)$$

которые находятся аналитически:

$$\kappa^2 = -\frac{\omega}{4\omega_0 h^2} \left[ (8 + 5\mu)\omega \pm \sqrt{(16 + 32\mu + 25\mu^2)\omega^2 + 192\omega_0^2} \right]. \quad (4.8)$$

Из (4.8) следует, что для всех  $\omega > 0$  существуют два чисто мнимых комплексно-сопряженных корня. При  $\omega < \omega_3$  два оставшихся корня принимают действительные значения, а при  $\omega > \omega_3$  – чисто мнимые. Следовательно, общее решение уравнения (4.3) при  $\omega < \omega_3$  имеет вид:

$$\sigma_x^{(1)} = c_1 \sin(\kappa_1 x) + c_2 \cos(\kappa_1 x) + c_3 \operatorname{sh}(\kappa_2 x) + c_4 \operatorname{ch}(\kappa_2 x), \quad (4.9)$$

а при  $\omega > \omega_3$

$$\sigma_x^{(1)} = c_1 \sin(\kappa_1 x) + c_2 \cos(\kappa_1 x) + c_3 \sin(\kappa_2 x) + c_4 \cos(\kappa_2 x). \quad (4.10)$$

Собственные значения  $\omega$  находятся из условия существования нетривиальных решений (4.9) и (4.10) при удовлетворении граничных условий (4.5). В табл. 2 приведены численные значения первых 20 собственных частот свободных поперечных колебаний прямоугольной пластины для значений параметров:  $\omega_0 = 1$ ,  $h = 1$ ,  $l = 10$ ,  $\mu = 0,3$ . Первые 12 частот соответствуют решению (4.9), а остальные – решению (4.10). Для выбранных параметров  $\omega_3 \approx 1,75$ . Можно отметить, что количество собственных частот, соответствующих решению (4.9), конечно и увеличивается с ростом параметра  $l/h$ .

Таблица 2

$n$	1	2	3	4	5
$\omega$	0,062199	0,160749	0,291054	0,440875	0,602304
$n$	6	7	8	9	10
$\omega$	0,770125	0,940999	1,112621	1,283118	1,450217
$n$	11	12	13	14	15
$\omega$	1,609740	1,740626	1,806939	1,836194	1,961971
$n$	16	17	18	19	20
$\omega$	1,970122	2,131570	2,142076	2,306697	2,334447

На рис. 4 сплошной линией представлена зависимость первых 12 частот от номера частоты  $n$ . Для сравнения пунктирной линией приведены первые частоты поперечных колебаний, полученные из классической модели балки, описываемой уравнением (1.7) при тех же параметрах системы. Отметим квадратичный рост классических собственных значений с увеличением  $n$ , в то время как частоты, полученные с помощью метода интегродифференциальных соотношений, ведут себя в зависимости от  $n$  почти линейно и существенно отличаются от классических значений даже при небольших номерах  $n$ .

Собственные формы перемещений  $u(x, h/2)$  и  $v(x, 0)$ , полученные с помощью

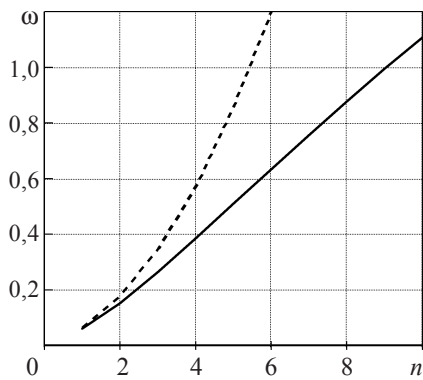


Рис. 4

соотношений (2.5) и (2.9) для различных значений  $\omega(n)$  при заданных параметрах задачи, показаны на рис. 5 ( $\omega < \omega_3$ ) и рис. 6 ( $\omega > \omega_3$ ). Сплошной линией на рис. 5 представлены функции изгиба центральной линии пластины  $v(x, 0)$ , соответствующие собственным напряжениям  $\sigma_x^{(1)}$ , определенным в (4.9) при  $c_1 = 1$ , и  $n = 1, 12$ . Линия с одним максимумом отвечает случаю  $n = 1$ . Пунктирными линиями показаны горизонтальные смещения верхней границы балки  $u(x, h/2)$  при  $n = 1, 12$ . Линия со многими экстремумами соответствует случаю  $n = 12$ .

Отметим, что при  $n = 1$  форма собственных колебаний определяется чистым изгибом (сдвиговые деформации практически отсутствуют), в то время как с ростом  $n$  сдвиг начинает оказывать существенное влияние на форму собственных колебаний. Так, при  $n = 12$  функция  $u(x, h/2)$  почти везде положительна. Показанное пунктирной линией на рис. 6 перемещение  $u(x, h/2)$  при  $n = 13$  ( $\omega > \omega_3$ ) соизмеримо по абсолютным значениям с величиной  $v(x, 0)$  (сплошная линия) и не изменяет своего знака по всей длине пластины.

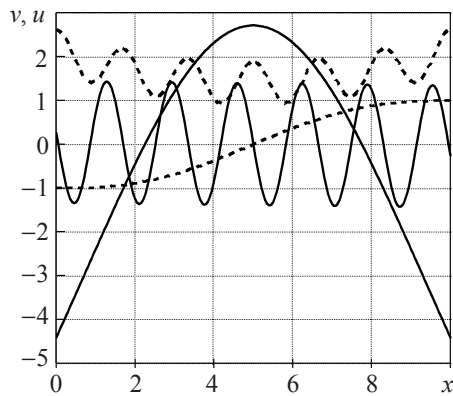


Рис. 5

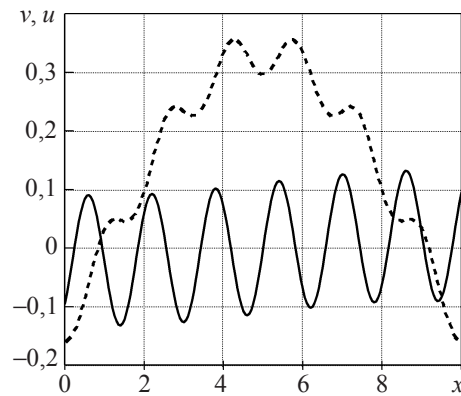


Рис. 6

С увеличением параметра  $l/h$  различие между первыми собственными частотами  $\omega$ , полученными методом интегродифференциальных соотношений ( $\omega$ ) и классическим подходом ( $\omega_c$ ), уменьшается. В табл. 3 приведены численные значения первых 6 частот  $\omega$  и  $\omega_c$ , а также относительное процентное соотношение  $\delta_\omega = (\omega_c - \omega)/\omega \times 100\%$  для параметров задачи  $\omega_0 = 1$ ,  $h = 1$ ,  $l = 100$ ,  $\mu = 0,3$ .

Таблица 3

$n$	1	2	3	4	5	6
$\omega$	0,000645	0,001778	0,003482	0,005747	0,008569	0,011941
$\omega_c$	0,000646	0,001780	0,003490	0,005769	0,008619	0,012037
$\delta_\omega, \%$	0,04	0,12	0,23	0,38	0,57	0,80

**Закключение.** Для продольных свободных колебаний прямолинейной упругой балки на основе метода интегродифференциальных соотношений теоретически

показано существование двух различных типов собственных перемещений и внутренних напряжений балки. Для поперечных колебаний выявлено наличие двух частотных зон, соответствующих различным видам решений характеристического биквадратного уравнения, полученного для предложенной модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 05-01-00563, 05-08-18094) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1245.2006.1, НШ-9831.2006.1).

#### *Литература*

1. Доннелл, Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Л.Г. Доннелл. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
2. Тимошенко, С.П. Сопроотивление материалов. Т. 1 / С.П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1960. – 379 с.
3. Стрэтт, Дж. В. (Лорд Рэлей) Теория звука. Т. 1 / Дж. В. Стрэтт (Лорд Рэлей) – М.–Л.: Гостехиздат, 1940. – 500 с.
4. Костин, Г.В. Вариационные подходы в теории балок / Г.В. Костин, В.В. Саурин // Изв. РАН. МТТ. – 2006, №1. – С. 84–98.
5. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
6. Костин, Г.В. Интегро-дифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости / Г.В. Костин, В.В. Саурин // Докл. РАН. – 2005. – Т. 404, № 5. – С. 628–631.
7. Костин, Г.В. Интегро-дифференциальная постановка и вариационный метод решения задач линейной теории упругости / Г.В. Костин, В.В. Саурин // ППП. – 2005. – Вып. 67. – С. 190–198.
8. Kostin, G.V. The method of integrodifferential relations for linear elasticity problems / G.V. Kostin, V.V. Saurin // Archive of Applied Mechanics. – 2006. – DOI 10.1007/s00419-006-0039-3.

[26.07.2006]

### **METHOD OF INTEGRODIFFERENTIAL RELATIONS IN THE PROBLEM OF BEAM EIGENVIBRATIONS**

**V.G. Kostin, V.V. Saurin**

The equations describing free longitudinal and lateral small vibrations of an elastic rectilinear beam of the rectangular transverse section are derived based on 2-dimensional linear theory of elasticity and the method of integro-differential relations. An effect of geometric and elastic beam characteristics on the frequencies and types of eigen vibrations is analyzed. The presence of eigen displacements and inner eigen stresses of two different types is theoretically validated for the longitudinal beam vibrations. As for lateral vibrations, two frequency zones are revealed, which correspond to various types of solving a characteristic biquadratic equation, derived for the beam model developed.