

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-524-544

**АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ
РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ФУНКЦИЙ
В ИЗОБРАЖЕНИЯХ ЛАПЛАСА С ПРИМЕНЕНИЕМ
К ДИНАМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ ПОРОУПРУГОСТИ***

© 2020 г.

Марков И.П., Петров А.Н., Боев А.В.

*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

markov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 08.12.2020

Описано применение метода Vector Fitting для аппроксимации функций в изображениях Лапласа с помощью перемещения полюсов. Используемый вариант метода изложен для одной функции и для набора функций. Представлен алгоритм адаптивного построения правильных дробно-рациональных аппроксимаций наборов функций на основе метода Vector Fitting. В ходе работы алгоритма последовательно определяются аппроксимации с возрастающими порядками до достижения заданного условия сходимости. Приведены конкретные рекомендации по выбору параметров алгоритма. Описанный алгоритм позволяет адаптивно выбирать частотные точки, которые используются для построения дробно-рациональных аппроксимаций, без какой-либо предварительной информации о характере функций в изображениях. Решения во временной области строятся аналитическим обращением полученных дробно-рациональных аппроксимаций. Разработанный алгоритм детально протестирован на задаче о распространении волн в одномерном пороупругом стержне конечной длины. Используется модель Био линейной изотропной полностью насыщенной пороупругости. Для общего случая приведены аналитические решения задачи в изображениях для перемещений, напряжений, поровых давлений и потока. Для предельного значения коэффициента проницаемости пороупругого материала приведены соответствующие аналитические решения во времени. Подробно рассмотрены результаты работы алгоритма при построении аппроксимаций решений в изображениях для двух значений коэффициента проницаемости. Исследована сходимость алгоритма в зависимости от количества комплексных частот. Установлено, что при росте порядка рациональной аппроксимации относительная погрешность изменяется единообразно для всех рассматриваемых функций. Показано, что при выборе параметров алгоритма в рекомендуемых диапазонах решения во времени устойчивы и амплитуда осцилляций, вызванных отсечением высокочастотной части спектра, остается умеренной на всем заданном временном интервале. Для предельного значения коэффициента проницаемости наглядно продемонстриро-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-08-00451).

вана высокая точность полученных приближенных результатов в сравнении с аналитическими решениями во времени.

Ключевые слова: обращение преобразования Лапласа, Vector Fitting, рациональные аппроксимации, пороупругость, динамика.

Введение

Исследования распространения волн теоретическими и экспериментальными методами в насыщенной жидкостью или газом пористой среде являются актуальными и имеют существенное значение для развития представлений о процессах, сопровождающих применение пористых сред в современных технологиях. Решение такой задачи представляет значительный интерес в связи с проблемами разведочной геофизики, физики горных пород, сейсмоакустики. В этих случаях часто требуется совместно с полноценной механической моделью напряженно-деформированного состояния среды описать фильтрацию наполнителя в порах, что даже при существенных упрощениях значительно усложняет вычислительную схему краевой задачи по сравнению с упругой или вязкоупругой постановками и требует разработки адекватного математического, методического и соответствующего программного обеспечения. В то же время отсутствие до настоящего времени общепринятой модели пористой среды, которая обладает математическими свойствами, обеспечивающими эффективное применение современных высокоточных численных методов, обуславливает значительный интерес к проведению исследований с помощью аналитических и численно-аналитических подходов. Аналитические и численно-аналитические решения дают возможность более эффективного анализа практически значимых задач, выявления механизмов взаимодействия твердой и жидкой фаз, проведения апостериорной оценки численных результатов, переходных процессов, обеспечивая требуемый компромисс между точностью решения и эффективностью численной реализации.

Подробный обзор существующих аналитических решений пороупругой динамики представлен в [1]. Одномерные аналитические решения задачи о распространении продольных волн в пороупругом полубесконечном стержне приведены в статьях [2–4] при предельных значениях коэффициента проницаемости пористой среды. В [5] с использованием рядов Фурье разработано аналитическое решение для динамического отклика в стержне конечной длины во всем диапазоне значений коэффициента проницаемости. Аналитические решения для конечных и полубесконечных пороупругих и поровязкоупругих стержней при различных видах граничных условий, полученные методом разделения переменных, представлены в [6–9].

На практике часто используется u - p -формулировка (перемещения – поровые давления) модели Био [10, 11] линейной изотропной полностью насыщенной пороупругости. В этом случае аналитические выражения уравнений движения без ограничений на значение коэффициента проницаемости удается получить только в пространстве изображений Лапласа. Для модели Био в [12] построены численно-аналитические решения в изображениях Лапласа для стержня конечной длины. После решения задачи в изображениях для получения решения во временной области необходимо использовать какую-либо схему численного обращения преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа представляет собой универсальное средство для решения дифференциальных уравнений, имеющих во многих задачах различных

областей механики и математики. С развитием вычислительной техники актуальным стал вопрос о разработке численных методов обращения преобразования Лапласа. В настоящее время имеется значительное число различных подходов [13–22]. Во всех подходах значения комплексных частот, в которых вычисляется функция, подлежащая обращению, определяются задаваемыми параметрами конкретного метода без учета характера самой функции. Это не создает больших затруднений, если известен замкнутый вид функции в изображениях. Если же сама целевая функция является решением какой-либо задачи и ее значения можно получить только с применением численных методов (например, решение системы дифференциальных уравнений движения линейной теории пороупругости методом граничных элементов), то предпочтительнее использовать метод обращения, в котором требуется меньшее количество вычислений значений функции. Ситуация еще больше усложняется, когда требуется одновременно обращать несколько функций.

Vector Fitting (VF) – это метод аппроксимации функций в изображениях с помощью перемещения полюсов [23–25], который позволяет строить дробно-рациональные аппроксимации нескольких функций на общем наборе полюсов. В настоящей статье представлен алгоритм адаптивного построения рациональных аппроксимаций нескольких функций в изображениях Лапласа, в основе которого лежит метод VF. Центральной идеей алгоритма является последовательное определение двух аппроксимаций с увеличивающимися порядками до тех пор, пока не будет выполнено заданное условие сходимости. После этого полученные дробно-рациональные функции можно аналитически обратить во временную область. Разработанный алгоритм протестирован на задаче о распространении волн в одномерном пороупругом стержне. Высокая точность получаемых аппроксимаций подтверждена сравнением с аналитическими решениями в частотной и временной областях.

1. Метод Vector Fitting для одной функции

Изложим метод VF [23] в том варианте, в котором он используется в разработанном алгоритме. Пусть задана функция $f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что $f(t) = 0$ при $t < 0$. Преобразование Лапласа определяется как

$$\bar{f}(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} \exp(-st)f(t)dt,$$

где s – это комплексная частота, параметр преобразования Лапласа.

Будем рассматривать дробно-рациональную аппроксимацию функции $\bar{f}(s)$

$$\bar{f}(s) \approx \frac{b_{N-1}s^M + b_{N-2}s^{M-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_Ns^{N_p} + a_{N-1}s^{N_p-1} + \dots + a_1s + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (1)$$

где $M < N_p$ (то есть $P(s)/Q(s)$ является правильной дробно-рациональной функцией) и коэффициенты полиномов $P(s)$ и $Q(s)$ – вещественные числа.

Постулируем, что знаменатель $Q(s)$ имеет простые нули p_1, p_2, \dots, p_{N_p} . Представим правильную дробно-рациональную функцию $P(s)/Q(s)$ в виде суммы конечного числа простейших дробей:

$$\bar{f}(s) \approx \frac{P(s)}{Q(s)} = F(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{r_k}{s - p_k}, \quad (2)$$

где N_p – количество полюсов (порядок аппроксимации); вычеты r_k и полюсы p_k являются вещественными величинами или комплексно-сопряженными парами чисел, то есть $p_i \in \mathbb{R}$, или $p_{i+i+1} = \alpha_i \pm i\omega_i$, $\alpha_i, \omega_i \in \mathbb{R}$. Полюсы p_k функции $F(s)$ – это нули полинома $Q(s)$. Вычеты и полюсы в (2) должны быть вещественными числами или комплексно-сопряженными парами чисел, так как коэффициенты полиномов $P(s)$ и $Q(s)$ являются вещественными числами. Кроме того, обратное преобразование Лапласа $f(t) = L^{-1}[\tilde{f}(s)] \approx L^{-1}[F(s)]$ должно быть вещественной функцией. В отличие от оригинальной формулировки VF [23], рассматриваются строго правильные дробно-рациональные аппроксимации, поэтому в правой части (2) отсутствует целая часть $d + sh$, так как $M < N_p$.

Введем вспомогательную *неизвестную* рациональную функцию $\sigma(s)$:

$$\sigma(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{b_k}{s - a_k} + 1. \quad (3)$$

Зададим *начальные* значения a_k в (3), затем предположим, что функция $\sigma(s)F(s)$ может быть аппроксимирована с использованием этого же *известного* набора полюсов a_k :

$$\sigma(s)F(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_k}{s - a_k}. \quad (4)$$

Умножим правую часть в (3) на $F(s)$ и приравняем правой части (4):

$$\left(\sum_{k=1}^{N_p} \frac{b_k}{s - a_k} + 1 \right) F(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_k}{s - a_k}, \quad (5)$$

$$F(s) \sum_{k=1}^{N_p} \frac{b_k}{s - a_k} + F(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_k}{s - a_k}, \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_k}{s - a_k} - F(s) \sum_{k=1}^{N_p} \frac{b_k}{s - a_k} = F(s). \quad (7)$$

Для некоторого заданного значения комплексной частоты $s = s_l$ запишем

$$\sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_k}{s_l - a_k} - \sum_{k=1}^{N_p} \frac{F(s_l)b_k}{s_l - a_k} = F(s_l), \quad (8)$$

$$\sum_{k=1}^{N_p} \left(\frac{c_k}{s_l - a_k} - F(s_l) \frac{b_k}{s_l - a_k} \right) = F(s_l), \quad (9)$$

или

$$\mathbf{M}_l \mathbf{x} = y_l, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{M}_l = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & -F(s_l) & \dots & -F(s_l) \\ s_l - a_1 & \dots & s_l - a_{N_p} & s_l - a_1 & \dots & s_l - a_{N_p} \end{bmatrix}}^{2N_p},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{N_p} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N_p} \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{N_p} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{N_p} \end{bmatrix}} \right\} 2N_p, \quad y_l = F(s_l). \quad (11)$$

Здесь a_k – известные полюсы, вещественные или комплексно-сопряженные пары; \mathbf{M}_l – вектор-строка; \mathbf{x} – вектор-столбец, содержащий неизвестные вычеты c_1, \dots, c_{N_p} и b_1, \dots, b_{N_p} .

Если полюсы $a_j \in \mathbb{C}$ и $a_{j+1} \in \mathbb{C}$ составляют комплексно-сопряженную пару, то есть $a_{j+1} = a_j^*$, то соответствующие вычеты c_j, c_{j+1} и b_j, b_{j+1} тоже должны быть комплексно-сопряженными парами. Пусть

$$c_j = c' + ic'', \quad c_{j+1} = c_j^* = c' - ic'', \quad c' \in \mathbb{R}, \quad c'' \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

$$b_j = b' + ib'', \quad b_{j+1} = b_j^* = b' - ib'', \quad b' \in \mathbb{R}, \quad b'' \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

тогда запишем сумму j -го и $(j+1)$ -го слагаемых (соответствующих неизвестным вычетам c_j, c_{j+1}) из произведения $\mathbf{M}_l \mathbf{x}$ в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{l,j} c_j + \mathbf{M}_{l,j+1} c_{j+1} &= \mathbf{M}_{l,j} (c' + ic'') + \mathbf{M}_{l,j+1} (c' - ic'') = \\ &= (\mathbf{M}_{l,j} + \mathbf{M}_{l,j+1}) c' + (i\mathbf{M}_{l,j} - i\mathbf{M}_{l,j+1}) c''. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично для суммы $(j+N_p)$ -го и $(j+N_p+1)$ -го слагаемых, соответствующих неизвестным вычетам b_j, b_{j+1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{l,j+N_p} b_j + \mathbf{M}_{l,j+N_p+1} b_{j+1} &= \mathbf{M}_{l,j+N_p} (b' + ib'') + \mathbf{M}_{l,j+N_p+1} (b' - ib'') = \\ &= (\mathbf{M}_{l,j+N_p} + \mathbf{M}_{l,j+N_p+1}) b' + (i\mathbf{M}_{l,j+N_p} - i\mathbf{M}_{l,j+N_p+1}) b''. \end{aligned} \quad (15)$$

Сделаем в векторе коэффициентов \mathbf{M}_l замены

$$\mathbf{M}_{l,j}^{\text{new}} = \mathbf{M}_{l,j} + \mathbf{M}_{l,j+1} = \frac{1}{s_l - a_j} + \frac{1}{s_l - a_j^*}, \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_{l,j+1}^{\text{new}} = i\mathbf{M}_{l,j} - i\mathbf{M}_{l,j+1} = \frac{i}{s_l - a_j} - \frac{i}{s_l - a_j^*}, \quad (17)$$

$$\mathbf{M}_{l,j+N_p}^{\text{new}} = \mathbf{M}_{l,j+N_p} + \mathbf{M}_{l,j+N_p+1} = -F(s_l) \left(\frac{1}{s_l - a_j} + \frac{1}{s_l - a_j^*} \right), \quad (18)$$

$$\mathbf{M}_{l,j+N_p+1}^{\text{new}} = i\mathbf{M}_{l,j+N_p} - i\mathbf{M}_{l,j+N_p+1} = -F(s_l) \left(\frac{i}{s_l - a_j} - \frac{i}{s_l - a_j^*} \right). \quad (19)$$

Это приводит к тому, что в векторе неизвестных \mathbf{x} соответствующие вычеты c_j, c_{j+1} и b_j, b_{j+1} становятся равными c', c'' и b', b'' . Теперь все неизвестные в \mathbf{x} являются действительными величинами.

Для заданного набора значений $\{s_l\}$, $l = \overline{1, N_s}$, составим переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (20)$$

Чтобы сохранить свойство комплексной сопряженности, переформулируем переопределенную систему уравнений (20) в действительных величинах

$${}_{2N_s} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{\mathbf{M}'}^{2N_p} \\ \mathbf{M}'' \end{array} \right\} \mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}'' \end{array} \right\}_{2N_s}, \quad (21)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + i\mathbf{M}'', \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}' + i\mathbf{y}'', \quad \mathbf{M}', \mathbf{M}'' \in \mathbb{R}^{N_s \times 2N_p}, \quad \mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in \mathbb{R}^{N_s \times 1}. \quad (22)$$

Решение переопределенной системы (21) дает значения неизвестных вычетов c_1, \dots, c_{N_p} и b_1, \dots, b_{N_p} . Теперь запишем

$$\sigma(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{b_k}{s - a_k} + 1 = \frac{\prod_{k=1}^{N_p} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N_p} (s - a_k)}, \quad (23)$$

$$\sigma(s)F(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{c_k}{s - a_k} = \frac{\prod_{k=1}^{N_p-1} (s - \tilde{z}_k)}{\prod_{k=1}^{N_p} (s - a_k)}, \quad (24)$$

где z_k – нули функции $\sigma(s)$, а \tilde{z}_k – нули функции $\sigma(s)F(s)$.

Умножим правую часть (23) на $F(s)$ и приравняем к правой части (24), получим

$$F(s) \frac{\prod_{k=1}^{N_p} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N_p} (s - a_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{N_p-1} (s - \tilde{z}_k)}{\prod_{k=1}^{N_p} (s - a_k)} \quad (25)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{\prod_{k=1}^{N_p-1} (s - \tilde{z}_k) / \prod_{k=1}^{N_p} (s - a_k)}{\prod_{k=1}^{N_p} (s - z_k) / \prod_{k=1}^{N_p} (s - a_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{N_p-1} (s - \tilde{z}_k)}{\prod_{k=1}^{N_p} (s - z_k)}, \quad (26)$$

таким образом, нули z_k функции $\sigma(s)$ являются *полюсами* функции $F(s)$.

Нули z_k функции $\sigma(s)$ можно найти как *собственные значения* матрицы [26]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{D} - \mathbf{q}\mathbf{b}^T, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{N_p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^T = [b_1 \ \dots \ b_{N_p}], \quad (28)$$

то есть

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_{N_p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_{N_p} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{N_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{N_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 & -b_2 & \dots & -b_{N_p} \\ -b_1 & a_2 - b_2 & \dots & -b_{N_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_1 & -b_2 & \dots & a_{N_p} - b_{N_p} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Если есть комплексно-сопряженные пары полюсов, например $a_j = a' + ia''$, $a_{j+1} = a_j^* = a' - ia''$, и соответствующих им вычетов $b_j = b' + ib''$, $b_{j+1} = b_j^* = b' - ib''$, то соответствующие подматрицы в \mathbf{D} , \mathbf{q} и \mathbf{b}^T преобразуются (с использованием преобразования подобия [23]) к виду:

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} a_j & 0 \\ 0 & a_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & a'' \\ -a'' & a' \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}^T = [b' \ b'']. \quad (30)$$

Это приводит к тому, что матрица \mathbf{D} становится действительной, а ее собственные значения (и, следовательно, нули z_k функции $\sigma(s)$) – либо действительные, либо комплексно-сопряженные пары.

Примем нули z_k функции $\sigma(s)$ за полюсы p_k функции $F(s)$ и решим исходную задачу (3) относительно *неизвестных вычетов* r_k :

$$F(s) = \sum_{k=1}^{N_p} \frac{r_k}{s - p_k}. \quad (31)$$

Для $s = s_l$

$$\sum_{k=1}^{N_p} \frac{r_k}{s_l - p_k} = F(s_l) \quad (32)$$

или

$$\mathbf{M}_l \mathbf{x} = \mathbf{y}_l, \quad (33)$$

где

$$\mathbf{M}_l = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ s_l - p_1 & \dots & s_l - p_{N_p} \end{bmatrix}}^{N_p}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \dots \\ r_{N_p} \end{bmatrix} \Bigg\}_{N_p}, \quad \mathbf{y}_l = F(s_l). \quad (34)$$

Для заданного набора значений $\{s_l\}$, $l = \overline{1, N_s}$, составим переопределенную СЛАУ:

$$\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{y}. \quad (35)$$

Решение системы (35) с сохранением свойства комплексной сопряженности аналогично (12)–(22).

2. Метод Vector Fitting для набора функций

Пусть задан набор из N_f функций в изображениях. Представим его в виде вектор-функции $\bar{\mathbf{f}}(s)$:

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(s) \\ \bar{f}_2(s) \\ \vdots \\ \bar{f}_{N_f}(s) \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Рассмотрим правильные дробно-рациональные аппроксимации компонент $\bar{\mathbf{f}}(s)$ на *общем* наборе полюсов p_1, p_2, \dots, p_{N_p} :

$$\bar{\mathbf{f}}(s) \approx \mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_{N_f}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N_p} (r_k^1 / (s - p_k)) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N_p} (r_k^{N_f} / (s - p_k)) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

где r_k^j – вычеты, соответствующие функции $F_j(s)$, $j = \overline{1, N_f}$.

Далее введем общую для всех $F_j(s)$ вспомогательную неизвестную рациональную функцию $\sigma(s)$, определяемую соотношением (3), зададим начальные значения ее полюсов a_k и рассмотрим аппроксимацию $\sigma(s)\mathbf{F}(s)$ на этих полюсах:

$$\sigma(s)\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N_p} (c_k^1 / (s - a_k)) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N_p} (c_k^{N_f} / (s - a_k)) \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Теперь, следуя (5), (6), запишем аналогичное (7) выражение

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{N_p} (c_k^1 / (s - a_k)) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N_p} (c_k^{N_f} / (s - a_k)) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1(s) \sum_{k=1}^{N_p} (b_k / (s - a_k)) \\ \vdots \\ F_{N_f}(s) \sum_{k=1}^{N_p} (b_k / (s - a_k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_{N_f}(s) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Для заданного значения комплексной частоты $s = s_l$ запишем

$$\mathbf{M}_l \mathbf{x} = \mathbf{y}_l, \quad (40)$$

где

$$\mathbf{M}_l = \left. \begin{bmatrix} \mathbf{H}_l & 0 & \cdots & 0 & \Sigma_l^1 \\ 0 & \mathbf{H}_l & \cdots & 0 & \Sigma_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{H}_l & \Sigma_l^{N_f} \end{bmatrix} \right\}_{N_f}, \quad (41)$$

$$\mathbf{H}_l = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ s_l - a_1 & \cdots & s_l - a_{N_p} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_l^j = \begin{bmatrix} -F_j(s_l) & \cdots & -F_j(s_l) \\ s_l - a_1 & \cdots & s_l - a_{N_p} \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, N_f}, \quad (42)$$

$$\mathbf{x} = \left[\overbrace{c_1^1 \cdots c_{N_p}^1}^{N_p(N_f+1)} \quad \overbrace{c_1^2 \cdots c_{N_p}^2}^{N_p(N_f+1)} \quad \cdots \quad \overbrace{c_1^{N_f} \cdots c_{N_p}^{N_f}}^{N_p(N_f+1)} \quad \overbrace{b_1 \cdots b_{N_p}}^{N_p} \right]^T, \quad \mathbf{y}_l = \left[F_1(s_l) \quad \cdots \quad F_{N_f}(s_l) \right]^T. \quad (43)$$

При наличии комплексно-сопряженных пар полюсов $a_j \in \mathbb{C}$ и $a_{j+1} \in \mathbb{C}$ преобразования в \mathbf{M}_l и \mathbf{x} , необходимые для сохранения комплексной сопряженности искомым вычетам, аналогичны (12)–(19).

Составим *переопределенную* СЛАН для заданного набора значений комплексных частот $\{s_l\}$, $l = \overline{1, N_s}$:

$$\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad (44)$$

и переформулируем ее в действительных величинах, чтобы сохранить свойство комплексной сопряженности

$${}_{2N_s N_f} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{M}'' \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}' \\ \mathbf{y}'' \end{bmatrix} \right\} {}_{2N_s N_f}, \quad (45)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + i\mathbf{M}'', \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}' + i\mathbf{y}'', \quad \mathbf{M}', \mathbf{M}'' \in \mathbb{R}^{N_s N_f \times N_p (N_f + 1)}, \quad \mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in \mathbb{R}^{N_s N_f \times 1}. \quad (46)$$

Аналогично (23)–(26) нули функции $\sigma(s)$ являются *полюсами* p_k функций $F_j(s)$, $j = 1, N_f$. Определим нули функции $\sigma(s)$ по выражениям (27)–(30), примем их за полюсы p_k и решим отдельно, используя (31)–(35), каждую задачу по отысканию неизвестных вычетов $r_1^j, r_2^j, \dots, r_{N_p}^j, j = 1, N_f$.

3. Алгоритм адаптивного построения рациональных аппроксимаций

Пусть задан набор функций (36), для компонентов которого надо построить дробно-рациональные аппроксимации (37) на частотном интервале $s = \alpha + i\omega$, $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \in [0, \omega_{\max}]$, где ω_{\max} – некоторое заданное значение. Эти аппроксимации далее используются для аналитического обращения во временную область:

$$f_j(t) \approx f_{j;\text{fit}}(t) = \sum_{k=1}^{N_p} r_k^j \exp(p_k t), \quad t \in [0, t_{\max}], \quad j = \overline{1, N_f}, \quad (47)$$

где t_{\max} – заданное максимальное значение времени, для которого надо получить оригиналы функций.

Нет общего правила, которое бы однозначно определяло, как конкретно нужно задавать значение действительной части комплексных частот $\text{Re}(s) = \alpha$. Будем далее задавать действительные части частот, опираясь на соотношение, используемое во многих схемах численного обращения преобразования Лапласа, основанных на использовании рядов Фурье (например, [27]):

$$\text{Re}(s) = \alpha = \frac{\xi \ln 10}{t_{\max}}, \quad (48)$$

где $\xi > 0$. На практике параметр ξ часто задается в интервале $2, 0 \leq \xi \leq 3, 0$.

Зададим стартовые частоты

$$s_l^0 = \alpha + i\omega_{\max} \frac{l-1}{N_s^0 - 1}, \quad l = \overline{1, N_s^0}, \quad N_s^0 \geq 3,$$

и полюсы

$$a_k^0 = \frac{k-1}{N_s^0 - 1}, \quad k = \overline{1, N_s^0 - 1}.$$

Здесь и далее значения функций вычисляются и затем масштабируются абсолютным значением функции на максимальной частоте:

$$\tilde{\mathbf{F}}(s) = [\tilde{F}_j(s)] = \left[\frac{F_j(s)}{G_j} \right], \quad G_j = |F_j(s_{N_s^0}^0)| = |F_j(\alpha + i\omega_{\max})|.$$

Зададим значение параметра tol – максимально допустимой абсолютной погрешности между двумя последовательно построенными аппроксимациями масштабированных изображений функций. Зададим максимально допустимое количество шагов алгоритма N_{\max} (максимальное количество комплексных частот) и количество дополнительных шагов для установления сходимости N_{steps} .

Построим дробно-рациональные аппроксимации на частотах s_l^0 и полюсах a_k^0 : $\tilde{\mathbf{F}}^1 \{s_l^0, a_k^0\}$, добавим новый полюс $a_k \leftarrow a_k^0 \cup \{1, 0\}$ и установим $s_l \leftarrow s_l^0$. Теперь

повторяем последовательно для $\nu = \overline{2, N_{\max}}$ следующие пункты, пока не будет достигнуто максимальное количество частот или условие сходимости:

1. Построим дробно-рациональные аппроксимации на частотах s_l и полюсах $a_k: \tilde{F}^{\nu} \{s_l, a_k\}$.

2. Определим максимальное значение $E_{\text{abs};\max}^{\nu}$ абсолютной погрешности и значение комплексной частоты s_{new} при котором оно достигается:

$$E_{\text{abs}}(s) = |\tilde{F}_j^{\nu}(s) - \tilde{F}_j^{\nu-1}(s)|, \quad j = \overline{1, N_f}, \quad \text{Im}(s) \in [0, \omega_{\max}], \quad (49)$$

$$E_{\text{abs};\max}^{\nu} = \max_{\text{Im}(s) \in [0, \omega_{\max}]} E_{\text{abs}}(s), \quad s_{\text{new}} = \arg \max_{\text{Im}(s) \in [0, \omega_{\max}]} E_{\text{abs}}(s). \quad (50)$$

3. Если $E_{\text{abs};\max}^{\nu-N_{\text{step}}+q} < \text{tol}$, $q = \overline{1, N_{\text{steps}}}$, то условие сходимости достигнуто, дробно-рациональные аппроксимации построены $F_{\text{fit}} = [\tilde{F}_j^{\nu}(s)G_j]$, алгоритм прекращает работу.

4. Если $\nu = N_{\max}$, то за заданное максимальное количество шагов условие сходимости достигнуто не было, алгоритм прекращает работу.

5. Добавим в набор частот значение точки, в которой абсолютная погрешность максимальна: $s_l \leftarrow s_l \cup \{s_{\text{new}}\}$.

6. Увеличим порядок аппроксимации – добавим новые полюсы:

$$a_k \leftarrow a_k \cup \left\{ \frac{q-1}{N_{\text{new}}-1}, q = \overline{1, N_{\max}} \right\}, \quad N_{\text{new}} = \left\lfloor \frac{2N_s^{\nu+1}N_f}{N_f+1} \right\rfloor - N_p^{\nu},$$

где $N_s^{\nu+1}$ – количество частот в наборе, определенном в п. 5, N_p^{ν} – количество полюсов на текущем шаге, $\lfloor \cdot \rfloor$ обозначает округление до ближайшего целого в меньшую сторону. Таким образом, мы задаем максимальное количество полюсов (порядок аппроксимации), при котором разрешающая СЛАНУ метода VF на этапе определения общих полюсов не становится неопределенной.

7. Установим $\nu \leftarrow \nu + 1$, перейдем к п. 1.

Описанный алгоритм позволяет адаптивно выбирать частотные точки, которые используются для построения дробно-рациональных аппроксимаций методом VF, без какой-либо предварительно известной информации о характере функций в изображениях.

4. Распространение волн в одномерном пороупругом стержне

Тестирование разработанного алгоритма проведем на задаче пороупругой динамики, имеющей аналитическое решение: о действии осевой нагрузки в виде функции Хевисайда по времени на одномерный пороупругий стержень (рис. 1).

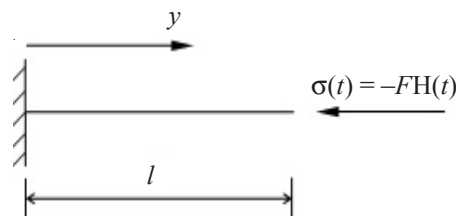


Рис. 1. Одномерный пороупругий стержень под действием осевой нагрузки

На концах стержня заданы граничные условия:

$$u(t, y = 0) = 0, \quad \sigma(t, y = l) = -FH(t), \quad p(t, y = l) = 0,$$

где $u(t, y)$ – перемещения (м), $\sigma(t, y)$ – напряжения (Па), $F = 1$ Па – осевая нагрузка, $p(t, y)$ – поровые давления (Па), l – длина стержня (м), $H(\cdot)$ – функция Хевисайда.

Для заданных граничных условий функции перемещений, давлений, напряжений и потока в изображениях Лапласа записываются следующими аналитическими формулами [12]:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{an}(s, y) &= \frac{F}{Es^2(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)} \left[\frac{d_2(\exp(-\lambda_1 s(l-y)) - \exp(-\lambda_1 s(l+y)))}{1 + \exp(-2\lambda_1 sl)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_1(\exp(-\lambda_2 s(l-y)) - \exp(-\lambda_2 s(l+y)))}{1 + \exp(-2\lambda_2 sl)} \right], \\ \bar{p}_{an}(s, y) &= \frac{Fd_1d_2}{Es(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)} \left[\frac{\exp(-\lambda_1 s(l-y)) + \exp(-\lambda_1 s(l+y))}{1 + \exp(-2\lambda_1 sl)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\exp(-\lambda_2 s(l-y)) + \exp(-\lambda_2 s(l+y))}{1 + \exp(-2\lambda_2 sl)} \right], \\ \bar{\sigma}_{an}(s, y) &= E \frac{\partial \bar{u}_{an}(s, y)}{\partial y} - \alpha \bar{p}_{an}(s, y), \\ \bar{q}_{an}(s, y) &= -\frac{\beta}{s^2 \rho_f} \left(\frac{\partial \bar{p}_{an}(s, y)}{\partial y} + s^2 \rho_f \bar{u}_{an}(s, y) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_{an}(s, y)}{\partial y} &= \frac{F}{Es^2(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)} \left[\frac{d_2\lambda_1 s(\exp(-\lambda_1 s(l-y)) + \exp(-\lambda_1 s(l+y)))}{1 + \exp(-2\lambda_1 sl)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_1\lambda_2 s(\exp(-\lambda_2 s(l-y)) + \exp(-\lambda_2 s(l+y)))}{1 + \exp(-2\lambda_2 sl)} \right], \\ \frac{\partial \bar{p}_{an}(s, y)}{\partial y} &= \frac{Fd_1d_2}{Es(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)} \left[\frac{\lambda_1 s(\exp(-\lambda_1 s(l-y)) - \exp(-\lambda_1 s(l+y)))}{1 + \exp(-2\lambda_1 sl)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_2 s(\exp(-\lambda_2 s(l-y)) - \exp(-\lambda_2 s(l+y)))}{1 + \exp(-2\lambda_2 sl)} \right], \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2}(s) = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}},$$

$$A(s) = \frac{E\beta}{\rho_f}, \quad B(s) = E \frac{\phi^2}{R} + (\rho - \beta\rho_f) \frac{\beta}{\rho_f} + (\alpha - \beta)^2, \quad C(s) = \frac{\phi^2(\rho - \beta\rho_f)}{R},$$

$$d_i(s) = \frac{E\lambda_i^2 - (\rho - \beta\rho_f)}{(\alpha - \beta)\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \quad \beta(s) = \frac{\kappa\rho_f\phi s}{\phi + 1,66s\kappa\rho_f}, \quad E = K + \frac{4}{3}G,$$

$$R = \frac{\phi^2 K_f K_s^2}{K_f(K_s - K) + \phi K_s(K_s - K_f)}, \quad \alpha = 1 - \frac{K}{K_s},$$

здесь ϕ – пористость, ρ – плотность пороупругого материала, ρ_f – плотность жидкого наполнителя, K и G – объемный модуль и модуль сдвига пороупругого материала, K_s – объемный модуль зерен твердого скелета, K_f – объемный модуль жидкого наполнителя, κ – проницаемость.

Для частного случая [12], когда трение между жидким наполнителем и твердым скелетом пренебрежимо мало, то есть проницаемость $\kappa \rightarrow \infty$, удается выразить оригиналы функций в аналитическом виде:

$$u_{an}(t, y) = \frac{F}{E(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_2)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} \{d_2[\gamma_1 H(\gamma_1) - \chi_1 H(\chi_1)] - d_1[\gamma_2 H(\gamma_2) - \chi_2 H(\chi_2)]\},$$

$$p_{an}(t, y) = \frac{Fd_1d_2}{E(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} [H(\gamma_1) - H(\gamma_2) + H(\chi_1) - H(\chi_2)],$$

$$\sigma_{an}(t, y) = E \frac{\partial u_{an}(t, y)}{\partial y} - \alpha p_{an}(t, y),$$

$$q_{an}(t, y) = -\frac{\beta F}{E(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)} \left\{ \frac{d_1d_2}{\rho_f} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} [\lambda_1(H(\gamma_1) - H(\chi_1)) - \lambda_2(H(\gamma_2) - H(\chi_2))] + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} [d_2(H(\gamma_1) - H(\chi_1)) - d_1(H(\gamma_2) - H(\chi_2))] \right\},$$

где

$$\frac{\partial u_{an}(t, y)}{\partial y} = \frac{F}{E(d_1\lambda_2 - d_2\lambda_1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{-n} \{d_2\lambda_1[H(\gamma_1) + H(\chi_1)] - d_1\lambda_2[H(\gamma_2) + H(\chi_2)]\},$$

$$\gamma_i(n, t, y) = t - \lambda_i(l(2n+1) - y), \quad \chi_i(n, t, y) = t - \lambda_i(l(2n+1) + y), \quad i = 1, 2.$$

Рассматривается пороупругий материал с параметрами [12]: $\phi = 0,48$, $\rho = 1884$ кг/м³, $\rho_f = 1000$ кг/м³, $K = 2,1 \cdot 10^8$ Па, $G = 9,8 \cdot 10^7$ Па, $K_s = 1,1 \cdot 10^{10}$ Па, $K_f = 3,3 \cdot 10^9$ Па, $\kappa = 3,55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/Н/с. Длина стержня $l = 10$ м.

На первом этапе проиллюстрируем сходимость алгоритма в зависимости от количества комплексных частот (порядка аппроксимации – количества полюсов). Дробно-рациональные аппроксимации строятся для набора функций $\{\bar{u}(s, y = 10 \text{ м}), \bar{p}(s, y = 7,5 \text{ м}), \bar{\sigma}(s, y = 5 \text{ м}), \bar{q}(s, y = 2,5 \text{ м})\}$. Максимальное значение времени, при котором нас интересуют оригиналы функций, задано как $t_{\max} = 0,3$ с. В соответствии с указанными рекомендациями действительная часть комплексных частот определяется как $\text{Re}(s) = \xi \ln 10/t_{\max}$, в данном случае $\xi = 3,0$.

Мнимые части комплексных частот ограничены максимальным значением $\omega_{\max} = 10000$ рад/с. Количество стартовых частот $N_s^0 = 3$.

Для оценки точности построенной дробно-рациональной аппроксимации $\bar{f}_{\text{fit}}(s)$ функции $\bar{f}_{\text{an}}(s)$ используется относительная погрешность

$$E_{\text{rel}}(\bar{f}) = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^M |\bar{f}_{\text{an}}(s_m) - \bar{f}_{\text{fit}}(s_m)|^2}{\sum_{m=1}^M |\bar{f}_{\text{an}}(s_m)|^2}}, \quad \text{Im}(s_m) = \frac{m-1}{M-1} \omega_{\max}, \quad M = 50000.$$

Зависимости полученных относительных погрешностей для заданного набора функций приведены на рис. 2 для $\kappa = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/\text{Н/с}$ и на рис. 3 для $\kappa \rightarrow \infty$. Для всех рассматриваемых функций характер изменения погрешности одинаков: при достижении определенного порядка аппроксимации (количества полюсов N_p) погрешность быстро убывает и затем стабилизируется.

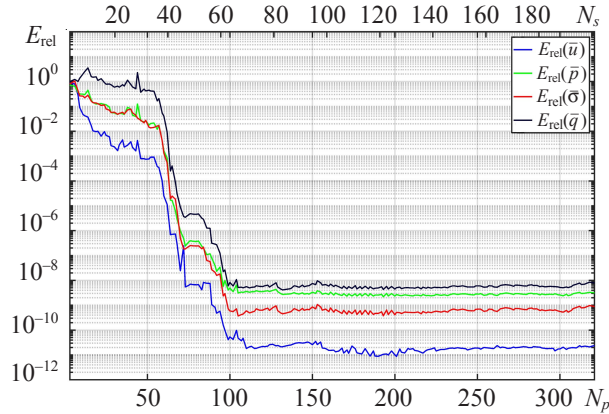


Рис. 2. Относительная погрешность E_{rel}

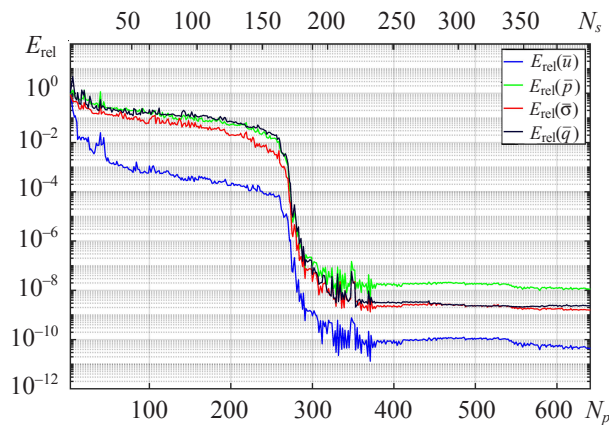


Рис. 3. Относительная погрешность E_{rel}

Далее проиллюстрируем подробнее результаты работы алгоритма при построении дробно-рациональных аппроксимаций в изображениях и при их обращении во временную область. Значение параметра максимально допустимой абсолютной погрешности для масштабированных изображений функций задано $\text{tol} = 10^{-2}$. Количество дополнительных шагов для установления сходимости $N_{\text{steps}} = 5$.

Для случая $\kappa = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/\text{Н/с}$ параметры алгоритма следующие: $\omega_{\text{max}} = 10^4 \text{ рад/с}$, $t_{\text{max}} = 0,3 \text{ с}$, набор функций $\{\bar{u}(s, y = 10 \text{ м}), \bar{p}(s, y = 0 \text{ м}), \bar{s}(s, y = 5 \text{ м})\}$. Заданные условия сходимости были достигнуты при количестве комплексных частот $N_s = 49$. На рис. 4–6 приведены итоговое расположение частотных точек и сравнение магнитуд аналитических выражений $\bar{f}_{\text{an}}(s)$ и полученных аппроксимаций $\bar{f}_{\text{fit}}(s)$ для $\kappa = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/\text{Н/с}$. Отметим, что при заданном максимальном значении абсолютной погрешности $\text{tol} = 10^{-2}$ между двумя последовательными аппроксимациями итоговое абсолютное отклонение от аналитических выражений как минимум на 2 по-

рядка меньше. Это соответствует быстрому падению погрешности на дополнительных шагах, которое наблюдается при достижении достаточного порядка аппроксимации (см. рис. 2, 3).

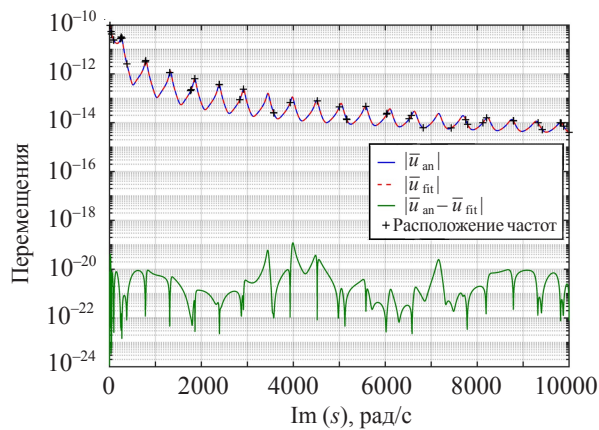


Рис. 4. Сравнение $|\bar{u}_{an}(s)|$ и $|\bar{u}_{fit}(s)|$

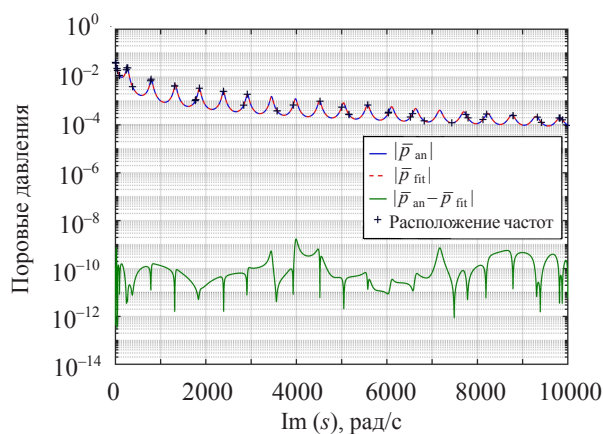


Рис. 5. Сравнение $|\bar{p}_{an}(s)|$ и $|\bar{p}_{fit}(s)|$

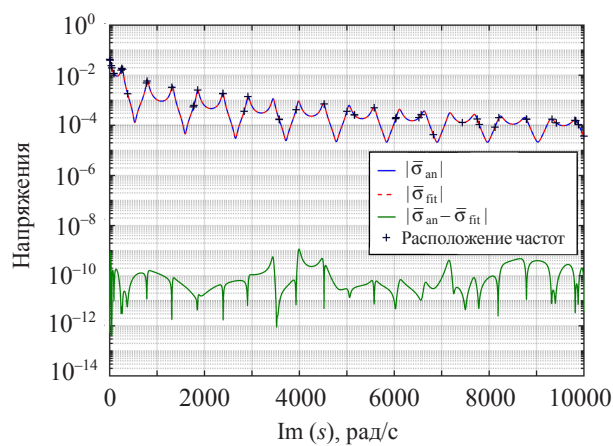


Рис. 6. Сравнение $|\bar{\sigma}_{an}(s)|$ и $|\bar{\sigma}_{fit}(s)|$

На рис. 7–9 для $\kappa = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/\text{Н}\cdot\text{с}$ приведены соответствующие решения во времени, полученные по формуле (47).

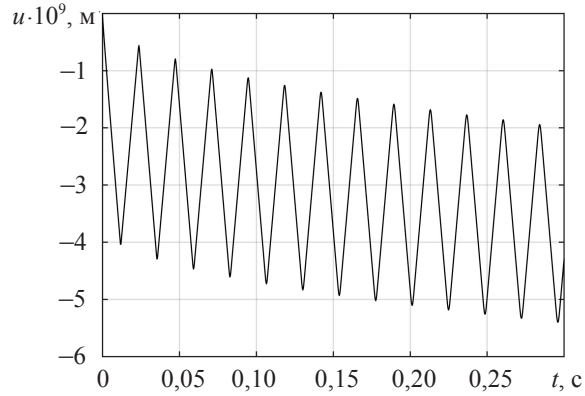


Рис. 7. Перемещения $u_{\text{fit}}(t)$

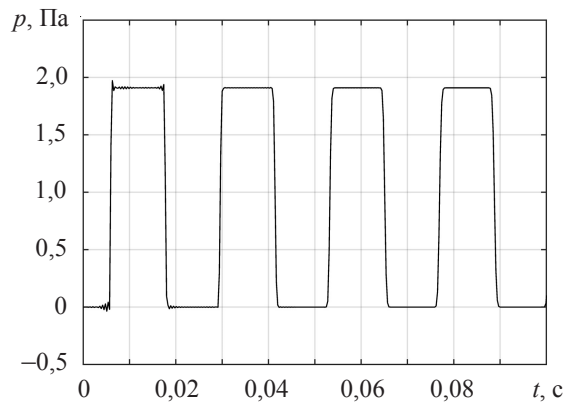


Рис. 8. Поровые давления $p_{\text{fit}}(t)$

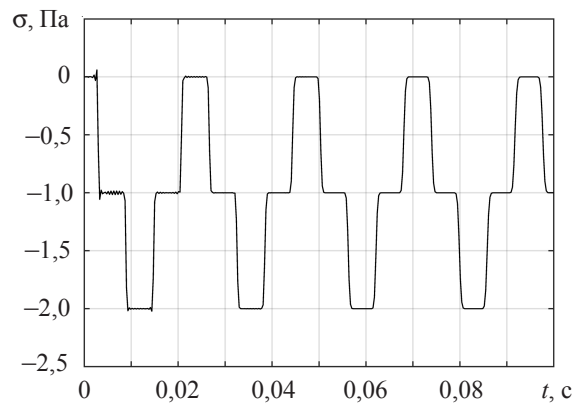


Рис. 9. Напряжения $\sigma_{\text{fit}}(t)$

По аналогии с упругим случаем, напряжения сохраняют прямоугольную форму, а перемещения – треугольную. С течением времени их амплитуда уменьшается до нуля из-за диссипации в вязком жидком поровом наполнителе. При этом среднее значение перемещений заметно изменяется уже на малом отрезке времени. Полу-

ченные решения устойчивы на всем заданном временном промежутке и в этом важную роль играет значение параметра ξ . Его изменение в сторону увеличения может ускорить сходимость алгоритма, но решения с ростом времени становятся неустойчивыми. Выбор значения параметра ξ на интервале $2,0 \leq \xi \leq 3,0$ обеспечивает хороший баланс между сходимостью алгоритма и устойчивостью решений во временной области.

Для случая $\kappa \rightarrow \infty$ параметры алгоритма следующие: $\omega_{\max} = 15000$ рад/с, $t_{\max} = 0,1$ с, набор функций $\{\bar{u}(s, y = 5 \text{ м}), \bar{p}(s, y = 5 \text{ м}), \bar{\sigma}(s, y = 5 \text{ м}), \bar{q}(s, y = 5 \text{ м})\}$. Заданные условия сходимости были достигнуты при количестве комплексных частот $N_s = 285$. Сравнение магнитуд аналитических выражений $\bar{f}_{\text{an}}(s)$ и полученных аппроксимаций $\bar{f}_{\text{fit}}(s)$ приведено на рис. 10–13. Итоговое расположение частот в значительной степени определяется характером функции потока.

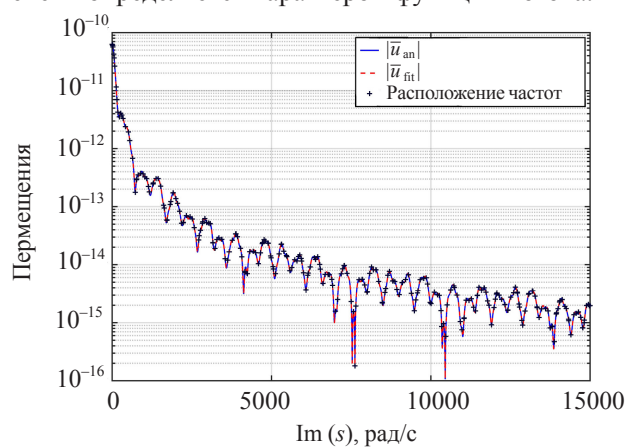


Рис. 10. Сравнение $|\bar{u}_{\text{an}}(s)|$ и $|\bar{u}_{\text{fit}}(s)|$

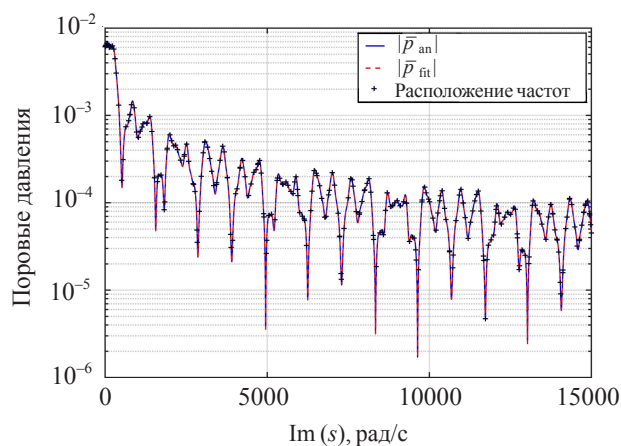


Рис. 11. Сравнение $|\bar{p}_{\text{an}}(s)|$ и $|\bar{p}_{\text{fit}}(s)|$

Особо отметим, что полученные результаты наглядно демонстрируют эффективность разработанного алгоритма при построении дробно-рациональных аппроксимаций с заданной точностью на общих наборах полюсов даже для наборов функций с сильно различающимися магнитудами. Например, в обоих рассмотренных случаях ($\kappa = 3,55 \cdot 10^{-9}$ м⁴/Н/с и $\kappa \rightarrow \infty$) в наборах есть функции, магнитуды которых отличаются на 10 порядков.

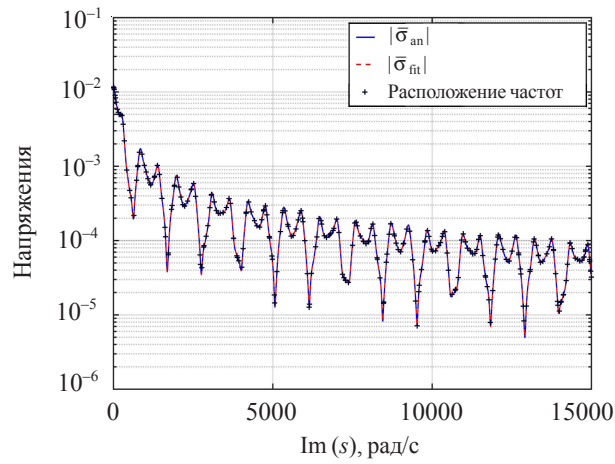


Рис. 12. Сравнение $|\bar{\sigma}_{an}(s)|$ и $|\bar{\sigma}_{fit}(s)|$

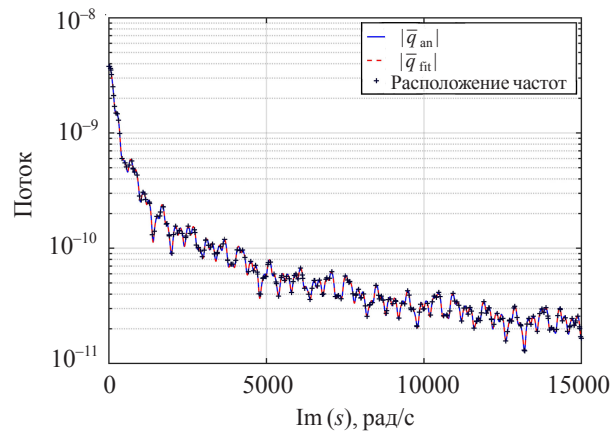


Рис. 13. Сравнение $|\bar{q}_{an}(s)|$ и $|\bar{q}_{fit}(s)|$

На рис. 14–17 представлены временные зависимости рассматриваемых функций при $\kappa \rightarrow \infty$, полученные аналитическим обращением во временную область построенных дробно-рациональных аппроксимаций по формуле (47), в сравнении с решениями по аналитическим формулам.

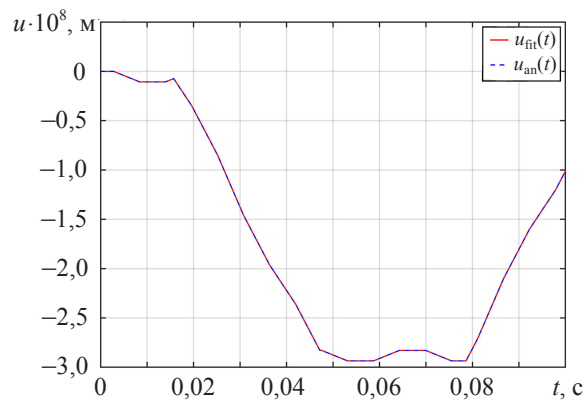


Рис. 14. Сравнение перемещений $u_{an}(t)$ и $u_{fit}(t)$

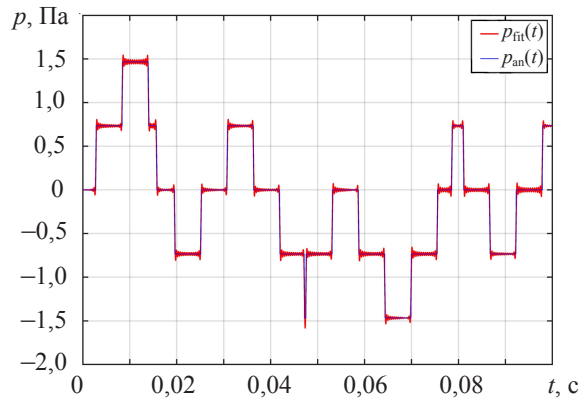


Рис. 15. Сравнение поровых давлений $p_{an}(t)$ и $p_{fit}(t)$

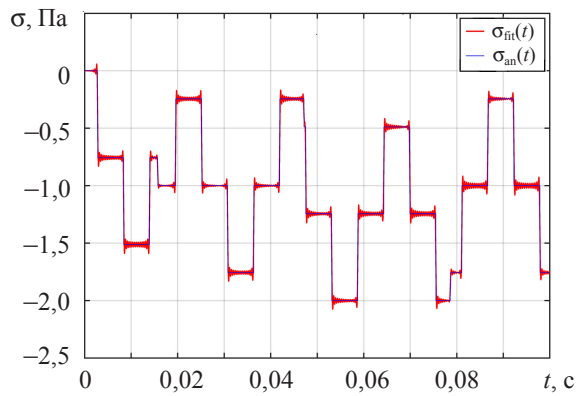


Рис. 16. Сравнение напряжений $\sigma_{an}(t)$ и $\sigma_{fit}(t)$

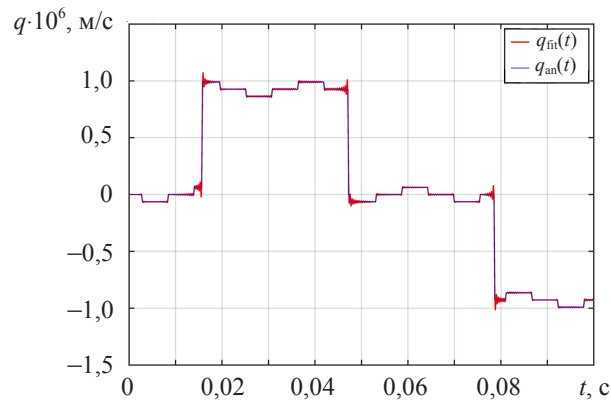


Рис. 17. Сравнение потоков $q_{an}(t)$ и $q_{fit}(t)$

Для всех функций увеличение коэффициента проницаемости приводит к значительному изменению амплитуд волн и позволяет наглядно продемонстрировать эффект медленной волны, обусловленный относительным смещением наполнителя в порах в направлении, противоположном смещению скелета. В частности, на рис. 15 видно, как после прибытия волны сжатия в момент времени $t \approx 0,0028$ с, затем прибытия отраженной волны от закрепленного конца в $t \approx 0,0084$ с и последующего прибытия отраженной от нагруженного конца быстрой волны в $t \approx 0,014$ с, в мо-

мент прибытия медленной волны в $t \approx 0,016$ с происходит падение среднего значения поровых давлений на величину, равную амплитуде медленной волны. Аналогично можно отметить влияние медленной волны на отклик каждой функции из заданного набора. При $\kappa \rightarrow \infty$ также отчетливо проявляются высокочастотные осцилляции (эффект Гиббса) около скачков поровых давлений, напряжений и потока. Этот эффект вызван отсечением высокочастотной части спектра. Несмотря на это, полученные решения устойчивы, и амплитуда осцилляций Гиббса остается умеренной и не изменяется на всем рассматриваемом временном интервале.

Заключение

На основе метода Vector Fitting представлен алгоритм адаптивного построения правильных дробно-рациональных аппроксимаций наборов функций в изображениях Лапласа. Простой вид получаемых аппроксимаций допускает их дальнейшее использование для аналитического обращения во временную область. Основными пунктами алгоритма являются определение очередной комплексной частоты и задание дополнительных полюсов для использования в методе Vector Fitting, проверка достижения заданного условия сходимости.

Алгоритм детально протестирован на задаче пороупругой динамики о распространении волн в одномерном пороупругом стержне. Установлено, что характер изменения относительной погрешности одинаков для всех функций в наборе: при достижении необходимого порядка погрешность быстро убывает, затем стабилизируется и далее с ростом порядка аппроксимации изменяется незначительно. Использование масштабирования функций в изображениях позволяет строить с высокой точностью аппроксимации для наборов функций с сильно различающимися амплитудами. Продемонстрирована высокая точность и устойчивость оригиналов рассматриваемых функций, полученных аналитическим обращением построенных дробно-рациональных аппроксимаций во временную область.

References

1. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62. Iss. 3. P. 1–15. DOI: 10.1115/1.3090831.
2. Garg S.K., Nayfeh A.H., Good A.J. Compressional waves in fluid-saturated elastic porous media. *Journal of Applied Physics*. 1974. Vol. 45. No 55. P. 1968–1974. DOI: 10.1063/1.1663532.
3. Simon B., Zienkiewicz O., Paul D. An analytical solution for the transient-response of saturated porous elastic solids. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1984. Vol. 8. No 4. P. 381–398. DOI: 10.1002/nag.1610080406.
4. De Boer R., Ehlers W., Liu Z. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media. *Archive of Applied Mechanics*. 1993. Vol. 63. Iss 1. P. 59–72. DOI: 10.1007/BF00787910.
5. Gajo A., Mongiovi L. An analytical solution for the transient-response of saturated linear elastic porous-media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1995. Vol. 19. Iss. 6. P. 399–413. DOI: 10.1002/nag.1610190603.
6. Shan Z.-D., Ling D.-S., Ding H.-J. Exact solutions to one-dimensional transient response of incompressible fluid-saturated single-layer porous media. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2013. Vol. 34. Iss. 1. P. 75–84. DOI: 10.1007/s10483-013-1654-7.
7. Shan Z., Ling D., Ding H. Exact solutions for one-dimensional transient response of fluid-saturated porous media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2011. Vol. 35. No 4. P. 461–479. DOI: 10.1002/nag.904.
8. Shan Z., Jing L., Ling D., Ding H. Exact solution for the 1D transient response of saturated

single-layer poroviscoelastic media. *Computers and Geotechnics*. 2014. Vol. 59. P. 98–104. DOI: 10.1016/j.compgeo.2014.03.009.

9. Zhang Y., Pedroso D.M., Ehlers W. One-dimensional dynamics of saturated incompressible porous media: analytical solutions and influence of inertia terms. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2016. Vol. 40. No 18. P. 2489–2513. DOI: 10.1002/nag.2541.

10. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. No 2. P. 168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.

11. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. No 2. P. 179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.

12. Schanz M., Cheng A. H.-D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column. *Acta Mechanica*. 2000. Vol. 145. Iss. 1–4. P. 1–18. DOI: 10.1007/BF01453641.

13. Schapery R.A. Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis. *Proceedings of the fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics*. June 18–21, 1962. Berkeley, California. University of California. 1962. P. 1075–1084.

14. Weeks W.T. Numerical inversion of Laplace transforms using Laguerre functions. *Journal of the ACM*. 1966. Vol. 13. No 3. P. 419–429. DOI: 10.1145/321341.321351.

15. Dubner H., Abate J. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier Cosine transform. *Journal of the ACM*. 1968. Vol. 15. No 1. P. 115–123. DOI: 10.1145/321439.321446.

16. Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]. *Communications of the ACM*. 1970. Vol. 13. Iss. 1. P. 47–49. DOI: 10.1145/361953.361969.

17. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal*. 1974. Vol. 17, 4. P. 371–376. DOI: 10.1093/comjnl/17.4.371.

18. Talbot A. The accurate numerical inversion of Laplace transforms. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1979. Vol. 23. Iss. 1. P. 97–120. DOI: 10.1093/imamat/23.1.97.

19. Zhao X. An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate. *International Journal of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. Iss. 13. P. 3653–3674. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.01.006.

20. Xiao J., Ye W., Wen L. Efficiency improvement of the frequency-domain BEM for rapid transient elastodynamic analysis. *Computational Mechanics*. 2013. Vol. 52. Iss. 4. P. 903–912. DOI: 10.1007/s00466-013-0852-9.

21. Schanz M. On a reformulated convolution quadrature based boundary element method. *Journal Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 2010. Vol. 58. No 2. P. 109–128.

22. Schanz M., Ye W., Xiao J. Comparison of the convolution quadrature method and enhanced inverse FFT with application in elastodynamic boundary element method. *Journal Computational mechanics*. 2016. Vol. 57. No 4. P. 523–536. DOI: 10.1007/s00466-015-1237-z.

23. Gustavsen B., Semlyen A. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*. 1999. Vol. 14. Iss. 3. P. 1052–1059. DOI: 10.1109/61.772353.

24. Gustavsen B. Improving the pole relocating properties of vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*. 2006. Vol. 21. Iss. 3. P. 1587–1592. DOI: 10.1109/TPWRD.2005.860281.

25. Deschrijver D., Mrozowski M., Dhaene T., De Zutter D. Macromodeling of multiport systems using a fast implementation of the vector fitting method. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*. 2008. Vol. 18. Iss. 6. P. 383–385. DOI: 10.1109/LMWC.2008.922585.

26. Gustavsen B., Semlyen A. Simulation of transmission line transients using vector fitting and modal decomposition. *IEEE Transactions on Power Delivery*. 1998. Vol. 13. Iss. 2. P. 605–611. DOI: 10.1109/61.660941.

27. Crump K.S. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation. *Journal of the ACM*. 1976. Vol. 23. No 1. P. 89–96. DOI: 10.1145/321921.321931.

**ALGORITHM FOR OBTAINING RATIONAL FUNCTION APPROXIMATION
IN LAPLACE DOMAIN WITH APPLICATION
TO DYNAMIC POROELASTIC PROBLEMS**

Markov I.P., Petrov A.N., Boev A.V.

*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

In this paper, the Vector Fitting method is used for fitting functions in Laplace domain by pole relocating. The used version of the method is described for one function and for vector functions. An algorithm based on the Vector Fitting method for obtaining strictly proper rational approximations of vector functions is presented. Algorithm produces approximations with increasing orders until the specified convergence condition is satisfied. Specific recommendations for selecting algorithm parameters are given. The proposed algorithm allows to adaptively select frequency samples that are used for obtaining rational approximations, without any previously known information about the nature of functions in Laplace domain. Time-domain solutions are obtained by analytical inversion of the rational approximations. The developed algorithm is tested in detail on the problem of wave propagation in one-dimensional poroelastic column with finite length. The model of linear isotropic fully saturated poroelasticity proposed by Biot is employed. For the general case, analytical solutions of the problem are presented in Laplace domain for displacements, stresses, pore pressures and flux. For the limiting value of the permeability of a poroelastic material, the corresponding analytical solutions are also given in time domain. Rational approximations of solutions in Laplace domain obtained with the proposed algorithm are presented in details for two values of the permeability. The convergence of the algorithm is investigated depending on the number of complex frequencies. It was found that with an increase in the order of approximation, the relative error changes similarly for all considered functions. It is shown that when parameters of the algorithm are chosen within the recommended ranges, the solutions in time domain are stable and the amplitude of the oscillations caused by truncation of the high frequency parts of the solutions remains moderate over the entire specified time interval. For the limiting value of the permeability, high accuracy of the obtained approximate results in comparison with analytical solutions in time domain is clearly demonstrated.

Keywords: Laplace transform inversion, Vector Fitting, rational approximation, poroelasticity, dynamics.