

УДК 539.3

**АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ КРИВЫХ  
НЕЛИНЕЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
И АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ  
В КРАТНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧКАХ**

**О.А. Сергеев, В.Г. Киселев**

*Нижний Новгород*

Проводится аналитический анализ чувствительности кратной критической нагрузки, кратной низшей формы потери устойчивости конструкции и нелинейных перемещений. Для анализа чувствительности применяется прямой метод. Приводятся примеры исследований геометрически нелинейных конструкций с двукратной предельной точкой и двукратной точкой бифуркации.

**1. Введение**

Находящаяся под действием возрастающей нагрузки нелинейная упругая конструкция деформируется в режиме, для которого сохраняется единственное решение для перемещений и устойчивость состояния равновесия. Для вычисления нелинейных перемещений используются метод последовательных нагружений, метод обобщенных перемещений и метод длины дуги. На некотором этапе, для достаточно большого значения нагрузки, достигается критическое состояние, например, простая или кратная предельная точка, или точка бифуркации. Касательная матрица жесткости конструкции становится сингулярной в критической точке, что соответствует многозначному решению для перемещений. Сингулярность касательной матрицы жесткости трактуется как общая потеря устойчивости конструкции.

Важной задачей является рассмотрение поведения конструкции и после общей потери устойчивости. Это позволяет полно оценить ее несущую способность, так как конструкция может быть работоспособной и после потери устойчивости. С использованием дифференциального уравнения второго порядка исследуются равновесные кривые в окрестности кратных критических точек. Это позволяет установить количество исходящих ветвей из кратных критических точек и отслеживать их в закритической области.

В данной работе записывается выражение для приращения полной потенциальной энергии, позволяющее исследовать устойчивость равновесных кривых и ответить на вопрос: будет ли закритическое поведение конструкции устойчивым или неустойчивым?

Анализ чувствительности критической нагрузки для простых точек бифуркации и предельных точек рассматривается в работах [1–5]. В статье рассматривается аналитический анализ чувствительности кратной критической нагрузки, кратной низшей формы потери устойчивости конструкции и нелинейных перемещений. Для анализа чувствительности применяется прямой метод. Искомые производные необ-

ходимы в задачах оптимизации с ограничениями на критическую нагрузку потери устойчивости конструкции, где используются аппроксимации активных ограничений и предположение о том, что конструкция так же может терять устойчивость по кратной низшей форме.

## 2. Основные уравнения

Рассмотрим нелинейную упругую конструкцию, для которой полная потенциальная энергия  $\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, X)$  зависит от вектора нелинейных перемещений  $\mathbf{u}$ , множителя нагрузки  $\Lambda$ , варьируемого параметра  $X$ . Для упрощения уравнений рассмотрим конструкцию с одним варьируемым параметром  $X$ . Уравнения равновесия для такой конструкции имеют вид:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \Lambda, X) = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}_i} = 0, \quad i = 1, n, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \Lambda, X)$  – вектор невязки или вектор неуравновешенных сил, если вектор перемещений  $\mathbf{u}$  не является истинным.

Рассмотрим кривую деформирования (равновесную кривую) в зависимости от значения варьируемого параметра  $X$  в  $(n + 1)$ -размерном пространстве  $(\mathbf{u}, \Lambda)$ . На рис. 1 обозначено: 1 – кривая деформирования, 2 – кривая критических состояний, 3 – траектория преобразования.

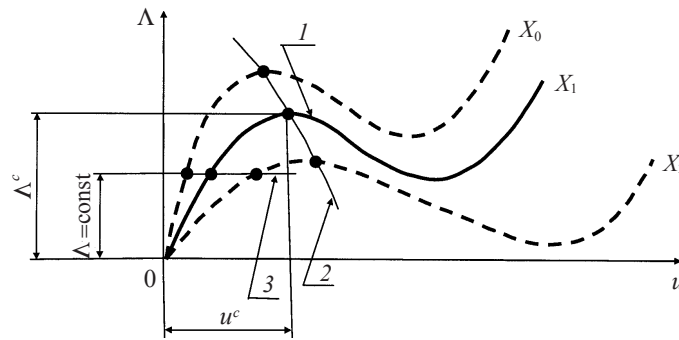


Рис. 1

Параметрические уравнения кривой деформирования:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \quad \Lambda = \Lambda(t), \quad (2)$$

где  $t$  – параметр продвижения вдоль кривой деформирования.

Можно рассмотреть три альтернативы для выбора параметра  $t$ :

- 1)  $t = \Lambda$ ;
- 2)  $t = u_i$ ;
- 3)  $t = s$ ,

где  $s$  – длина кривой деформирования. Важно отметить, что параметрическая форма (2) не работает в критических точках, где пересекаются две или более кривых. Дифференцируя уравнение равновесия (1) по параметру продвижения  $t$ , можно записать

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_\Lambda \dot{\Lambda} = 0, \quad (4)$$

где точка сверху и нижний индекс  $\Lambda$  обозначают соответственно дифференцирование по  $t$  и частную производную по  $\Lambda$ ,  $\mathbf{K} = \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{u}$  – касательная матрица жесткости.

Дифференцируя (1) еще два раза, получаем еще два уравнения:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{r}}_{\Lambda}\dot{\Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda}\ddot{\Lambda} = 0, \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}} + 2\dot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_{\Lambda}\ddot{\Lambda} + 2\dot{\mathbf{r}}_{\Lambda}\dot{\Lambda} + \ddot{\mathbf{r}}_{\Lambda}\dot{\Lambda} = 0, \quad (6)$$

где

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N}\dot{\Lambda}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{\Lambda} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}\dot{\Lambda},$$

$$\ddot{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{N}}\dot{\Lambda} + \mathbf{N}\ddot{\Lambda}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_{\Lambda} = \dot{\mathbf{N}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{r}}_{\Lambda\Lambda}\dot{\Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda\Lambda}\ddot{\Lambda},$$

$\mathbf{L}$  – пакет матриц.

Уравнение (4) может быть использовано для отслеживания кривой деформирования в  $(n + 1)$ -размерном пространстве  $(\mathbf{u}, \Lambda)$  по известной формуле

$$\mathbf{u}_{(s+1)} = \mathbf{u}_{(s)} + \dot{\mathbf{u}}_{(s)} \Delta t. \quad (7)$$

Однако в некоторых точках кривой деформирования касательная матрица  $\mathbf{K}$  является сингулярной и нахождение вектора  $\dot{\mathbf{u}}_{(s)}$  из (4) и соответственно применение (7) невозможно.

### 3. Условие потери устойчивости

Сингулярность касательной матрицы  $\mathbf{K}$  трактуется как потеря устойчивости конструкции. Соответствующие точки  $(\mathbf{u}^c, \Lambda^c)$  кривой деформирования называются критическими точками, а достигнутый множитель нагрузки  $\Lambda^c(X)$  называется критическим. Следовательно, критическая точка определяется с использованием условия:

$$\det[\mathbf{K}(\mathbf{u}^c, \Lambda^c, X)] = 0. \quad (8)$$

Альтернативным подходом для определения критической точки является равенство нулю первого собственного значения касательной матрицы жесткости, которое является решением следующей проблемы собственных значений:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^c, \Lambda^c, X)\Phi_1 = 0. \quad (9)$$

где  $\Phi_1$  – первая форма потери устойчивости конструкции.

### 4. Аналитический анализ чувствительности кратной критической нагрузки и нелинейных перемещений

Для простоты рассмотрим двукратное собственное значение  $\lambda_1 = \lambda_2 = \tilde{\lambda} = 0$ . Для двукратной критической точки имеется бесконечное множество собственных векторов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , то есть они не являются уникальными. Любая линейная комбинация  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  будет удовлетворять проблеме собственных значений (9). Используем такие собственные векторы  $\tilde{\Phi}$ , которые остаются дифференцируемыми по варьируемому параметру  $X$ . Для этой цели представим линейную комбинацию собственных векторов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ :

$$\tilde{\Phi} = \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2, \quad (10)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – неизвестные коэффициенты. Собственные векторы  $\tilde{\Phi}$  нормализуются так, что их длина равна единице, то есть выполняется

$$\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi} = 1, \quad (11)$$

откуда следует

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1. \quad (12)$$

Рассмотрим задачу определения производных по варьируемому параметру  $X$  кратной критической нагрузки  $d\Lambda^c/dX$  и перемещений  $d\mathbf{u}^c/dX$ . Искомые производные необходимы в задачах оптимизации с ограничениями на критическую нагрузку потери устойчивости конструкции [1–5], где используется аппроксимация активных ограничений.

Рассмотрим прямой метод дифференцирования. Для двукратного критического состояния имеем

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^c, \Lambda^c, X)\tilde{\Phi} = \tilde{\lambda}\tilde{\Phi}, \quad (13)$$

где  $\lambda_1 = \lambda_2 = \tilde{\lambda} = 0$ . Предположим, что собственный вектор  $\tilde{\Phi}$  является дифференцируемым по  $X$  в критической точке, то есть производная  $d\tilde{\Phi}/dX$  существует. Дифференцируя (13) по  $X$ , получим для кривой критических состояний (см. рис. 1)

$$\mathbf{K} \frac{d\tilde{\Phi}}{dX} + \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}^c}{dX} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Lambda} \frac{d\Lambda^c}{dX} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X} \right) \tilde{\Phi} = 0. \quad (14)$$

Производная  $d\mathbf{u}^c/dX$  может быть записана как

$$\frac{d\mathbf{u}^c}{dX} = \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{d\Lambda^c}{dX} + \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X}. \quad (15)$$

Определим производную  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$ . Для этого рассмотрим процесс деформации под нагрузкой, то есть  $t = \Lambda$ ,  $\dot{\Lambda} = 1$ ,  $\ddot{\Lambda} = \ddot{\Lambda} = \dots = 0$ . Из уравнения (4) имеем

$$\mathbf{K} \partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda + \mathbf{r}_\Lambda^c = 0. \quad (16)$$

Матрица  $\mathbf{K}$  является сингулярной в критическом состоянии, и нахождение  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$  из линейной системы (16) становится невозможным. Требуется два дополнительных уравнения. Поэтому обратимся за помощью к уравнению (5) и получим эти уравнения после умножения (5) слева на  $\tilde{\Phi}_1^T$  или  $\tilde{\Phi}_2^T$ . Два дополнительных уравнения имеют вид:

$$\tilde{\Phi}_1^T \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + 2\mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c \right) = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{\Phi}_2^T \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + 2\mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c \right) = 0. \quad (18)$$

Заметим, что уравнения (17)–(18) являются квадратичными относительно  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$ . Следовательно, в двукратной критической точке можно получить до двух решений для производной  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$ .

Теперь найдем производную  $\partial \mathbf{u}^c / \partial X$ . Для этого рассмотрим процесс преобразования, то есть  $\Lambda = \text{const}$ ,  $\dot{\Lambda} = \ddot{\Lambda} = \dots = 0$ , см. рис. 1. Дифференцируя уравнение (1) по  $X$ , имеем

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + \mathbf{r}_X^c = 0, \quad (19)$$

где нижний индекс  $X$  обозначает частную производную по варьируемому параметру  $X$ . Два добавочных условия получим после дифференцирования уравнения (19) по  $X$  и последующего его умножения слева на  $\tilde{\Phi}_1^T$  или  $\tilde{\Phi}_2^T$ . Дополнительные условия для двукратной предельной точки и точки бифуркации также являются квадратичными относительно  $\partial \mathbf{u}^c / \partial X$  и имеют вид:

$$\Phi_1^T \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + 2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + \mathbf{r}_{XX}^c \right) = 0, \quad (20)$$

$$\Phi_2^T \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + 2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + \mathbf{r}_{XX}^c \right) = 0. \quad (21)$$

Теперь рассмотрим определение производной  $d\Lambda^c/dX$ . Умножая уравнение (14) сначала на  $\Phi_1^T$ , а затем на  $\Phi_2^T$ , получим систему двух линейных уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2$ :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = 0, \quad (22)$$

где

$$A_{ij} = L_{ij} d\Lambda^c/dX + D_{ij}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2,$$

$$L_{ij} = \Phi_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Lambda} \right) \Phi_j, \quad D_{ij} = \Phi_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X} \right) \Phi_j, \quad \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \Phi_2 = \Phi_2^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1.$$

Ненулевые решения для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  существуют, если определитель системы равен нулю:

$$\begin{aligned} A_{11}A_{22} - A_{12}^2 &= (L_{11}L_{22} - L_{12}^2) \left( \frac{d\Lambda^c}{dX} \right)^2 + (L_{11}D_{22} + L_{22}D_{11} - \\ &- 2L_{12}D_{12}) \left( \frac{d\Lambda^c}{dX} \right) + (D_{11}D_{22} - D_{12}^2) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Из уравнения (23) определяем производные кратного критического множителя нагрузки:

$$\frac{d\Lambda_1^c}{dX} = \frac{2L_{12}D_{12} - L_{11}D_{22} - L_{22}D_{11} - \sqrt{d}}{2(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)}, \quad (24)$$

$$\frac{d\Lambda_2^c}{dX} = \frac{2L_{12}D_{12} - L_{11}D_{22} - L_{22}D_{11} + \sqrt{d}}{2(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)}, \quad (25)$$

где дискриминант  $d$  для (23) определяется как

$$d = (L_{11}D_{22} - L_{22}D_{11})^2 + 4(L_{11}D_{12} - L_{12}D_{11})(L_{22}D_{12} - L_{12}D_{22}). \quad (26)$$

После нахождения  $d\Lambda_1^c/dX$  и  $d\Lambda_2^c/dX$  из системы уравнений (22) находим две пары решений для коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с учетом уравнения (12), а затем про-

изводную  $du^c/dX$  из уравнения (15). Две пары коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  дают из (10) два собственных вектора  $\tilde{\Phi}_1$  и  $\tilde{\Phi}_2$ , дифференцируемых по параметру  $X$  в критической точке.

Важно отметить, что когда  $d\Lambda_1^c/dX = d\Lambda_2^c/dX$ , то в этом случае возникает новая проблема с определением коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Дискриминант  $d$  квадратного уравнения (23) должен быть равен нулю, чтобы сохранять двукратное критическое состояние при варьировании параметра  $X$ .

### 5. Классификация кратных критических точек

Классификация критических точек, когда нулевое первое собственное значение является простым, рассматривается в работах [1, 2, 4–6]. Проведем классификацию кратных критических точек. Умножение слева уравнений (27), (28) на  $\tilde{\Phi}_1^T$  и  $\tilde{\Phi}_2^T$  приводит к условиям потери устойчивости (29), (30):

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}}_1^c + \dot{\Lambda}_1^c \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}}_2^c + \dot{\Lambda}_2^c \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad (28)$$

$$\dot{\Lambda}_1^c \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad (29)$$

$$\dot{\Lambda}_2^c \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad (30)$$

которые будем использовать для классификации двукратных критических точек.

Точка, для которой выполняется

$$\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0, \quad \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0, \quad (31)$$

$$\dot{\Lambda}_1^c = \dot{\Lambda}_2^c = 0, \quad (32)$$

называется двукратной предельной точкой.

Точка, для которой выполняется

$$\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad (33)$$

называется обычной (постоянной) двукратной точкой бифуркации. Для нее  $\dot{\Lambda}_1^c$  и  $\dot{\Lambda}_2^c$  остаются неопределенными.

### 6. Представление приращения вектора нелинейных перемещений в окрестности кратной критической точки

Рассмотрим методику отслеживания равновесной кривой после кратной критической точки. В двукратной точке бифуркации  $B$  вектор перемещений и множитель нагрузки принимают значения  $\mathbf{u}_B^c$  и  $\Lambda_B^c$ . Мы изучаем малые отклонения перемещений и множителя нагрузки в окрестности точки  $B$ . Для малых отклонений от двукратной точки бифуркации связь между  $\Delta \mathbf{u}^c$  и  $\Delta \Lambda^c$  может быть представлена так [6]:

$$\Delta \mathbf{u}_1^c = A_1 \tilde{\Phi}_1 \Delta s + \Delta \Lambda_1^c \mathbf{y}, \quad (34)$$

$$\Delta \mathbf{u}_2^c = A_2 \tilde{\Phi}_2 \Delta s + \Delta \Lambda_2^c \mathbf{y}, \quad (35)$$

или в дифференциальной форме

$$\dot{\mathbf{u}}_1^c = A_1 \tilde{\Phi}_1 + \dot{\Lambda}_1^c \mathbf{y}, \quad (36)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_2^c = A_2 \tilde{\Phi}_2 + \dot{\Lambda}_2^c \mathbf{y}, \quad (37)$$

где вектор  $\mathbf{y}$  определяется как

$$\mathbf{y} = - \left[ \frac{1}{\lambda_3} (\Phi_3^T \mathbf{r}_\Lambda^c) \Phi_3 + \dots + \frac{1}{\lambda_n} (\Phi_n^T \mathbf{r}_\Lambda^c) \Phi_n \right], \quad (38)$$

$A_1, A_2$  – неизвестные коэффициенты,  $\Delta s$  – приращение длины кривой равновесных состояний.

Вектор  $\mathbf{y}$  может находиться из следующей системы уравнений, полученной с помощью уравнения (27) или (28) с учетом (36) или (37):

$$\mathbf{K} \mathbf{y} = -\mathbf{r}_\Lambda^c, \quad \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{y} = 0, \quad \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{y} = 0. \quad (39)$$

Использование двух последних уравнений системы (39) позволяет обойти сингулярность касательной матрицы жесткости  $\mathbf{K}$ . Представление (36) или (37) аналогично разложению движения конструкции как твердого целого и деформирования конструкции, где  $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$  – моды движения конструкции как твердого целого.

Аналогично для двукратной предельной точки имеем:

$$\dot{\mathbf{u}}_1^c = A_1 \tilde{\Phi}_1, \quad (40)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_2^c = A_2 \tilde{\Phi}_2. \quad (41)$$

Чтобы найти коэффициенты  $A_1, A_2$  для кратных критических точек, будем использовать дифференциальное уравнение второго порядка (5), поскольку, используя уравнение (27) или (28), нельзя получить эту информацию.

### 7. Определение амплитуды формы потери устойчивости и исследование устойчивости равновесных кривых для кратной предельной точки

Для удобства запишем еще раз уравнение (5) в форме

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{u}}_1^c + \mathbf{K} \ddot{\mathbf{u}}_1^c + \dot{\mathbf{r}}_\Lambda^c \dot{\Lambda}_1^c + \mathbf{r}_\Lambda^c \ddot{\Lambda}_1^c = 0. \quad (42)$$

Умножая уравнение (42) слева на  $\tilde{\Phi}_1^T$  и учитывая условия двукратной предельной точки, получим

$$\tilde{\Phi}_1^T \dot{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{u}}_1^c + \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \ddot{\Lambda}_1^c = 0. \quad (43)$$

Подставляя в уравнение (43) выражения для  $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}}_1^c$  и  $\dot{\mathbf{u}}_1^c = A_1 \tilde{\Phi}_1$ , получаем

$$A_1^2 \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{L} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \ddot{\Lambda}_1^c = 0. \quad (44)$$

Из (44) находим коэффициент  $A_1$ :

$$A_1 = \pm \sqrt{-\frac{\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \ddot{\Lambda}_1^c}{\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{L} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_1}}. \quad (45)$$

Подкоренное выражение в (45) может быть отрицательным. Это трактуется как отсутствие закритической ветви, то есть равновесная кривая не имеет продолжения

после критической точки. Определение кривизны  $\ddot{\Lambda}_1^c$  представляет собой отдельную задачу и в этой статье не рассматривается.

Еще раз умножая уравнение (5) слева на  $\tilde{\Phi}_2^T$ , получаем коэффициент  $A_2$ . Подстановка коэффициентов  $A_1, A_2$  в (40), (41) дает направления ответвлений для двукратной предельной точки. Следовательно, для двукратной предельной точки имеем самое большее – две исходящие равновесные кривые.

Исследуем устойчивость положения равновесия, близкого к двукратной предельной точке. Умножая уравнение (44) на  $\Delta s^2$ , имеем

$$A_1^2 \Delta s^2 \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{L} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \ddot{\Lambda}_1^c \Delta s^2 = 0. \quad (46)$$

Обозначим  $\Delta \bar{s}_1 = A_1 \Delta s$ . Тогда уравнение (46) перепишем как

$$\Delta \bar{s}_1^2 \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{L} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \Delta^2 \Lambda_1^c = 0. \quad (47)$$

Из (47) имеем

$$\Delta \bar{s}_1 = \pm \sqrt{-\frac{\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \Delta^2 \Lambda_1^c}{\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{L} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_1}}. \quad (48)$$

Исследование устойчивости первой равновесной кривой, исходящей из двукратной предельной точки, будем проводить с помощью приращения полной потенциальной энергии. Выражение для приращения полной потенциальной энергии имеет вид [6]:

$$\Delta \Pi = \frac{B_1}{6} \Delta \bar{s}_1^3 + O(\Delta \bar{s}_1^4), \quad (49)$$

где  $B_1 = \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{L} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_1$ . Если  $B_1 > 0$ , тогда приращение полной потенциальной энергии положительно для  $\Delta \bar{s}_1 > 0$  (устойчивое закритическое поведение) и отрицательно для  $\Delta \bar{s}_1 < 0$  (неустойчивое закритическое поведение). Аналогично, если  $B_1 < 0$ , тогда приращение энергии отрицательно для  $\Delta \bar{s}_1 > 0$  и положительно для  $\Delta \bar{s}_1 < 0$ . Исследование на устойчивость второй равновесной кривой, исходящей из двукратной предельной точки, проводится аналогично.

### 8. Определение амплитуды формы потери устойчивости и исследование устойчивости равновесных кривых для кратной точки бифуркации

Умножая (42) слева на  $\tilde{\Phi}_1^T$  и учитывая условия двукратной точки бифуркации, получаем

$$\tilde{\Phi}_1^T \dot{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{u}}_1^c + \tilde{\Phi}_1^T \dot{\mathbf{r}}_\Lambda^c \dot{\Lambda}_1^c = 0. \quad (50)$$

Подставляя в уравнение (50) выражения для  $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{L} \dot{\mathbf{u}}_1^c + \mathbf{N} \dot{\Lambda}_1^c$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_\Lambda^c = \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}_1^c + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c \dot{\Lambda}_1^c$  и выражение для  $\dot{\mathbf{u}}_1^c = A_1 \tilde{\Phi}_1 + \dot{\Lambda}_1^c \mathbf{y}$ , получаем квадратное уравнение для определения коэффициента  $A_1$ :

$$a A_1^2 + b A_1 + c = 0, \quad (51)$$

где  $a = \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{L} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_1$ ,  $b = 2 \dot{\Lambda}_1^c \tilde{\Phi}_1^T (\mathbf{L} \mathbf{y} + \mathbf{N}) \tilde{\Phi}_1$ ,  $c = \dot{\Lambda}_1^{c2} \tilde{\Phi}_1^T (\mathbf{L} \mathbf{y} \mathbf{y} + 2 \mathbf{N} \mathbf{y} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c)$ , а  $\mathbf{L} \mathbf{y} \tilde{\Phi}_1 = \mathbf{L} \tilde{\Phi}_1 \mathbf{y}$ . Квадратное уравнение (51) дает до двух корней. Мы предполагаем, что



$A_{1(1)}$  и  $A_{1(2)}$  – действительные корни.

Рассмотрим особые случаи. Если  $a = 0$ , тогда один корень, например  $A_{1(2)}$ , равен  $\infty$ , а другой корень  $A_{1(2)} = -c/b$ , когда  $b \neq 0$ . Тогда  $\dot{\mathbf{u}}_{1(2)}^c$  и  $\tilde{\Phi}_1$  являются коллинеарными. Если  $a = b = c = 0$ , тогда дифференциальное уравнение второго порядка (42) не даст информации относительно исходящих равновесных кривых из двукратной точки бифуркации. Поэтому необходимо использовать дифференциальное уравнение третьего порядка (6), которое приведет к кубическому уравнению относительно коэффициента  $A_1$  с четырьмя действительными коэффициентами. Если все четыре действительных коэффициента равны нулю, тогда будем использовать дифференциальное уравнение четвертого порядка и т.д.

Аналогично, умножая слева уравнение (5) на  $\tilde{\Phi}_2^T$ , получаем еще два действительных корня  $A_{2(1)}$  и  $A_{2(2)}$ . Подстановка коэффициентов  $A_{1(1)}$ ,  $A_{1(2)}$ ,  $A_{2(1)}$ ,  $A_{2(2)}$  в уравнения (36)–(37) предоставляет направления ответвлений в двукратной точке бифуркации:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{1(1)} &= A_{1(1)} \tilde{\Phi}_1 + \dot{\Lambda}_1^c \mathbf{y}, & \dot{\mathbf{u}}_{1(2)} &= A_{1(2)} \tilde{\Phi}_1 + \dot{\Lambda}_1^c \mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{u}}_{2(1)} &= A_{2(1)} \tilde{\Phi}_2 + \dot{\Lambda}_2^c \mathbf{y}, & \dot{\mathbf{u}}_{2(2)} &= A_{2(2)} \tilde{\Phi}_2 + \dot{\Lambda}_2^c \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (52)$$

Следовательно, имеется самое большее четыре – исходящих равновесных кривых из двукратной точки бифуркации.

Исследуем устойчивость положения равновесия, близкого к двукратной точке бифуркации. Умножая уравнение (51) на  $\Delta s^2$ , имеем

$$a \Delta \bar{s}_1^2 + b_1 \Delta \bar{s}_1 + c_1 = 0, \quad (53)$$

где  $a = \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{L} \tilde{\Phi}_1 \tilde{\Phi}_1$ ,  $b_1 = 2 \Delta \Lambda_1^c \tilde{\Phi}_1^T (\mathbf{L} \mathbf{y} + \mathbf{N}) \tilde{\Phi}_1$ ,  $c_1 = \Delta \Lambda_1^{c2} \tilde{\Phi}_1^T (\mathbf{L} \mathbf{y} \mathbf{y} + 2 \mathbf{N} \mathbf{y} + \mathbf{r}_{\Lambda \Lambda}^c)$ ,  $\Delta \bar{s}_1 = A_1 \Delta s$ . Анализ устойчивости равновесных кривых, исходящих из двукратной точки бифуркации, проводится с помощью приращения полной потенциальной энергии [6]:

$$\Delta \Pi = \frac{B_1}{6} \Delta \bar{s}_1^3 + \frac{B_5}{24} \Delta \bar{s}_1^4, \quad (54)$$

где

$$B_5 = \tilde{\Phi}_1^T \left\{ \frac{\partial^3 \mathbf{r}^c}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \tilde{\Phi}_1(i) \tilde{\Phi}_1(j) \tilde{\Phi}_1(k) \right\}.$$

## 9. Примеры

**Пример 1.** Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, состоящую из трех жестких стержней, соединенных шарнирами (рис. 2). До нагружения оси стержней расположены на одной вертикали, и сила  $P$  прикладывается вдоль нее. На рис. 2 показано положение механической системы при положительных обобщенных координатах  $U_1$  и  $U_2$ . Представим безразмерные параметры для механической системы следующим образом:  $d_i = D_i/L$ ,  $u_i = U_i/L$ ,  $w_i = W_i/L$ ,  $u = U/L$ ,  $k_i = K_i/K$ , множитель нагрузки  $\Lambda = P/KL$ , где  $D_1 = L\sqrt{1 - (u_1 - u_2)^2}$ ,  $D_2 = L\sqrt{1 - 4u_2^2}$ ,  $D_3 = L\sqrt{1 - (u_1 + u_2)^2}$ ,  $U = 3L - D_1 - D_2 - D_3 \approx L(u_1^2 + 3u_2^2)(4 + u_1^2 + 3u_2^2)/4$ ,  $K_i$  – жесткости пружин,  $K$  – исходная жесткость. Геометрические величины  $D_i$ ,  $W_3 =$

$= L(u_1 - u_2)\sqrt{2}/2$ ,  $W_4 = L(u_1 + u_2)\cos(\pi/8)$ ,  $\varphi_2 = \arctg(2u_2/\sqrt{1-4u_2^2}) = 2u_2 + 4u_2^3/3 + \dots$ ,  $U, L$  показаны на рис. 2. Коэффициенты жесткости пружин принимают следующие значения:

$$k_1 = \frac{4}{3}\left(3 + \cos\frac{\pi}{8}\left(4 - \cos\frac{\pi}{8}\right)\right) + X, \quad k_2 = 3 + 4\cos\frac{\pi}{8} + mX, \quad k_3 = \frac{\cos^2(\pi/8)}{\cos^2(\pi/4)},$$

$$k_4 = 1,$$

где  $X$  – варьируемый параметр,  $m$  – подбираемый скалярный параметр.

Полная потенциальная энергия механической системы записывается в форме

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1u_1^2 + \frac{1}{2}k_2\varphi_2^2 + \frac{1}{2}k_3w_3^2 + \frac{1}{2}k_4w_4^2 - \Lambda u. \quad (55)$$

Взяв производные от полной потенциальной энергии по  $u_1$  и  $u_2$ , получим нелинейные уравнения равновесия:

$$\left(\frac{4}{3}\left(3 + \cos\frac{\pi}{8}\left(4 - \cos\frac{\pi}{8}\right)\right) - \Lambda(2 + u_1^2 + 3u_2^2) + X + 2\cos^2\frac{\pi}{8}\right)u_1 = 0, \quad (56)$$

$$\left(-3\Lambda(2 + u_1^2 + 3u_2^2) + 2\left(6 + 2mX + 8\cos\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \left(3 + mX + 4\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{16}{3}u_2^2 + \frac{8}{3}u_2^4\right)\right)\right)u_2 = 0. \quad (57)$$

Тогда два критических значения множителя нагрузки определяются так:

$$\Lambda_1^c = \frac{1}{6}\left(3X + 2\left(6 + 8\cos\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}\right)\right), \quad (58)$$

$$\Lambda_2^c = \frac{1}{3}\left(6 + 8\cos\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + 2mX\right). \quad (59)$$

Двукратная точка бифуркации появляется, когда  $X = 0$  ( $\Lambda_1^c = \Lambda_2^c = 4,748$ ). Равновесные кривые, исходящие из двукратной точки бифуркации, показаны на рис. 3, где сплошными и пунктирными линиями отмечены ветви устойчивых и неустойчивых состояний. На рис.4–5 показаны кривые уровней полной потенциальной энергии механической системы для двух значений множителя нагрузки ( $\Lambda = 4,748$ ,  $\Lambda = 4,77$ ).

Производные критических множителей нагрузки по варьируемому параметру равны

$$\frac{d\Lambda_1^c}{dX} = \frac{1}{2}, \quad \frac{d\Lambda_2^c}{dX} = \frac{2m}{3}. \quad (60)$$

Если в (57) положить  $m = 3/4$ , тогда производные критических множителей нагрузки равны и двукратная точка бифуркации сохраняется при варьировании параметра  $X$ . При  $X = 0,1$  и  $m = 0,5$  двукратная точка бифуркации расщепляется на две простые точки бифуркации, рис. 3.

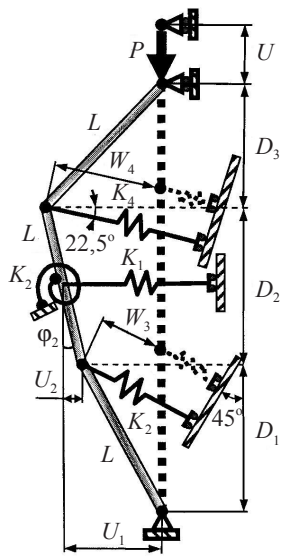


Рис. 2

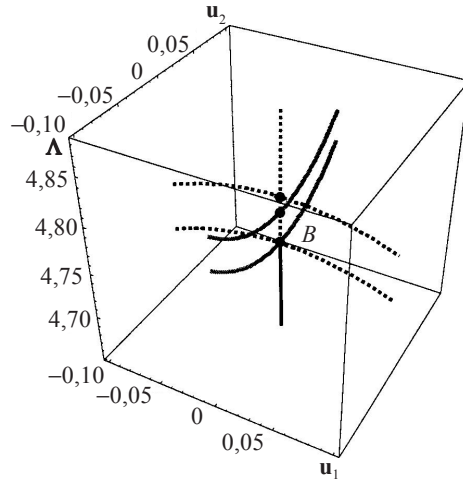


Рис. 3

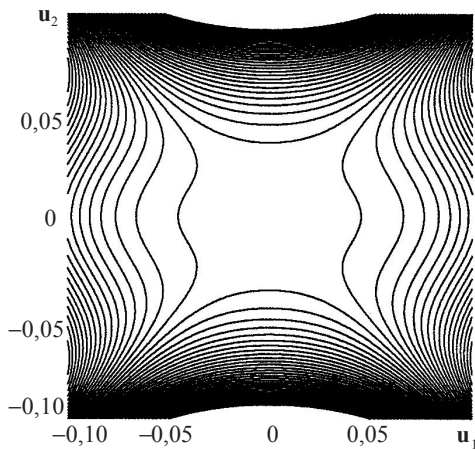


Рис. 4

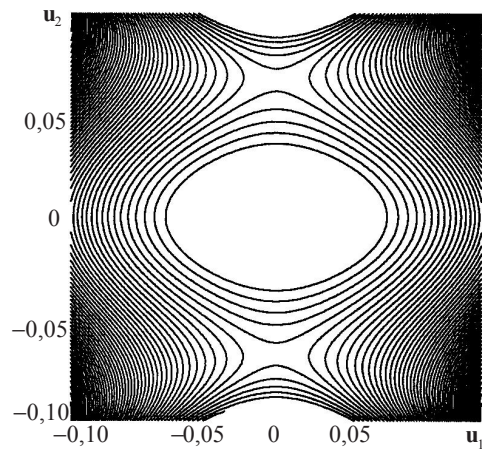


Рис. 5

**Пример 2.** На рис. 6 изображена ферма с двумя степенями свободы ( $u_{z_1}, u_{z_2} = u_{z_3}$ ), состоящая из четырех стержней. В узлах 2 и 3 прикладываются сосредоточенные вертикальные силы. Модуль упругости  $E = 7028 \text{ кГ/мм}^2$ , площади стержней  $A_1 = A_2 = 120 \text{ мм}^2$  и  $A_3 = A_4 = 120 + mX$ , где  $m$  – подбираемый скалярный параметр,  $X$  – варьируемый параметр,  $S = 2H$ ,  $H = 110 \text{ мм}$ .

Две двукратные предельные точки появляются, когда варьируемый параметр  $X = 0$  ( $\Lambda_1^c = \Lambda_2^c = 162305$ , рис. 7, 8). На рис. 8 или на виде сверху (рис. 7) показаны равновесные кривые, исходящие из двукратных предельных точек  $L_1$  и  $L_2$ . При варьировании параметра  $X$  ( $X = 10 \text{ мм}$ ) двукратные предельные точки исчезают, рис. 9.

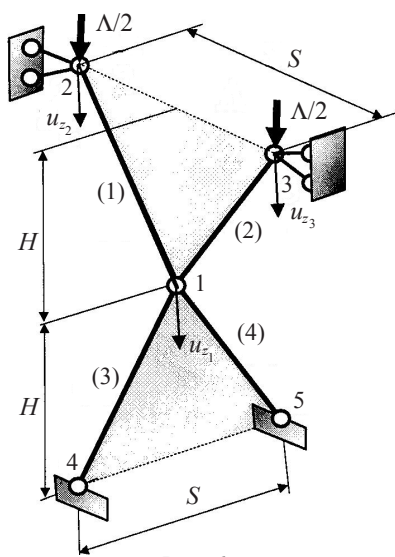


Рис. 6

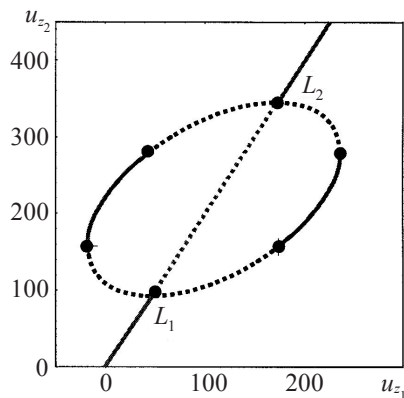


Рис. 7

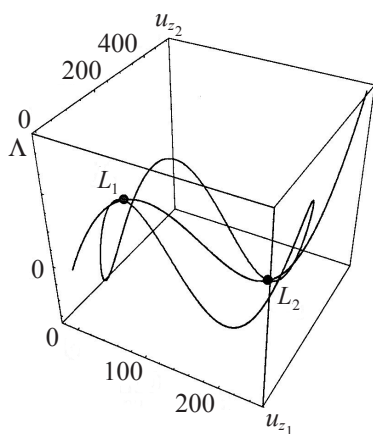


Рис. 8

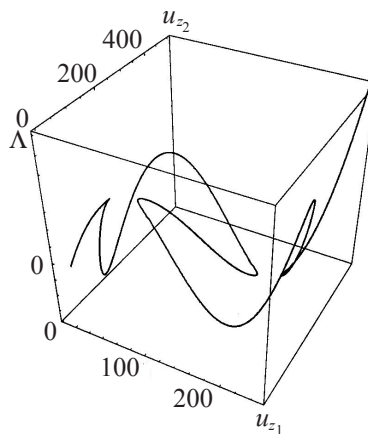


Рис. 9

### Заключение

Дифференциальное уравнение второго порядка дает возможность установить количество исходящих равновесных кривых из кратных предельных точек и кратных точек бифуркации и исследовать их устойчивость с помощью записанного выражения для приращения полной потенциальной энергии. Производные кратной критической нагрузки и нелинейных перемещений выводятся с использованием прямого метода.

### Литература

1. Сергеев, О.А. Оптимизация геометрически нелинейных пространственных рам с учетом ограничений по прочности и общей устойчивости / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2001. – Вып. 63. – С. 111–118.

2. *Sergeev, O.A.* Анализ чувствительности и оптимальное проектирование геометрически нелинейных рам с учетом общей потери устойчивости / О.А. Сергеев, С.А. Сергеева, В.Г. Киселев // Вестник ННГУ. Серия Механика / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2002. – Вып. 1(4). – С. 161–175.

3. *Sergeyev, O.A.* Optimization of 3D frame structures for stress and overall stability constraints / O.A. Sergeyev, S.A. Sergeyeva, V.G. Kiselev // Proceedings of the 4-th world congress of structural and multidisciplinary optimization. – Dalian, China. – 2001. – P. 79–80.

4. *Bojczuk, D.* Non-linear sensitivity analysis of discrete structures / D. Bojczuk, Z. Mróz // Foundations of civil and environmental engineering. – 2002. – 1. – P. 19–41.

5. *Mróz, Z.* Sensitivity analysis and optimal design of nonlinear structures / Z. Mróz, J. Piekarski // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1998. – 42. – P. 1231–1262.

6. *Sergeev, O.A.* Анализ закритического поведения геометрически нелинейных упругих пространственных рам / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев // Вестник ННГУ. Серия Механика / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2004. – Вып. 1(6). – С. 177–190.

[24.03.2006]

#### **NONLINEAR ANALYSIS OF STABILITY OF EQUILIBRIUM PATHS AND SENSITIVITY ANALYSIS AT MULTIPLE CRITICAL POINTS**

**O.A. Sergeyev, V.G. Kiselev**

The sensitivity analysis of multiple buckling load, multiple buckling modes and nonlinear displacements is applied. The direct approach is used for the analytical sensitivity analysis. Examples of geometrically nonlinear structures exhibiting bimodal bifurcation points and a bimodal limit point are provided.