

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-507-523

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ОТКЛИКА
В ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННОМ ПОРОУПРУГОМ
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ОТ ДЕЙСТВИЯ НАГРУЗКИ
ВНУТРИ КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ***

© 2020 г.

Петров А.Н., Григорьев М.В.

*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

andrey.petrov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 13.10.2020

Проводится компьютерное моделирование методом граничных элементов задачи о действии нагрузки внутри кубической полости, расположенной в частично насыщенном пороупругом полупространстве. Пороупругая среда представляется моделью гетерогенного материала, состоящего из фазы упругой матрицы и двух фаз наполнителей – жидкости и газа, заполняющих систему пор. Модель материала соответствует трехкомпонентной среде. Рассматриваются определяющие соотношения пористой среды, записанные в переменных перемещений скелета и поровых давлений наполнителей. Исходная начально-краевая задача сводится к краевой задаче с помощью формального применения преобразования Лапласа. Методика исследований основывается на граничных интегральных уравнениях прямого подхода трехмерной изотропной линейной теории пороупругости. Граничные интегральные уравнения, соответствующие краевой задаче, решаются методом граничных элементов в сочетании с методом коллокации, с локальной поэлементной аппроксимацией на основе согласованной модели интерполирования Гольдштейна. Применяются алгоритмы устранения особенностей, понижения порядка и подразделения элементов при вычислении интегральных коэффициентов дискретного аналога граничного интегрального уравнения. Регулярные интегралы вычисляются при помощи квадратурной формулы Гаусса. Решение во времени получается численным обращением преобразования Лапласа. Метод численного обращения опирается на квадратурные формулы для вычисления интеграла свертки. Строятся зависимости от времени неизвестных функций перемещения и поровых давлений в точках на поверхностях полупространства и полости. Приводятся соответствующие графики.

Исследуется влияние величин заглубления полости и коэффициента насыщенности на динамические отклики перемещений и поровых давлений. Проводится сравнение с решением по модели полностью насыщенного пороупругого материала. Отмечается, что использование этой модели в данной за-

* Выполнено при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (проект №0729-2020-0054).

даче приводит к заниженным оценкам перемещений и завышенным оценкам порового давления.

Ключевые слова: частично насыщенный пороупругий материал, полупространство, полость, динамический отклик, метод граничных интегральных уравнений, преобразование Лапласа.

Введение

Процессы, обусловленные динамическим воздействием различных источников возмущения на твердые тела, содержащие полости и включения, представляют собой класс актуальных задач современной механики, имеющих широкий спектр приложений и являющихся важными в инженерной практике. Так, в геомеханике и горном деле при расчете напряженно-деформированного состояния горных пород вблизи выработок форма выработанного пространства может быть аппроксимирована сферической поверхностью. При решении таких задач, как правило, применяется теория деформирования горного массива или грунта как однородной среды, динамика которой описывается хорошо разработанной линейной теорией распространения упругих и вязкоупругих волн. Однако в ряде случаев необходимо использовать модель пороупругой среды, которая позволяет описать фильтрацию наполнителя в порах совместно с полноценной механической моделью напряженно-деформированного состояния среды. Даже при существенных упрощениях применение модели такого насыщенного жидкостью пористого материала значительно усложняет вычислительную схему краевой задачи по сравнению с упругой или вязкоупругой постановками и требует разработки адекватного математического, методического и соответствующего программного обеспечения. Использование метода граничных элементов (МГЭ) для решения рассматриваемого класса задач является оправданным в силу его ключевых преимуществ: численно-аналитического характера, относительной произвольности форм граничных поверхностей, автоматического выполнения условий поведения на бесконечности в полубесконечных телах.

В научной литературе в большом количестве представлены исследования, посвященные моделированию динамики пороупругих тел и сред, содержащих полости и включения, проведенные с применением аналитических [1–5], полуаналитических [6–8] и численных подходов [9–13]. Однако приведенные в них результаты касаются решений либо двумерных задач [14], либо задач рассеяния [15], либо получены с использованием модели полностью насыщенного пороупругого материала. Необходимые для реализации гранично-элементной методики фундаментальные решения трехмерной динамической теории частично насыщенной пороупругой среды, но без результатов решения задач, представлены в [16]. На основе нескольких отличных уравнений динамики пороупругой среды в статье [17] найдены фундаментальные решения и решены задачи о распространении волн от действия нагрузки на поверхности полупространства. Результаты гранично-элементного моделирования волновых процессов в частично насыщенных пороупругих телах содержатся в публикациях [18, 19].

В настоящей статье методом граничных элементов решается задача о действии динамической нагрузки внутри кубической полости, расположенной в частично насыщенном пороупругом полупространстве. Исследуется влияние величин коэффициента насыщенности и глубины расположения полости на динамические отклики.

1. Определяющие соотношения

Математическая модель записывается в соответствии с подходом, изложенным в [17]. Пороупругая среда представляется моделью гетерогенного материала: фаза упругой матрицы и две фазы наполнителей – жидкость и газ, заполняющие систему пор. Предполагается, что все три фазы являются сжимаемыми. Изменения температуры не учитываются. Такой пороупругий материал относится к частично насыщенному, а его модель называется трехфазной.

Распределение фаз в пространстве описывается макроскопическими величинами – пористостью ϕ и коэффициентами насыщенности материала S_f :

$$\phi = \frac{V_v}{V}, \quad S_f = \frac{V_f}{V_v} \quad (f = w; a),$$

где V_v – объем взаимосвязанных пор в образце, V – общий объем материала, V_f – объем наполнителя, индекс w относится к жидкости, a – к газу. Рассматривается случай, когда все поры заполнены, то есть:

$$S_a + S_w = 1.$$

Плотность элементарного объема двухфазного материала ρ выражается через плотности материалов фаз ρ_s, ρ_w, ρ_a и их объемное содержание, определяемое пористостью и коэффициентом насыщенности:

$$\rho = \rho_s(1 - \phi) + \phi S_w \rho_w + \phi S_a \rho_a$$

(ρ_s – плотность материала, образующего упругую матрицу).

Определяющие соотношения, сформулированные на основе принципа эффективных напряжений, имеют вид [20]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\text{eff}} - \delta_{ij} \alpha (S_w p^w + S_a p^a),$$

где σ_{ij} – полное напряжение, σ_{ij}^{eff} – эффективное напряжение, p^w и p^a – поровые давления наполнителей, δ_{ij} – символ Кронекера. Коэффициент эффективных напряжений α определяется так:

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s},$$

где K и K_s – объемные модули твердого скелета и его зерен соответственно.

Предполагается, что поведение твердой фазы задается законом упругости Гука и определяется двумя упругими константами: объемным модулем K и модулем сдвига G , то есть соотношение, связывающее σ_{ij}^{eff} с деформациями в скелете ε_{ij} , имеет вид

$$\sigma_{ij}^{\text{eff}} = 2G\varepsilon_{ij} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_{kk},$$

а компоненты тензора деформаций твердого тела ε_{ij} и смещения u_i связаны геометрическими соотношениями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Как правило, при использовании формулировки в суммарных напряжениях движение текучей среды в поровом пространстве моделируется законом Дарси в динамической форме:

$$\phi S_f \dot{v}_i^f = -\frac{K_{rf} k}{\eta_f} (p_{,i}^f + \rho_f \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{v}_i^f) \quad (f = w; a). \quad (1)$$

Здесь v_i^f – смещение наполнителя относительно твердого скелета, k – абсолютная проницаемость пористого материала, K_{rf} – его относительная фазовая проницаемость, η_f – вязкость наполнителя. Далее используются экспериментально установленные в [21] зависимости для K_{rf} в случае газо-водяной смеси в порах:

$$K_{rw} = S_e^{(2+3\theta)/\theta}, \quad K_{ra} = (1 - S_e)^2 [1 - S_e^{(2+\theta)/\theta}], \quad S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{S_{ra} - S_{rw}},$$

где S_e – эффективная насыщенность; S_{rw} , S_{ra} – остаточные насыщенности воды и газа соответственно; $\theta \in [0, 2; 3]$ – коэффициент, характеризующий распределение пор по размеру.

В результате искривления поверхности жидкости, вызванного действием сил поверхностного натяжения на границе раздела сред, возникает разность давлений в газе и жидкости, которая называется капиллярным давлением p^c . Капиллярное давление может быть представлено как функция коэффициента насыщенности $p^c = p^a - p^w = p^d S_e^{-1/\theta}$, где p^d – давление вытеснения, капиллярное давление при котором газ полностью вытесняет жидкость из пор.

$$p^c = p^a - p^w = p^d S_e^{-1/\theta}.$$

2. Постановка краевой задачи в изображениях по Лапласу

Уравнения движения строятся объединением определяющих соотношений с соответствующими уравнениями баланса количества движения и уравнениями баланса массы каждой из фаз с учетом кинематических условий. Вид уравнений зависит от выбора степеней свободы. В статье [22] показано, что неизвестных функций перемещения твердой фазы u_i и поровых давлений p^w и p^a достаточно для полного описания задачи пороупругой динамики. Чтобы получить такую формулировку, необходимо исключить относительное смещение v_i^f , преобразовав соотношение (1). Поскольку в (1) входят первая и вторая производные по времени от v_i^f , это преобразование проводится для изображений по Лапласу с комплексной переменной s , что в отсутствие объемных сил и источников течения позволяет записать итоговые уравнения движения в виде:

$$\begin{bmatrix} B_1 \delta_{ij} + B_2 \partial_i \partial_j & B_3 \partial_i & B_4 \partial_i \\ B_5 \partial_j & B_6 & B_7 \\ B_8 \partial_j & B_9 & B_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i(\mathbf{x}, s) \\ \hat{p}^w(\mathbf{x}, s) \\ \hat{p}^a(\mathbf{x}, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \Omega \subset \mathbf{R}^3, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= G \nabla^2 - (\rho - \beta S_w \rho_w - \gamma S_a \rho_a) s^2, & B_2 &= K + \frac{2}{3} G, & B_3 &= -(\alpha - \beta) S_w, \\ B_4 &= -(\alpha - \beta) S_a, & B_5 &= -(\alpha - \beta) S_w s, & B_6 &= -\left(\zeta S_{ww} S_w + \frac{\phi}{K_w} S_w - S_u \phi \right) s + \frac{\beta S_w}{\rho_w s} \nabla^2, \\ B_7 &= -(\zeta S_{aa} S_w + S_u \phi) s, & B_8 &= -(\alpha - \gamma) S_a s, & B_9 &= -(\zeta S_{ww} S_a + S_u \phi) s, \\ B_{10} &= -\left(\zeta S_{aa} S_a + \frac{\phi}{K_a} S_a - S_u \phi \right) s + \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} \nabla^2. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\zeta = \frac{\alpha - \varphi}{K_s}, \quad S_{ww} = S_w - \theta(S_w - S_{rw}), \quad S_{aa} = S_a - \theta(S_w - S_{rw}),$$

$$S_u = -\frac{\theta(S_{ra} - S_{rw})}{p^d} S_e^{(\theta+1)/\theta}, \quad \beta = \frac{\kappa_w \varphi \rho_w s}{\varphi S_w + \kappa_w \rho_w s}, \quad \gamma = \frac{\kappa_a \varphi \rho_a s}{\varphi S_a + \kappa_a \rho_a s},$$

$$\kappa_f = K_{rf} \frac{k}{\eta_f} \quad (f = w; a).$$

Уравнения (2), дополненные граничными условиями вида

$$\mathbf{v}(x, s) = \tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} = (\hat{u}_i, \hat{p}^w, \hat{p}^a), \quad \mathbf{x} \in S^u, \quad (3)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, s) = \tilde{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{t} = (\hat{t}_i, -\hat{q}^w, -\hat{q}^a), \quad \hat{t}_i = \hat{\sigma}_{ij}^{\text{eff}} n_j, \quad \hat{q}_i - s \hat{v}_i n_i \quad (\mathbf{x} \in S^\sigma), \quad (4)$$

где \mathbf{n} – вектор единичной нормали к границе области Ω ; S^u – граница Дирихле и S^σ – граница Неймана, полностью описывают краевую задачу в изображениях трехмерной изотропной динамической теории пороупругости.

3. Гранично-элементная дискретизация

Краевая задача (2)–(4) решается методом граничных интегральных уравнений (ГИУ) прямого подхода. Соответствующие ГИУ для динамической пороупругости в области Лапласа получаются на основе теоремы взаимности или метода взвешенных невязок. Получение ГИУ на основе метода взвешенных невязок изложено в [18], там же представлен способ получения фундаментальных и сингулярных решений.

ГИУ решаются методом граничных элементов. Для введения гранично-элементной дискретизации используется регуляризованное уравнение [23]:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \mathbf{v}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{T}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \mathbf{t}(\mathbf{y}, s)) d\Gamma = 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (5)$$

где \mathbf{x}, \mathbf{y} – точки наблюдения и интегрирования соответственно, \mathbf{U} и \mathbf{T} – фундаментальные и сингулярные решения, \mathbf{T}^0 – решение, содержащее особенности.

В процессе дискретизации поверхность тела покрывается сеткой из M обобщенных четырехугольных восьмиузловых элементов с общим количеством геометрических узлов P . Каждый элемент E_k отображается на контрольный элемент в локальных координатах $(\xi_1, \xi_2) \in (-1; 1)^2$ согласно соотношению

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^8 N_m(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_m^k, \quad k = 1, \dots, M,$$

где $N_m(\xi_1, \xi_2)$ – биквадратичные функции формы.

Обобщенные граничные перемещения аппроксимируются билинейными элементами с соответствующими функциями формы $R_m(\xi_1, \xi_2)$, а поверхностные обобщенные силы – постоянными величинами:

$$\mathbf{v}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^4 R_m(\xi_1, \xi_2) \mathbf{v}_m^k,$$

$$\mathbf{t}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{t}^k.$$

Дискретный аналог ГИУ (5) строится с использованием метода коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге ГИУ порождает систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^4 \Delta \mathbf{T}_{mi}^k \mathbf{v}_m^k = \sum_{k=1}^K \Delta \mathbf{U}_i^k \mathbf{t}^k, \quad i = 1, \dots, P,$$

$$\Delta \mathbf{T}_{mi}^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R_m(\xi_1, \xi_2) \mathbf{T}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k(\xi_1, \xi_2), s) - \mathbf{I} \cdot \mathbf{T}^0(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k(\xi_1, \xi_2))] J_k(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\Delta \mathbf{U}_i^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{U}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k(\xi_1, \xi_2), s) J_k(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

где J – якобиан преобразований локальных координат в глобальные, \mathbf{I} – единичная матрица.

Построение дискретного аналога сводится к проблеме численного интегрирования, а значит, к выбору квадратурной формулы, и при необходимости к дополнительному разбиению элемента на подэлементы, а также к способу раскрытия особенностей [24]. При вычислении нерегулярных интегралов граничный элемент разбивается на два вырожденных четырехугольника, когда точка коллокации совпадает с узлом интерполяции обобщенных граничных перемещений, и на четыре, когда точка коллокации расположена в центре элемента. При этом в интегралах с особенностью типа $1/r$ особенность исчезает, а сингулярный интеграл с особенностью $1/r^2$ допускает прямое вычисление с помощью квадратурных формул. Интегральные коэффициенты дискретных аналогов ГИУ вычисляются при помощи квадратурной формулы Гаусса. Решение системы линейных алгебраических уравнений дает решение исходной краевой задачи в изображениях по Лапласу.

4. Метод численного обращения преобразования Лапласа

Решение во времени начально-краевой задачи получается с помощью Convolution Quadrature Method (CQM), предложенного в статьях [25, 26] для вычисления интеграла свертки. Если известен вид сворачиваемых функций в пространстве изображений по Лапласу, то метод может быть использован для численного нахождения обратного преобразования.

В соответствии с методом интеграл свертки

$$y(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

заменяется квадратурной формулой вида

$$y(0) = 0, \quad y(n\Delta t) = \sum_{k=0}^n \omega_{k-n}(\Delta t) g(k\Delta t), \quad n = 1, \dots, N, \quad (6)$$

где весовые коэффициенты $\omega_n(\Delta t)$ вычисляются помощью изображения по Лапласу \hat{f} по формулам:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f} \left(\frac{\lambda R \exp(il \cdot 2\pi/L)}{\Delta t} \right) \exp(inl \cdot 2\pi/L). \quad (7)$$

При выводе формул (6) и (7) используются аппроксимация интеграла методом

трапеций с шагом $2\pi/L$ и аппроксимация линейным многошаговым методом решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, возникающей в процессе преобразования интеграла свертки, на интервале $(0; N\Delta t)$. В частности, применяется метод Эйлера второго порядка точности с характеристической функцией $\gamma(z) = 3/2 - 2z + 1/2z^2$, $z \in \mathbb{C}$ (\mathbb{C} – множество комплексных чисел).

5. Результаты моделирования и анализ

С применением описанной методики и реализованного на ее основе программного обеспечения решена задача о действии нагрузки $f_0 \cdot H(t)$ ($f_0 = 10^6 \text{ Н/м}^2$) внутри кубической полости с ребром $l = 2 \text{ м}$, расположенной в частично насыщенном поропругом полупространстве (рис. 1).

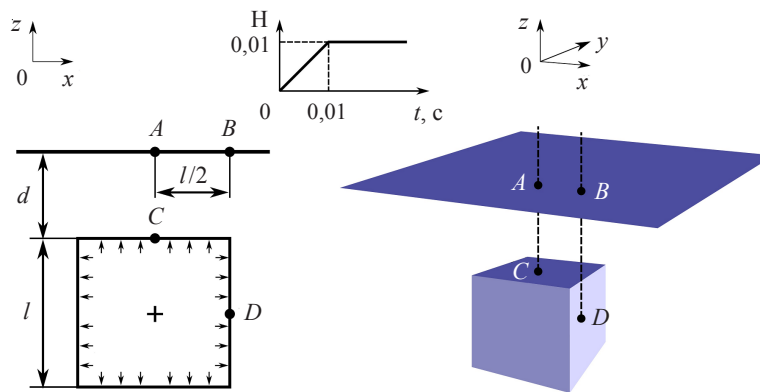


Рис. 1. Схема задачи

Нагрузка, приложенная к поверхности полости, линейно нарастает до момента времени 0,01 с и далее принимает постоянное значение, равное 10^4 Н/м^2 . На поверхности полости заданы нулевые граничные условия для потоков наполнителей. Поверхность полупространства проницаема и свободна от нагрузки. Параметры материала поропругого полупространства приведены в таблице 1. Рассмотрена история изменения во времени неизвестных функций при следующих параметрах метода SQM: $R = 0,997$, $N = 500$, $\Delta t = 0,00008 \text{ с}$. Построены динамические отклики перемещений и поровых давлений в точках на поверхности полупространства непосредственно над полостью и в центральных точках граней полости.

Таблица 1

Параметр	Значение
l	2
Пористость ϕ	0,23
Плотность зерен скелета ρ_s , кг/м ³	2650
Плотность жидкости ρ_w , кг/м ³	997
Плотность газа ρ_a , кг/м ³	1,1
Объемный модуль пористого материала K , Н/м ²	$1,02 \cdot 10^9$
Модуль сдвига пористого материала G , Н/м ²	$1,44 \cdot 10^9$
Объемный модуль зерен твердого скелета K_s , Н/м ²	$3,5 \cdot 10^{10}$
Объемный модуль жидкости K_w , Н/м ²	$2,25 \cdot 10^9$
Объемный модуль газа K_a , Н/м ²	$1,1 \cdot 10^5$

Таблица 1 (продолжение)

1	2
Проницаемость k , м ²	$2,5 \cdot 10^{-12}$
Вязкость жидкости η_w , Н·с/м ²	$1,0 \cdot 10^{-3}$
Вязкость газа η_a , Н·с/м ²	$1,8 \cdot 10^{-5}$
Давление газа, необходимое для вытеснения жидкости из пор p^d , Н/м ²	$5 \cdot 10^4$
Остаточная насыщенность жидкости S_{rw}	0
Остаточная насыщенность газа S_{ra}	1
Коэффициент распределения размера пор θ	1,5

5.1. Влияние величины заглубления полости на динамический отклик. Влияние величины заглубления полости на динамический отклик проанализировано при значениях параметра $d = 1; 2; 3; 4$ м. Коэффициент насыщенности материала S_w принят равным 0,9. Результаты соответствующих численных расчетов представлены на рис. 2–7. На рис. 2–5 показаны динамические отклики перемещения в точках А, В, С, D.

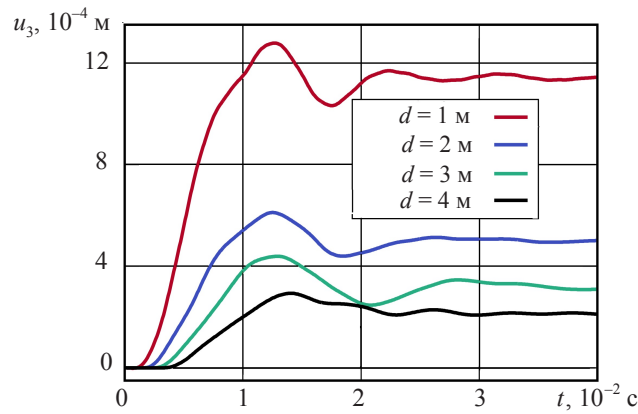


Рис. 2. Динамический отклик перемещения u_3 в точке А

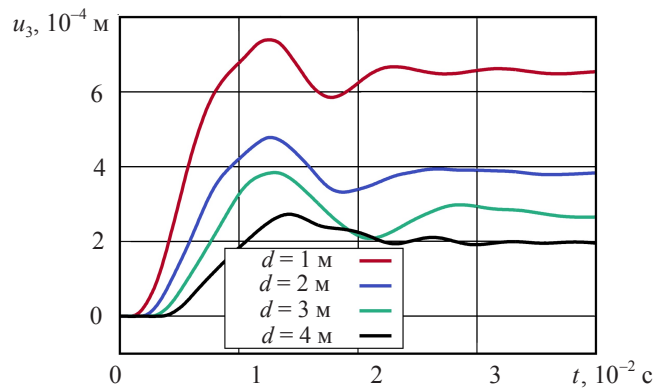


Рис. 3. Динамический отклик перемещения u_3 в точке В

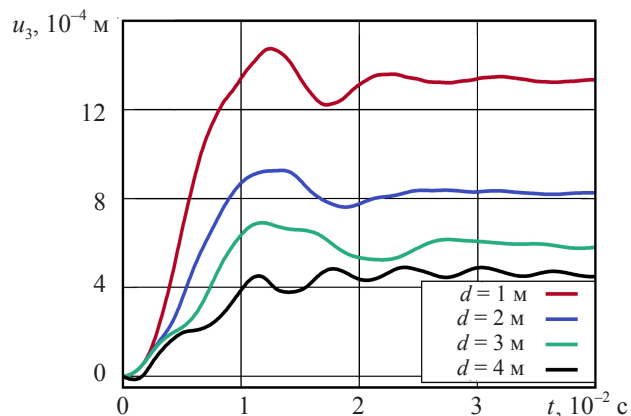


Рис. 4. Динамический отклик перемещения u_3 в точке С

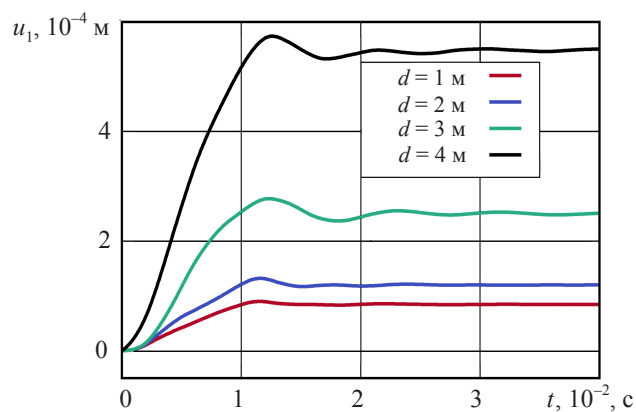


Рис. 5. Динамический отклик перемещения u_1 в точке D

На рис. 2–5 видно, что перемещения в точках А, В, С, D возрастают с увеличением нагрузки и после незначительного снижения принимают постоянные значения. При этом в точках А, В и С при малой глубине перемещения нарастают быстрее и принимают большее значение, чем при большей глубине. Кроме того, вертикальные перемещения в точке С превышают по величине перемещения в точках А и В при всех значениях d . В точке D наблюдается обратная тенденция (см. рис. 5): при меньшей глубине горизонтальные перемещения быстрее достигают большего значения, чем при меньших глубинах, и при $d = 4$ м становятся близкими по величине к вертикальным перемещениям в точке С при той же глубине.

На рис. 6, 7 представлены динамические отклики порового давления жидкости в точках С и D при значениях $d = 1$ м и $d = 4$ м. В обоих случаях поровое давление демонстрирует схожее поведение во времени с различиями по величине. Так, при $d = 1$ м (см. рис. 6) в точках С и D оно с почти одинаковой скоростью растет до отметки $1,2 \cdot 10^5$ Н/м², после чего в точке D снижается, а в точке С продолжает расти до отметки $2,4 \cdot 10^5$ Н/м². Достигнув максимального значения, давление в обеих точках снижается до нуля практически в один и тот же момент времени, после чего принимает отрицательные значения и снова возвращается к нулевому значению, сохраняя его в оставшееся время.

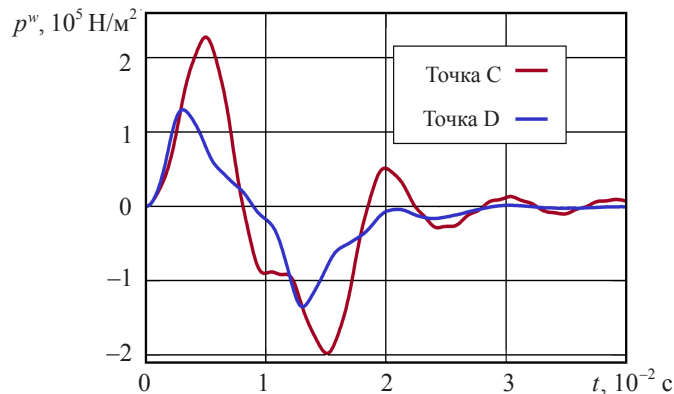


Рис. 6. Динамический отклик порового давления p^w с точек С и D при $S_w = 0,9$ и $d = 1$ м

При $d = 4$ м (см. рис. 7) давление в точках С и D, как и в первом случае, возрастает до наибольшего значения с почти равной скоростью, а затем снижается до нуля. Однако здесь смена знака давления в точке D происходит почти в два раза быстрее, чем в точке С. При этом давление в точке D принимает меньшее отрицательное значение, чем в точке С, и на рассматриваемом временном интервале не успевает выйти на постоянное нулевое значение. Кроме того, амплитуда давления при $d = 4$ м превышает амплитуду давления при $d = 1$ м в обеих точках.

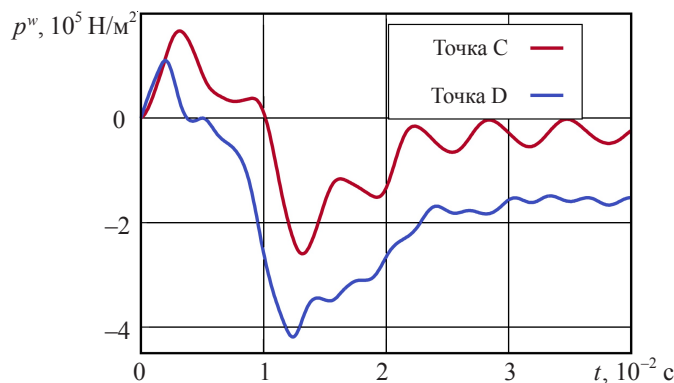


Рис. 7. Динамический отклик порового давления p^w в точках С и D при $S_w = 0,9$ и $d = 4$ м

5.2. Влияние величины насыщенности на динамический отклик. Влияние коэффициента насыщенности на динамический отклик проанализировано при четырех значениях параметра $S_w = 0,5; 0,9; 0,95$ и $S_w = 1$, что соответствует полному насыщению материала. Глубина расположения полости принята равной 2 м. Результаты соответствующих численных расчетов представлены на рис. 8–13.

На рис. 8–11 видно, что при всех рассмотренных значениях S_w характер изменения перемещений в точках А, В, С, D соответствует описанному ранее. Однако при значениях $S_w = 0,5; 0,9; 0,95$ кривые перемещений расположены близко друг к другу и практически неразличимы. В предельном случае перемещения возрастают медленнее и принимают меньшее значение, чем в случае частичной насыщенности материала.

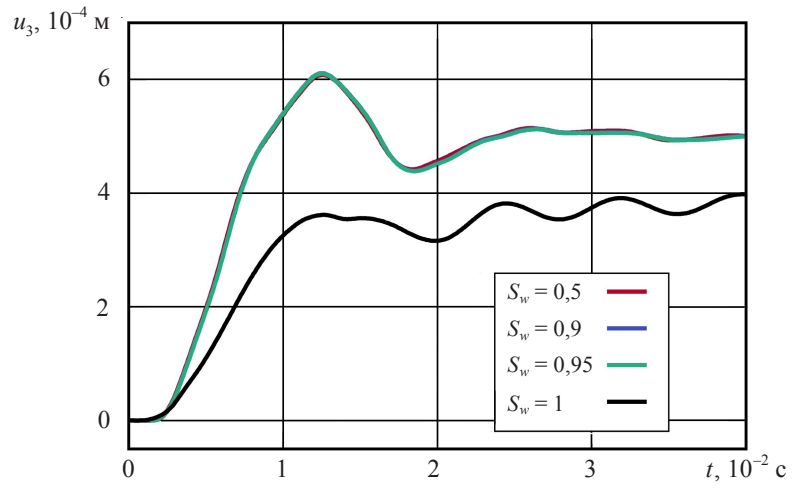


Рис. 8. Динамический отклик перемещения u_3 в точке А

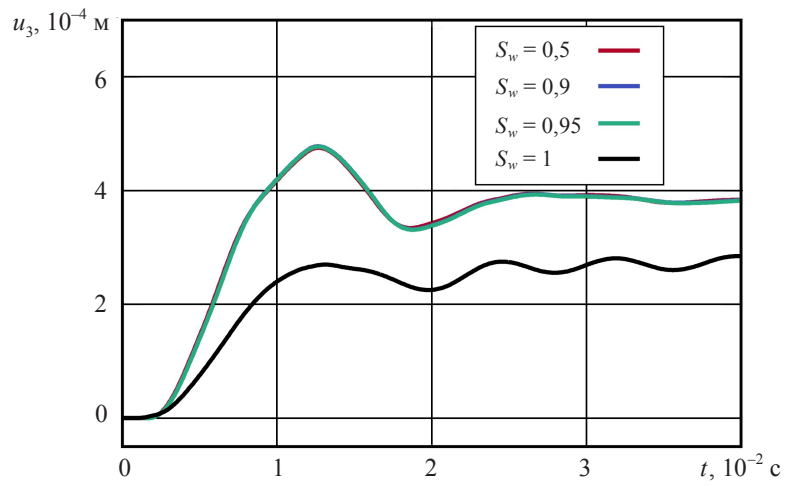


Рис. 9. Динамический отклик перемещения u_3 в точке В

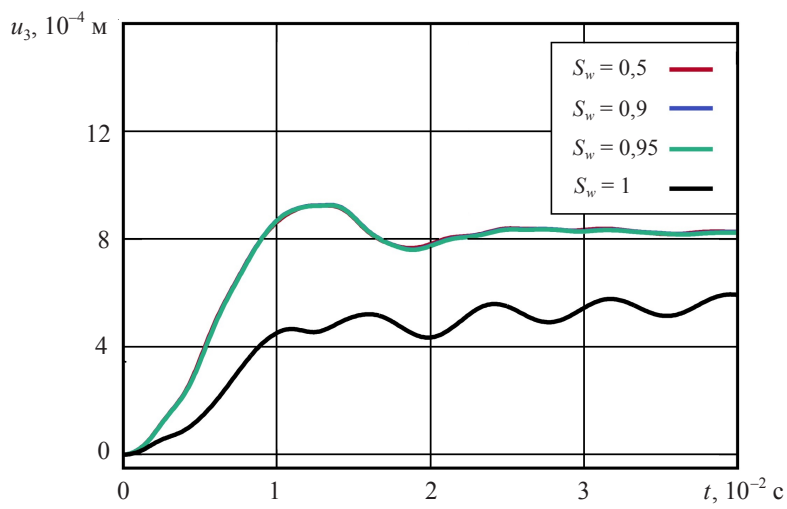


Рис. 10. Динамический отклик перемещения u_3 в точке С

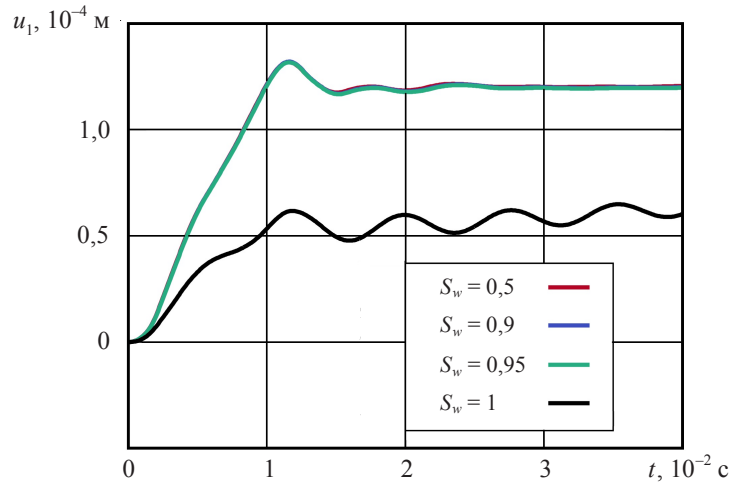


Рис. 11. Динамический отклик перемещения u_1 в точке D

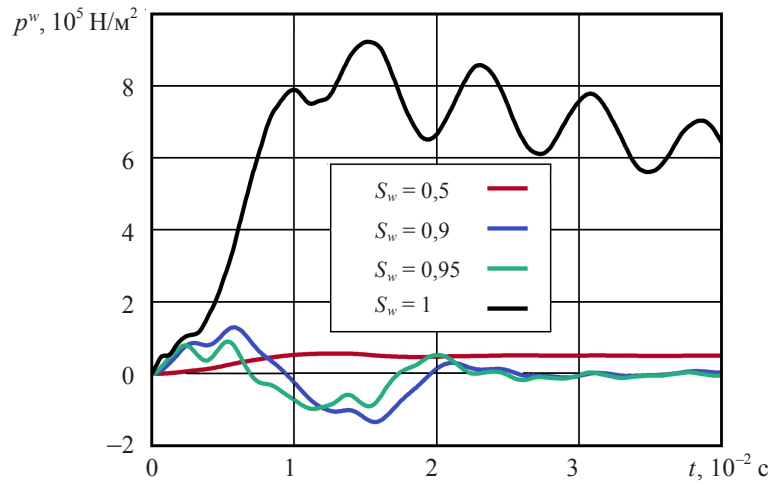


Рис. 12. Динамический отклик порового давления p^w в точке С при $d = 2$ м

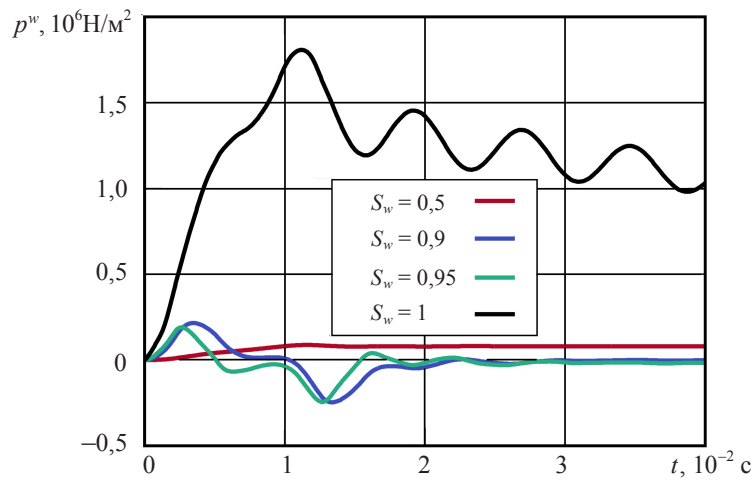


Рис. 13. Динамический отклик порового давления p^w в точке D при $d = 2$ м

Наиболее отчетливо влияние величины коэффициента насыщенности проявляется на динамическом отклике порового давления (см. рис. 12, 13).

Видно, что при значениях $S_w = 0,9; 0,95$ графики давления аналогичны представленным ранее. При $S_w = 0,5$ давление возрастает медленнее и с меньшей амплитудой, чем в остальных случаях, и принимает только положительные значения на рассматриваемом временном интервале. В предельном случае давление растет быстрее и с большей амплитудой, чем в других случаях, и принимает только положительные значения. При этом так же, как и при $S_w = 0,9$ и $d = 2$ м, давление в точке С превышает по амплитуде давление в точке D.

Заключение

С применением гранично-элементного подхода и аппарата преобразования Лапласа проведено численное параметрическое исследование решения задачи о действии динамической нагрузки внутри кубической полости, расположенной в частично насыщенном пороупругом полупространстве. Проанализировано влияние величин коэффициента насыщенности и глубины расположения полости на динамические отклики перемещений и поровых давлений в точках на поверхностях полупространства и полости. Анализ результатов показал:

- в точках на поверхности полупространства и на верхней грани полости вертикальные перемещения растут быстрее с уменьшением глубины и принимают большее значение. При глубине 4 м вертикальные перемещения в обеих точках на поверхности полупространства принимают близкие значения, а вертикальное перемещение в точке на верхней грани полости принимает значение, близкое к горизонтальному перемещению в точке на боковой грани, то есть при значениях свыше 4 м глубина оказывает меньшее влияние на динамический отклик перемещений на поверхности полости;

- увеличение глубины приводит к росту амплитуды горизонтального перемещения в точке на боковой грани полости и почти не влияет на характер поведения и амплитуду вертикального перемещения в точке на верхней грани, что может быть обусловлено относительной близостью проницаемой границы полупространства;

- изменение величины коэффициента насыщенности от 0,5 до 0,95 практически не влияет на динамический отклик перемещения, но наиболее отчетливо проявляется на отклике порового давления;

- использование модели полностью насыщенного материала в данной задаче приводит к заниженным оценкам перемещений и завышенным оценкам порового давления.

Список литературы

1. Wang Y., Gao G.Y., Yang J. Three-dimensional dynamic response of a lined tunnel in a half-space of saturated soil under internal explosive loading. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2017. Vol. 101. P. 157–161. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2017.07.018>.
2. Wen M.-J., Xu J.-M. Analytical solution for torsional vibration of a pile in saturated soil considering imperfect contact. *Gongcheng Li Xue/Engineering Mechanics*. 2014. Vol. 31. No 7. P. 156–161. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.01.0094.
3. Ozyazicioglu M. Spherical wave propagation in a poroelastic medium with infinite permeability: Time domain solution. *The Scientific World Journal*. 2014. Vol. 2014. P. 1–10. DOI: 10.1155/2014/813097.

4. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62. Iss. 3. P. 1–15. DOI: 10.1115/1.3090831.
5. Karinski Y.S., Shershnev V.V., Yankelevsky D.Z. Analytical solution of the harmonic waves diffraction by a cylindrical lined cavity in poroelastic saturated medium. *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2007. Vol. 31. Iss. 5. P. 667–689. DOI: 10.1002/nag.554.
6. Wang Y., Gao G.Y., Lin J., Gao M. Dynamic response of cylindrical lining in poroelastic saturated half-space soil induced by internal loading. *Proceedings of 6th International Symposium on Environmental Vibration*. Shanghai, 2013.
7. Gao M., Gao G., Wang Y. The transient response of cylindrical lining in poroelastic saturated half-space. *Guti Lixue Xuebao/Acta Mechanica Solida Sinica*. 2012. Vol. 33. No 2. P. 219–226.
8. Zhou X.-L., Wang J.-H., Jiang L.-F. Dynamic response of a pair of elliptic tunnels embedded in a poroelastic medium. *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 325. Iss. 4-5. P. 816–834. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.04.001.
9. Akhlaghi T., Nikkar A. Effect of vertically propagating shear waves on seismic behavior of circular tunnels. *The Scientific World Journal*. 2014. Vol. 2014. P. 1–10. DOI: 10.1155/2014/806092.
10. Gao M., Gao G.-Y., Li D.-Y. Transient response of lining structure subjected to sudden internal uniform loading considering effects of coupling mass. *Yantu Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Geotechnical Engineering*. 2011. Vol. 33. No 6. P. 862–868.
11. Amorosi A., Boldini D. Numerical modelling of the transverse dynamic behaviour of circular tunnels in clayey soils. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2009. Vol. 29. Iss. 6. P. 1059–1072. DOI: 10.1016/j.soildyn.2008.12.004.
12. Rajapakse R.K.N.D., Senjuntichai T. An indirect boundary integral equation method for poroelasticity. *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1995. Vol. 19. Iss. 9. P. 587–614. DOI: 10.1002/nag.1610190902.
13. Kattis S.E., Beskos D.E., Cheng A.H.D. 2D dynamic response of unlined and lined tunnels in poroelastic soil to harmonic body waves. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 2003. Vol. 32. No 1. P. 97–110. DOI: 10.1002/eqe.216.
14. He C., Zhou S., Di H., Xiao J. A 2.5-D coupled Fe-Be model for the dynamic interaction between tunnel and saturated soil. *Lixue Xuebao/Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2017. Vol. 49. Iss. 1. P. 126–136. DOI: 10.6052/0459-1879-16-176.
15. Yuan Z., Boström A., Cai Y., Cao Z. Closed-form analytical solution for vibrations from a tunnel embedded in a saturated poroelastic half space. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017. Vol. 143. Iss. 9. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001302.
16. Ashayeri I., Kamalian M., Jafari M.K., Gatmiri B. Analytical 3D transient elastodynamic fundamental solution of unsaturated soils. *Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2011. Vol. 35. Iss. 17. P. 1801–1829. DOI: 10.1002/nag.978.
17. Li P., Schanz M. Time domain boundary element formulation for partially saturated poroelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. Vol. 37. Iss. 11. P. 1483–1498. DOI: 10.1016/j.enganabound.2013.08.002.
18. Igumnov L.A., Petrov A.N., Belov A.A., Mironov A.A., Lyubimov A.K., Dianov D.Yu. Numerically-analytically studying fundamental solutions of 3D dynamics of partially saturated poroelastic bodies. *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No 5. P. 596–601. DOI: 10.18720/MPM.4252019_12.
19. Igumnov L.A., Petrov A.N., Vorobtsov I.V. The time-step boundary-element scheme on the nodes of the lobatto method in problems of 3D dynamic poroelasticity. *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No 1. P. 103–111. DOI: 10.18720/MPM.4212019_9.
20. Bishop A. *The Principles of Effective Stress*. Oslo: Norges Geotekniske Inst., 1960.
21. Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic properties of porous media. In: *Hydraulic Papers 3*. Fort Collins, Colorado: Colorado State University, 1964. 27 p.
22. Bonnet G. Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1987. Vol. 82. Iss. 5. P. 1758–1762. DOI: 10.1121/1.395169.
23. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. *Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела*. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. 295 с.
24. Гольдштейн Р.В. К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред. *Метод граничных интегральных уравне-*

ний. В сб.: *Механика: новое в зарубежной науке*. Пер. с англ. В.М. Вайншельбаума. М.: Мир, 1978. С. 183–209.

25. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. I. *Numerische Mathematik*. 1988. Vol. 52. Iss. 2. P. 129–145. DOI: 10.1007/BF01398686.

26. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. II. *Numerische Mathematik*. 1988. Vol. 52. Iss. 4. P. 413–425. DOI: 10.1007/BF01462237.

References

1. Wang Y., Gao G.Y., Yang J. Three-dimensional dynamic response of a lined tunnel in a half-space of saturated soil under internal explosive loading. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2017. Vol. 101. P. 157–161. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2017.07.018>.

2. Wen M.-J., Xu J.-M. Analytical solution for torsional vibration of a pile in saturated soil considering imperfect contact. *Gongcheng Li Xue/Engineering Mechanics*. 2014. Vol. 31. No 7. P. 156–161. DOI: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.01.0094.

3. Ozyazicioglu M. Spherical wave propagation in a poroelastic medium with infinite permeability: Time domain solution. *Sci. World J.* 2014. Vol. 2014. P. 1–10. DOI: 10.1155/2014/813097.

4. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Appl. Mech. Rev.* 2009. Vol. 62. Iss. 3. P. 1–15. DOI: 10.1115/1.3090831.

5. Karinski Y.S., Shershnev V.V., Yankelevsky D.Z. Analytical solution of the harmonic waves diffraction by a cylindrical lined cavity in poroelastic saturated medium. *Int. J Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2007. Vol. 31. Iss. 5. P. 667–689. DOI: 10.1002/nag.554.

6. Wang Y., Gao G.Y., Lin J., Gao M. Dynamic response of cylindrical lining in poroelastic saturated half-space soil induced by internal loading. *Proceedings of 6th International Symposium on Environmental Vibration*. Shanghai. 2013.

7. Gao M., Gao G., Wang Y. The transient response of cylindrical lining in poroelastic saturated half-space. *Guti Lixue Xuebao/Acta Mechanica Solida Sinica*. 2012. Vol. 33. No 2. P. 219–226.

8. Zhou X.-L., Wang J.-H., Jiang L.-F. Dynamic response of a pair of elliptic tunnels embedded in a poroelastic medium. *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 325. Iss. 4-5. P. 816–834. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.04.001.

9. Akhlaghi T., Nikkar A. Effect of vertically propagating shear waves on seismic behavior of circular tunnels. *Sci. World J.* 2014. Vol. 2014. P. 1–10. DOI: 10.1155/2014/806092.

10. Gao M., Gao G.-Y., Li D.-Y. Transient response of lining structure subjected to sudden internal uniform loading considering effects of coupling mass. *Yantu Gongcheng Xuebao/Chinese Journal of Geotechnical Engineering*. 2011. Vol. 33. No 6. P. 862–868.

11. Amorosi A., Boldini D. Numerical modelling of the transverse dynamic behaviour of circular tunnels in clayey soils. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2009. Vol. 29. Iss. 6. P. 1059–1072. DOI: 10.1016/j.soildyn.2008.12.004.

12. Rajapakse R.K.N.D., Senjuntichai T. An indirect boundary integral equation method for poroelasticity. *Int. J Numer. Anal. Meth. Geomech.* 1995. Vol. 19. Iss. 9. P. 587–614. DOI: 10.1002/nag.1610190902.

13. Kattis S.E., Beskos D.E., Cheng A.H.D. 2D dynamic response of unlined and lined tunnels in poroelastic soil to harmonic body waves. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 2003. Vol. 32. No 1. P. 97–110. DOI: 10.1002/eqe.216.

14. He C., Zhou S., Di H., Xiao J. A 2.5-D coupled Fe-Be model for the dynamic interaction between tunnel and saturated soil. *Lixue Xuebao/Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2017. Vol. 49. Iss. 1. P. 126–136. DOI: 10.6052/0459-1879-16-176.

15. Yuan Z., Boström A., Cai Y., Cao Z. Closed-form analytical solution for vibrations from a tunnel embedded in a saturated poroelastic half space. *J. Eng. Mech.* 2017. Vol. 143. Iss. 9. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001302.

16. Ashayeri I., Kamalian M., Jafari M.K., Gatmiri B. Analytical 3D transient elastodynamic fundamental solution of unsaturated soils. *Int. J Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2011. Vol. 35. Iss. 17. P. 1801–1829. DOI: 10.1002/nag.978.

17. Li P., Schanz M. Time domain boundary element formulation for partially saturated poroelasticity. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2013. Vol. 37. Iss. 11. P. 1483–1498. DOI: 10.1016/j.enganabound.2013.08.002.

18. Igumnov L.A., Petrov A.N., Belov A.A., Mironov A.A., Lyubimov A.K., Dianov D.Yu. Numerically-analytically studying fundamental solutions of 3D dynamics of partially saturated poroelastic bodies. *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No 5. P. 596–601. DOI: 10.18720/MPM.4252019_12.
19. Igumnov L.A., Petrov A.N., Vorobtsov I.V. The time-step boundary-element scheme on the nodes of the lobatto method in problems of 3D dynamic poroelasticity. *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. No 1. P. 103–111. DOI: 10.18720/MPM.4212019_9.
20. Bishop A. *The Principles of Effective Stress*. Oslo. Norges Geotekniske Inst. 1960.
21. Brooks R.H., Corey A.T. Hydraulic properties of porous media. In: *Hydraulic Papers 3*. Fort Collins. Colorado. Colorado State University. 1964. 27 p.
22. Bonnet G. Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range. *J. Acoust. Soc. A*. 1987. Vol. 82. Iss. 5. P. 1758–1762. DOI: 10.1121/1.395169.
23. Ugodchikov A.G., Khutoryanskiy N.M. *Metod granichnykh elementov v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela [Boundary-Element Method in Mechanics of Deformable Solids]*. Kazan. Kazan State University Publ. 1986. 295 p. (In Russian).
24. Goldshteyn R.V. K voprosu o primenenii metoda granichnykh integralnykh uravneniy dlya resheniya zadach mekhaniki sploshnykh sred. Metod granichnykh integralnykh uravneniy [On the application of the method of boundary integral equations for solving problems of continuum mechanics. Method of boundary integral equations]. *Mekhanika: novoe v zarubezhnoy nauke [Mechanics: New in Foreign Science]*. Moscow. Mir Publ. 1978. P. 183–209 (In Russian).
25. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. I. *Numerische Mathematik*. 1988. Vol. 52. Iss. 2. P. 129–145. DOI: 10.1007/BF01398686.
26. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. II. *Numerische Mathematik*. 1988. Vol. 52. Iss. 4. P. 413–425. DOI: 10.1007/BF01462237.

NUMERICAL MODELLING OF DYNAMIC RESPONSE OF A PARTIALLY SATURATED POROELASTIC HALF-SPACE IN CASE OF A LOAD ACTING INSIDE A CUBIC CAVITY

Petrov A.N., Grigoryev M.V.

Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

Computer modeling based on the boundary element method is performed for the problem of loading in terms of the Heaviside step function inside a cubic cavity located in a partially saturated poroelastic half-space. A poroelastic medium is represented by a heterogeneous material-based model consisting of an elastic matrix phase and two phases of fillers – liquid and gas filling the pore system. The material model corresponds to a three-component medium. The constitutive relations of poroelastic medium written in terms skeleton displacements and pore pressures of fillers are considered. The original initial-boundary value problem is reduced to a boundary value problem by using the formal application of the Laplace transform. The research technique is based on the direct approach boundary integral equations of 3D isotropic linear theory of poroelasticity. Boundary integral equations corresponding to the boundary value problem are solved by the boundary element method in combination with the collocation method. In this study 8-noded elements have been adopted to discretize the boundary of poroelastic half-space. It is assumed that the element is linear with respect to displacements and pore pressures, while only one central node is used to represent tractions and fluxes. Algorithms for eliminating singularities, decreasing the order and subdividing elements are employed to compute the integral coefficients of a discrete analogue of the boundary integral equation. Regular integrals are calculated using the Gauss quadrature formula. The solution in time is obtained by numerical inversion of the Laplace transform. The numerical inversion method relies on quadrature formulas for computing the convolution integral. The time dependences of unknown displacement functions and pore pressures at points on the surface of the half-space

and the cavity are plotted. The corresponding graphs are given. The influence of the cavity depth and degree of saturation on dynamic responses is investigated. The solution obtained by using the model of a fully saturated poroelastic material is compared to that of partially saturated poroelastic material. It is noted that the model used for solving this problem leads to an underestimation of displacement and overestimation of pore pressure estimates.

Keywords: partially saturated poroelastic media, half-space, embedded cavity, dynamic response, BEM, Laplace transform.