

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-483-492

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НАГРУЗОК С УЧЕТОМ ПЬЕЗОЭФФЕКТА

© 2020 г.

Фирсанов Вал.В.<sup>1</sup>, Нгуен Л.Х.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

<sup>2</sup>Вьетнамский государственный технический университет им. Ле Куу Дона, Ханой, Вьетнам

lehung.mai@mail.ru

Поступила в редакцию 19.11.2020

На основе уточненной теории представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта. Искомые перемещения и электрические потенциалы оболочки аппроксимируются полиномами по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории типа Кирхгофа – Лява. При построении теории в качестве уравнений электроупругостного состояния оболочки применяются уравнения теории упругости и законы электростатики. С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях и потенциалах с соответствующими граничными условиями. Тригонометрические ряды Фурье по окружной координате использованы для приведения дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Сформулированная краевая задача электроупругостного состояния оболочки решается операторным методом, основанным на преобразовании Лапласа. Поперечные нормальные и касательные напряжения оболочки определяются прямым интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости. В качестве примера рассматриваются расчеты напряженного состояния цилиндрической пьезооболочки с жестко закрепленными краями. Анализируются два случая: оболочка находится под действием механических нагрузок и электрических потенциалов. Проведено сравнение результатов, полученных по предлагаемой теории, с данными, соответствующими классической теории. Установлено, что вблизи жестко закрепленного края имеет место дополнительное напряженное состояние типа «погранслой», величины которого соизмеримы с напряжениями, определяемыми по классической теории. Это позволило подтвердить практическую ценность разработанной математической модели и существенный вклад в общее напряженно-деформированное состояние при анализе прочности и долговечности цилиндрических оболочек, моделирующих элементы конструкций машиностроения с учетом пьезоэлектрического эффекта.

*Ключевые слова:* цилиндрическая оболочка, уточненная теория, пьезоэлектрический эффект, электроупругостное состояние, вариационный прин-

цип Лагранжа, уравнения трехмерной теории упругости, тригонометрические ряды, краевая задача, преобразование Лапласа, напряжения типа «погранслои».

## **Введение**

В настоящее время пьезоматериалы широко применяются в различных отраслях техники [1]. Например, в авиации пьезоматериалы используются в качестве сенсоров и актюаторов в виде корпусных элементов конструкций на летательных аппаратах (ЛА) [2, 3] для повышения качества аэродинамики и эффективного управления их деформациями. Основными расчетными схемами указанных элементов конструкций являются тонкие пластинки и оболочки, находящиеся под действием различных нагрузок. Расчетам тонких пластинок, оболочек (цилиндрических, сферических, конических) постоянной и переменной толщины посвящено много публикаций, в том числе [4–6], в которых не учитывается влияние пьезоэлектрического эффекта в краевой зоне на их напряженно-деформированное состояние (НДС). В настоящей статье рассматривается электроупругостное состояние анизотропных цилиндрических оболочек из smart-материалов, изготовленных с использованием пьезоэлектриков, под действием произвольных нагрузок.

В монографиях Партона [7], Улитко [8], Tzou [9], основанных на классической теории типа Кирхгофа – Лява [10, 11], построены краевые задачи теории тонких пластин и оболочек с учетом пьезоэффекта путем совместного решения основных уравнений теории упругости и электростатики Максвелла. В [4, 5, 12] и др. показано, что расчеты по классической теории не дают удовлетворительного соответствия с практикой при исследовании НДС оболочек в узких краевых зонах его искажения (непрерывные соединения, стыки, действие локальных нагрузок и др.) вследствие наличия дополнительных напряжений типа «погранслои». Mindlin [13] и Гольденвейзер [14] развивают теорию учета сдвиговых деформаций. Reddy [15] предложил теории сдвиговых деформаций первых, третьих и высших порядков (FSDT, TSDT и HSDT) для исследования НДС и электромеханического состояния (ЭМС) изотропных и анизотропных материалов с учетом термомеханических нагрузок и магнитоэлектрического эффекта. В [9, 16] представлены численные методы, основанные на методе конечных элементов (МКЭ), и известные программные пакеты, в том числе Ansys, Nastran и др. для моделирования НДС конструкции на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ). В статьях [17–19] используются модификации методов асимптотического интегрирования для решения задач ЭМС пластин и оболочек.

В настоящей статье представлена уточненная математическая модель НДС цилиндрических оболочек под действием произвольных механических и электрических нагрузок с учетом пьезоэффекта, основанная на вариационно-полиномиальном методе [20]. Предлагаемая математическая модель, по сравнению с классической теорией, дает более достоверные результаты, так как позволяет учесть в зоне жестко защемленных краев оболочки НДС типа «погранслои».

### **1. Математическая модель цилиндрической оболочки с учетом пьезоэлектрического эффекта**

Уравнения состояния пьезоматериалов при деформации [7, 8] с учетом сопряженного электрического поля можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [C]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\}, \\ \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} + [\mu]^T \{E\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\sigma = \{\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{z\xi}\}$  – вектор напряжения,  $\varepsilon = \{\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{\xi\theta}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{z\xi}\}$  – вектор деформации,  $C$  – симметричная матрица коэффициентов податливости при постоянном нулевом электрическом поле,  $D = \{D_\xi, D_\theta, D_z\}$  – вектор электрической индукции,  $E = \{E_\xi, E_\theta, E_z\}$  – вектор напряженности электрического поля,  $e$  – матрица пьезоэлектрических постоянных,  $\mu$  – симметричная матрица диэлектрических проницаемостей при нулевой деформации.

Рассматривается цилиндрическая оболочка из пьезоматериала длиной  $L$ , толщиной  $2h$  и радиусом  $R$  (рис. 1). Оболочка находится под действием внешних механических нагрузок  $q_{i3} = q_{i3}^\pm(\xi, \theta)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , на поверхности  $S_q$  и электрических произвольных потенциалов  $\varphi_i = \varphi^\pm(\xi, \theta)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , на боковых поверхностях  $S_\varphi$  оболочки ( $z = \pm h$ ).

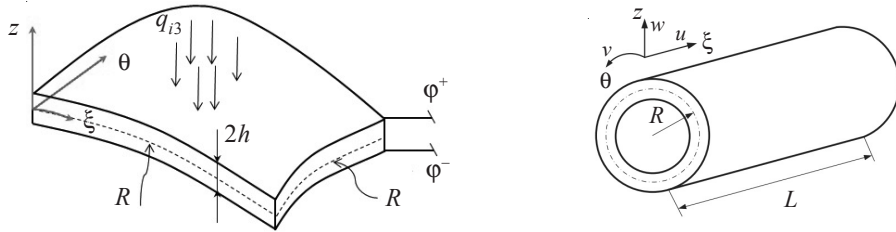


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

В соответствии с [4, 5] перемещения цилиндрических оболочек представляются в виде:

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + \sum_{n=1}^3 u_n(\xi, \theta) \frac{z^n}{n!}, \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + \sum_{n=1}^3 v_n(\xi, \theta) \frac{z^n}{n!}, \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + \sum_{n=1}^2 w_n(\xi, \theta) \frac{z^n}{n!}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для компонент деформации оболочки справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R+z} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \varepsilon_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\xi z} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для описания электромеханического состояния оболочки с учетом пьезоэффекта [9] используется энтальпия

$$H = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T \{e\}^T \{E\} - \frac{1}{2} \{E\}^T [e] \{E\}. \quad (4)$$

Компоненты ЭМС оболочки выражаются через энтальпию по формулам

$$\sigma = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}, \quad D = \frac{\partial H}{\partial E}. \quad (5)$$

Из уравнений электростатики Максвелла следует, что вектор напряженности  $E$  может быть выражен через потенциал  $\varphi$ :

$$E_\xi = -\frac{\partial \varphi}{A_1 \partial \xi}, \quad E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{A_2 \partial \theta}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (6)$$

где  $A_1 = R$ ,  $A_2 = 1 + z/R$  – параметры Ламе цилиндрической оболочки.

Электрический потенциал можно представить в виде полинома по координате  $z$ :

$$\varphi(\xi, \theta, z) = \varphi_0(\xi, \theta) + \varphi_1(\xi, \theta)z + \varphi_2(\xi, \theta)z^2, \quad (7)$$

$$\varphi_1 = \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2h}, \quad \varphi_2 = -\frac{\varphi_0}{h^2} + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2h^2}, \quad (8)$$

где  $\varphi^+$  – электрический потенциал на верхней, а  $\varphi^-$  – на нижней поверхности оболочки.

Для получения основных уравнений теории цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта используем вариационный принцип Лагранжа [21] в виде

$$\delta U - \delta A = \left( \int_V (\sigma \delta \varepsilon + D \delta E) dV \right) - \left( \int_{S_q} (q_{i3} (\delta u_i + \delta v_i + \delta w_i)) dS + \int_{S_\varphi} Q \delta \varphi dS \right) = 0. \quad (9)$$

Подставляя аппроксимации (2) в равенства (3) и (1), а затем внося полученные выражения в (9), после математических преобразований получим систему уравнений равновесия теории цилиндрических оболочек в перемещениях и потенциалах с учетом пьезоэлектрического эффекта:

$$\begin{aligned} & \left( Ki_{d2\xi}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{d2\theta}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki_{d1\xi}^\varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 \left( Ki_{d2\xi}^{uj} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{d2\theta}^{uj} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki^{uj} \right) u_j + \\ & + \sum_{j=0}^3 Ki_{d2\xi 0}^{vj} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_j + \sum_{j=0}^2 Ki_{d1\xi}^{wj} \frac{\partial}{\partial \xi} w_j + (k_i^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_i^{q_{13}^-} q_{13}^-) = 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \\ & \left( Ki_{d2\xi 0}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} + Ki_{d1\theta}^\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_j + \sum_{j=0}^3 \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{d2\theta}^{vj} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki^{vj} \right) v_j + \\ & + \sum_{j=0}^2 Ki_{d1\theta}^{wj} \frac{\partial}{\partial \theta} w_j + (k_i^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_i^{q_{23}^-} q_{23}^-) = 0 \quad (i = \overline{5, 8}), \\ & \left( Ki_{d2\xi}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki^\varphi \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 Ki_{d1\xi}^{uj} \frac{\partial}{\partial \xi} u_j + \sum_{j=0}^2 \left( Ki_{d2\xi}^{wj} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{d2\theta}^{wj} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + Ki^{wj} \right) w_j + \\ & + \sum_{j=0}^3 Ki_{d1\theta}^{vj} \frac{\partial}{\partial \theta} v_j + (k_i^{q_{33}^+} q_{33}^+ + k_i^{q_{33}^-} q_{33}^-) + (Ki^+ \varphi^+ + Ki^- \varphi^-) = 0 \quad (i = \overline{9, 11}), \\ & \left( Ki_{d2\xi}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + Ki_{d1\theta}^\varphi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K^\varphi \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 Ki_{d1\xi}^{uj} \frac{\partial}{\partial \xi} u_j + \sum_{j=1}^3 Ki_{d1\theta}^{vj} \frac{\partial}{\partial \theta} v_j + \sum_{j=0}^2 K^{wj} \frac{\partial}{\partial \theta} w_j + \end{aligned}$$

$$+(K^+ \varphi^+ + K^- \varphi^-) = 0. \quad (10)$$

В уравнениях (10) через  $Ki$  с верхними и нижними индексами обозначены коэффициенты, зависящие от геометрических параметров, упругих и пьезоэлектрических свойств материала оболочки, которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Граничные условия на жестко зашпеленных краях цилиндрических оболочек принимаются в виде

$$u_i = v_i = w_i = 0, \quad \varphi_0 = 0 \quad (i = \overline{1, 3}). \quad (11)$$

## 2. Решение сформулированной краевой задачи

Решение краевой задачи (10) и (11) осуществляется приведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого используются разложения перемещений, электрических потенциалов и внешних электромеханических нагрузок, действующих на оболочку, в тригонометрические ряды по окружной координате  $\theta$  следующего вида:

$$\begin{aligned} q_{i3}^\pm(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_{i3m}^\pm(\xi) \cos m\theta + Q_{i30}^\pm(\xi), \quad i = \overline{1, 3}, \\ \varphi^\pm &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m^\pm(\xi) \cos m\theta + \varphi_0^\pm(\xi), \\ u_i(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_i(\xi) \cos m\theta + U_{i0}(\xi), \quad i = \overline{0, 3}, \\ v_i(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} V_i(\xi) \sin m\theta + V_{i0}(\xi), \quad i = \overline{0, 3}, \\ w_j(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_j(\xi) \cos m\theta + W_{j0}(\xi), \quad j = \overline{0, 2}, \\ \varphi_0(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{0m}(\xi) \cos m\theta + \varphi_{00}(\xi). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и (11), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующие граничные условия в перемещениях и потенциалах.

С помощью преобразования Лапласа приведем краевую задачу к линейным алгебраическим уравнениям. Решая эту систему, получим искомые перемещения и потенциал. Деформации оболочки определяются геометрическими соотношениями (3), тангенциальные напряжения находятся из обобщенного закона электроупругости (1). Поперечные напряжения получаются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

## 3. Пример расчета

Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка, жестко зашпеленная по торцам, из пьезоматериала «Поливинилиденфторид» (PVDF) со следующими параметрами: радиус  $R = 1$  м, длина  $L = 4R$ , полутолщина  $h = R/100$ .

Электромеханические характеристики оболочки в соответствии с [22]: модуль Юнга  $E_{Ю} = 2,0$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\eta = 0,33$ . Электрические константы:  $e_1 = -30,0 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н;  $e_2 = 23,0 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н;  $e_3 = 3,0 \cdot 10^{-12}$  Кл/Н;  $e_4 = e_5 = 0$ . Диэлектрические проницаемости:  $\mu_1 = 0,3142 \cdot 10^{-10}$  Ф/м;  $\mu_2 = 0,3078 \cdot 10^{-10}$  Ф/м;  $\mu_3 = 0,3078 \cdot 10^{-10}$  Ф/м. Результаты расчета напряженного состояния оболочки показаны на рис. 2–5. Здесь Class и NonCls обозначают результаты расчетов по классической теории и по предлагаемой уточненной теории.

В качестве первого примера рассмотрим оболочку, находящуюся под действием распределенной механической нагрузки на верхней поверхности по закону  $q_{33}^+(\xi, \theta) = Q_0(\xi) \cos 5\theta$ ,  $Q_0 = \text{const}$ . Графики нормальных и касательных напряжений показаны на рис. 2а (распределение по длине в срединной поверхности оболочки) и рис. 2б (распределение по толщине в краевой зоне оболочки).

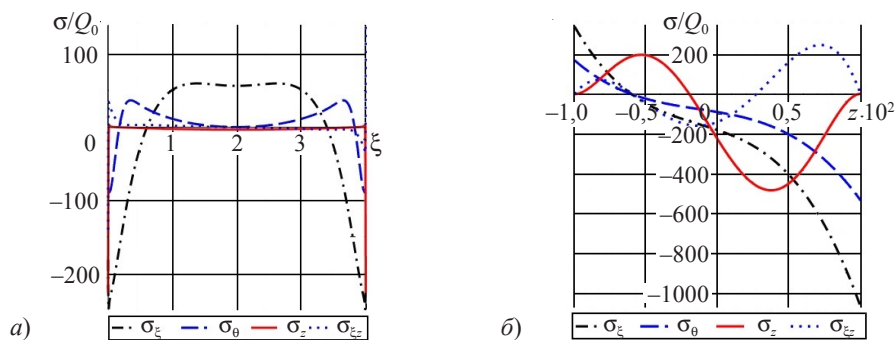


Рис. 2. Графики нормальных и касательных напряжений

Анализ полученных результатов распределения напряжений по длине и по толщине в краевой зоне оболочки показывает, что при незначительном удалении от ее края поперечное нормальное напряжение  $\sigma_z$ , как и следовало ожидать в соответствии с классической теорией, практически равно нулю (рис. 2а) и им можно пренебречь. Но вблизи жестко защемленных краев (рис. 2б) поперечное напряжение  $\sigma_z$  составляет 46% от максимальных нормальных напряжений  $\sigma_{xi}$ .

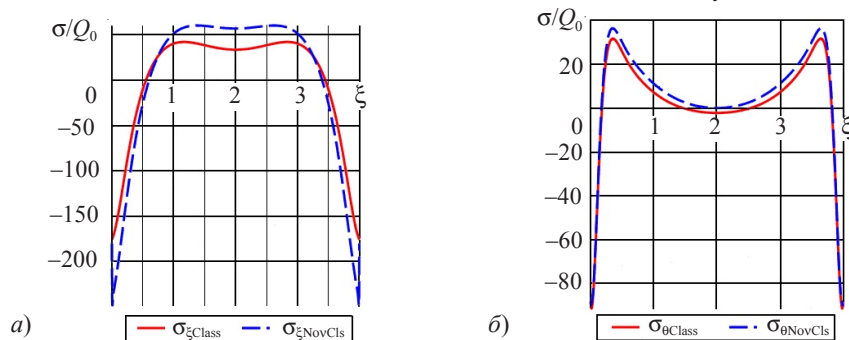


Рис. 3. Сравнение результатов расчета нормальных напряжений по уточненной и классической теориям при действии механической нагрузки в срединной поверхности

В качестве второго примера рассмотрим оболочку, находящуюся под действием по закону  $\varphi^+(\xi, \theta) = V_0(\xi) \cos 5\theta$ ,  $V_0 = \text{const}$ , электрического потенциала на верхней поверхности. На рис. 4а показано распределение по длине в срединной поверхности оболочки, а на рис. 4б – распределение по толщине в краевой зоне оболочки.

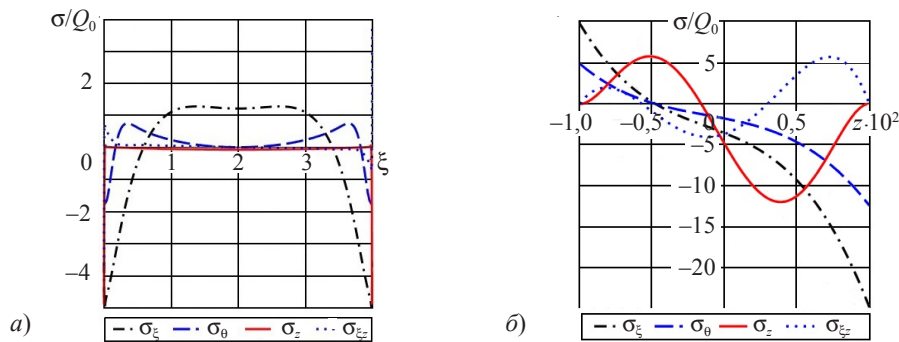


Рис. 4. Графики нормальных и касательных напряжений

На рис. 5 представлено сравнение результатов расчета при действии электрического потенциала в срединной поверхности.

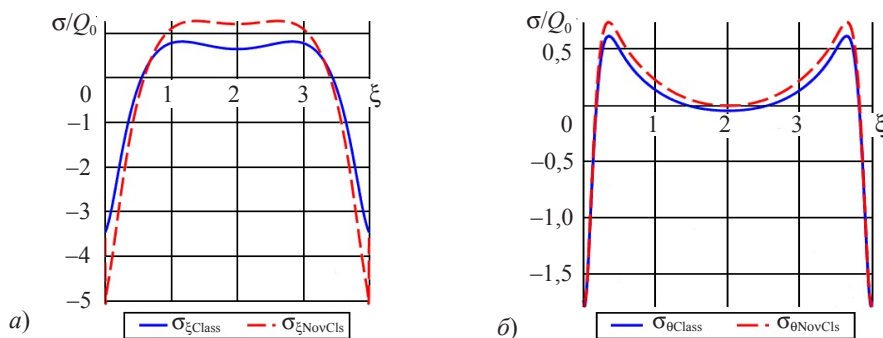


Рис. 5. Сравнение результатов расчета нормальных напряжений по уточненной и классической теориям при действии электрического потенциала

В этом примере, по аналогии с предыдущим (см. рис. 2, 3), поперечное нормальное напряжение  $\sigma_z$  на жестко заземленных краях оболочки (см. рис. 4б), которым в классической теории пренебрегают, составляет примерно 50% от максимальных нормальных напряжений  $\sigma_\xi$  и при удалении от краевых зон на расстояние порядка ее толщины напряжения типа «погранслои» затухают и почти равны нулю (см. рис. 4а). Кроме того, распределения основных напряжений  $\sigma_\xi$  и  $\sigma_\theta$  во внутренней области оболочки в статье по обоим вариантам при сравнении с классической теорией (см. рис. 3а,б и рис. 5а,б) практически совпадают, что подтверждает достоверность полученных результатов.

### Заключение

На основании уточненной теории построена математическая модель НДС цилиндрической оболочки, находящейся под действием произвольной нагрузки с учетом пьезоэлектрического эффекта.

Приведены примеры расчетов напряженного состояния в краевой зоне жестко заземленной цилиндрической оболочки. Проведено сравнение результатов расчета напряженного состояния при использовании указанной модели и классической теории. Установлено, что вблизи жестко заземленного края оболочки имеют место существенные дополнительные напряжения типа «погранслои», особенно в части поперечных нормальных напряжений, которые необходимо учитывать для повы-



шения достоверности расчетов на прочность и долговечность конструкций, содержащих непрерывные соединения.

Список литературы

1. Baker A., Dutton S., Kelly D. *Composite Materials for Aircraft Structures*. Reston, VA, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004. 603 p.
2. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика управляемых конструкций*. М.: Изд-во МАИ, 2007. 326 с.
3. Carrera E., Brischetto S., Nali P. *Plates and Shells for Smart Structures. Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*. John Wiley & Son Ltd, 2011. 352 p. DOI: 10.1002/9781119950004.
4. Doan T.N., Thom D.V., Thanh N.T. et al. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory. *Composite Structures*. 2020. Vol. 232. Article 111526. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111526.
5. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки под действием произвольной нагрузки на основе неклассической теории. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №3. С. 359–368. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-3-359-368.
6. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. 2015. Vol. 6. Iss. 2. P. 135–166. DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v6.i2.40.
7. Паргон В.З., Кудрявцев Б.А. *Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел*. М.: Наука, 1998. 472 с.
8. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. *Электроупругость*. Киев: Наукова думка, 1989. 280 с.
9. Tzou H.S. *Piezoelectric Shells: Distributed Sensing and Control of Continua*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993. 492 p. DOI 10.1007/978-94-011-1783-8.
10. Friedrichs K.O. Kirchoffs boundary conditions and the edge effect for elastic plates. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. 1950. Vol. 3. P. 258. P. 117–124. DOI: <https://doi.org/10.1090/psapm/003>.
11. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. М.: Наука, 1966. 636 с.
12. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин*. М.: Наука, 1967. 268 с.
13. Mindlin R.D., Yang J. *An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates*. New Jersey–London–Singapore: World Scientific Publishing, 2006. 212 p.
14. Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек*. М.: Наука, 1976. 512 с.
15. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton–London–New York–Washington D.C.: CRC Press, 2004. 831 p.
16. Benjeddou A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Computers and Structures*. 2000. Vol. 76. No 1–3. P. 347–363. DOI: 10.1016/S0045-7949(99)00151-0.
17. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Асимптотический анализ электроупругого состояния тонкого пьезоэлектрического слоя. *Прикладная механика*. 1978. Т. 14. №5. С. 3–8.
18. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27. №4. С. 593–608.
19. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Gevorgyan R.S. Asymptotic solution of the electroelasticity problem for thickness-polarized piezoceramic shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2015. Vol. 79. Iss. 3. P. 293–303. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2015.09.009.
20. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек. *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1990. №6. С. 139–146.
21. Власов В.З. *Избранные труды. Общая теория оболочек*. М.: АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.



22. Kapuria S., Sengupta S., Dumir P.C. Three-dimensional solution for simply-supported piezoelectric cylindrical shell for axisymmetric load. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1997. Vol. 140. Iss. 1-2. P. 139–155. DOI: 10.1016/S0045-7825(96)01075-4.

#### References

1. Baker A., Dutton S., Kelly D. *Composite Materials for Aircraft Structures*. Reston, VA, USA. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 2004. 603 p.
2. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Dinamika upravlyaemykh konstruksiy [Dynamics of Controlled Structures]*. Moscow. MAI Publ. 2007. 326 p. (In Russian).
3. Carrera E., Brischetto S., Nali P. *Plates and Shells for Smart Structures. Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*. John Wiley & Son Ltd. 2011. 352 p. DOI: 10.1002/9781119950004.
4. Doan T.N., Thom D.V., Thanh N.T. et al. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory. *Compos. Struct.* 2020. Vol. 232. Article 111526. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111526.
5. Firsanov V.V., Pham V.T. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie sfericheskoy obolochki pod deystviem proizvolnoy nagruzki na osnove neklassicheskoy teorii [Stress-strain state of the spherical shell exposed to an arbitrary load based on a non-classical theory]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 3. P. 359–368. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-3-359-368 (In Russian).
6. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. 2015. Vol. 6. Iss. 2. P. 135–166. DOI: 10.1615/CompMechComputApplIntJ.v6.i2.40.
7. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Elektromagnitoupругost pyezonelektricheskikh i elektroprovodnykh tel [Electromagnetoelasticity of Piezoelectric and Electrically Conductive Bodies]*. Moscow. Nauka Publ. 1998. 470 p. (In Russian).
8. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shulga N.A. *Elektrouprugost [Electroelasticity]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1989. 280 p. (In Russian).
9. Tzou H.S. *Piezoelectric Shells: Distributed Sensing and Control of Continua*. Dordrecht. Springer Netherlands. 1993. 492 p. DOI 10.1007/978-94-011-1783-8.
10. Friedrichs K.O. Kirchoffs boundary conditions and the edge effect for elastic plates. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. 1950. Vol. 3. P. 258. P. 117–124. DOI: <https://doi.org/10.1090/psapm/003>.
11. Timoshenko S, Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York. Toronto. London. McGrawHill Book Company. 1959. 580p .
12. Hambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin [Theory of Anisotropic Plates]*. Moscow. Nauka Publ. 1967. 268 p. (In Russian).
13. Mindlin R.D., Yang J. *An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates*. New Jersey. London. Singapore. World Scientific Publishing. 2006. 212 p.
14. Gol'denveizer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [Theory of Elastic Thin Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1976. 512 p. (In Russian).
15. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton. London. New York. Washington D.C. CRC Press. 2004. 831 p.
16. Benjeddou A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements: a survey. *Computers and Structures*. 2000. Vol. 76. No 1–3. P. 347–363. DOI: 10.1016/S0045-7949(99)00151-0.
17. Kosmodamiansky A.S., Lozhkin V.N. Asimptoticheskiy analiz elektrouprugogo sostoyaniya tonkogo pyezonelektricheskogo sloya [Asymptotic analysis of the electroelastic state of a thin piezoelectric layer]. *Prikladnaya mekhanika [Appl. Mechanics]*. 1978. Vol. 14. No 5. P. 3–8 (In Russian).
18. Gol'denveizer A.L. Postroenie priblizhennoy teorii obolochek pri pomoshchi asimptoticheskogo integrirvaniya uravneniy teorii uprugosti [Construction of an approximate theory of shells using asymptotic integration of equations of the theory of elasticity]. *Prikladnaya matematika i*

*mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1963. Vol. 27. Iss. 4. P. 593–608 (In Russian).

19. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Gevorgyan R.S. Asymptotic solution of the electroelasticity problem for thickness-polarized piezoceramic shells. *J. Appl. Math. Mech.* 2015. Vol. 79. Iss. 3. P. 293–303. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2015.09.009.

20. Vasiliev V.V., Lurie S.A. K probleme utochneniya teorii pologikh obolochek [On the problem of clarifying the theory of gentle shells]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Solid Mechanics]. 1990. No 6. P. 139–146 (In Russian).

21. Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy. Obshchaya teoriya obolochek* [Selected Works. General Theory of Shells]. Moscow. USSR Academy of Sciences Publ. Vol. 1. 1962. 528 p. (In Russian).

22. Kapuria S., Sengupta S., Dumir P.C. Three-dimensional solution for simply-supported piezoelectric cylindrical shell for axisymmetric load. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1997. Vol. 140. Iss. 1-2. P. 139–155. DOI: 10.1016/S0045-7825(96)01075-4.

## **STRESSED STATE IN EDGE ZONE OF CYLINDRICAL SHELLS BASED ON A NON-CLASSIC THEORY WITH THE PIEZOELECTRIC EFFECT**

**Firsanov Val.V.<sup>1</sup>, Nguyen L.H.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam*

Based on the refined theory in this paper presents the stress-strain state of cylindrical shells taking into account the piezoelectric effect. The mechanical displacements and electrical potentials of the shell are approximated by polynomials in the normal coordinate two degrees higher in relation to the classical theory of the Kirchhoff-Love type. The equations of the theory of elasticity and the laws of electrostatics are used to obtain model of electroelasticity behavior. By using Lagrange variational principle a system of differential equations of equilibrium in displacements and potentials with boundary conditions is derived. Trigonometric Fourier series in the circumferential coordinate is used to reduce partial differential equations system to ordinary differential equations. The formulated boundary value problem of the electroelastic state of the shell is solved by an operator method based on the Laplace transform. Transverse normal and tangential stresses of the linear equilibrium equation of the three-dimensional theory of elasticity.

Examples of calculating the stress state of a cylindrical piezoelectric shell with clamped support are provided. Two cases are analyzed: the shell is under the influence of mechanical loads and electrical potentials. A comparison of the results obtained according to the proposed theory and the classical theory is carried out. It has been established that there is an additional stress state of the "boundary layer" type. It allows to confirm the practical value of the developed mathematical model and a significant contribution to the general stress-strain state with the strength and durability of cylindrical shells modeled elements of mechanical engineering structures taking into account the piezoelectric effect.

*Keywords:* cylindrical shell, variational Lagrange principle, piezoelectric effect, electromechanical state, non-classical theory, edge zone, stress of the "boundary layer" type, electroelasticity.