

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-428-441

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА  
ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДРЕВЕСИНЫ  
ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ\***

© 2020 г.

**Беженцева М.В.<sup>1</sup>, Вуцин Л.И.<sup>1</sup>,  
Кибец А.И.<sup>1</sup>, Крушка Л.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*  
<sup>2</sup>*Военный технологический университет, Варшава, Польша*

kibec@mech.unn.ru

*Поступила в редакцию 29.09.2020*

Рассматривается пространственная задача деформирования древесины при ударном нагружении. Определяющая система уравнений формулируется в переменных Лагранжа. Приведена определяющая система уравнений в трехмерной постановке. Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей работы. Древесина моделируется как однонаправленно армированный материал с описанием нисходящей ветви диаграммы деформирования. Деформации и напряжения определяются в локальном базисе, положение которого в пространстве связано с направлением волокон древесины. Материал древесины представляется в виде совокупности армирующих волокон и матрицы, упругопластическое деформирование которых описывается соотношениями теории течения с комбинированным кинематическим и изотропным упрочнением. Деформационные характеристики матрицы и волокон определяются на основе расчетно-экспериментального исследования механических свойств древесины вдоль и поперек волокон. При численном моделировании применяется моментная схема метода конечных элементов и явная схема интегрирования по времени типа «крест». Дискретизация расчетной области основана на восьмиузловом изопараметрическом конечном элементе, адаптированном к специфике рассматриваемой задачи. Осуществлена программная реализация разработанных математической модели и численной методики в рамках вычислительного комплекса «Динамика-3». Выполнено компьютерное моделирование сжатия экспериментального образца ели вдоль и поперек волокон. Достоверность результатов расчетов подтверждается хорошим соответствием экспериментальным данным.

*Ключевые слова:* древесина, пластические деформации, анизотропия, метод конечных элементов.

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №20-08-00455\_a).

## Введение

Благодаря своим деформационным и прочностным свойствам, древесина широко используется в качестве амортизатора в противоударных конструкциях [1–4]. Для достоверного анализа прочности и герметичности конструкций с демпфирующими элементами из древесины необходимо развитие математической модели, методики численного решения и программного обеспечения исследования упруго-пластического деформирования древесины при ударных воздействиях и оснащение их деформационными и прочностными параметрами, полученными на основе расчетно-экспериментального подхода.

В публикациях [5–14] представлены некоторые варианты постановок и методов решения рассматриваемого класса задач. Результаты экспериментальных исследований деформирования древесины приведены в [15–26]. Результаты теоретических и экспериментальных исследований изложены в [27–30].

Настоящая статья посвящена развитию и обоснованию математической модели, методики конечно-элементного решения, алгоритма и программных модулей исследования деформирования конструктивных элементов из древесины при динамическом нагружении с учетом закритической стадии, которая реализуется вследствие развития повреждений и характеризуется ниспадающим участком диаграммы «нагрузка–удлинение». Эта особенность является принципиально важной с точки зрения прогнозирования условий разрушения. Описание полной диаграммы упруго-пластического деформирования представляет собой сложную и малоизученную проблему.

### 1. Система уравнений, определяющая динамическое деформирование древесины, и метод ее решения

Введем следующие обозначения:  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$  – расчетная область;  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$  – ее граничная поверхность, на которой может действовать распределенная нагрузка или задана скорость перемещения;  $X = [X_1 \ X_2 \ X_3]^T$  – неподвижная система ортогональных координат;  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$  – локальный ортогональный базис  $n_{ij}$ :  $x_i = n_{ij} X_j$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$  (по повторяющимся индексам ведется суммирование);  $U = [U_1 \ U_2 \ U_3]^T$  и  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$  – перемещения в общей  $X$  и подвижной  $x$  системах координат;  $P = [P_1 \ P_2 \ P_3]^T$  – распределенная нагрузка;  $\Gamma_p$  – зоны приложения  $P$ ;  $\varepsilon = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{21}]^T$  и  $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{21}]^T$  – тензоры деформаций и напряжений в локальном базисе;  $\varepsilon^v, \sigma^v, \varepsilon', \sigma', \varepsilon'^e, \varepsilon'^p$  – шаровые, девиаторные упругие и пластические составляющие деформаций напряжений,  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  – скорость деформаций в общем базисе. Точка над переменной – частная производная по времени,  $T$  – операция транспонирования, индекс после запятой – частная производная по соответствующей пространственной переменной, по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Определяющая система уравнений в переменных Лагранжа имеет вид [31–33]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = n_{im} n_{jk} \dot{\varepsilon}_{mk}, \quad (1)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i}}{2} \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad X_i = X_i|_{t=0} + \int_0^t \dot{U}_i dt, \quad (2)$$

$$\dot{\sigma}^V = -3K\dot{\epsilon}^V, \quad \dot{\epsilon}^V = \frac{\dot{\epsilon}'_{11} + \dot{\epsilon}'_{22} + \dot{\epsilon}'_{33}}{3}, \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}'_{ij}{}^e + \dot{\epsilon}'_{ij}{}^p, \quad \dot{\epsilon}'_{11}{}^p + \dot{\epsilon}'_{22}{}^p + \dot{\epsilon}'_{33}{}^p = 0, \quad (4)$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{\epsilon}'_{ij}{}^e, \quad \dot{\epsilon}'_{ij}{}^p = \lambda S_{ij},$$

$$S_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}, \quad \dot{\rho}_{ij} = g_1 \dot{\epsilon}'_{ij}{}^p - g_2(\mathbf{x}) \rho_{ij} \dot{\mathbf{x}}, \quad (5)$$

$$S_{ij} S_{ij} \leq \frac{2}{3} \sigma_T^2, \quad \sigma_T = \sigma_T(\mathbf{x}, I_{2\epsilon}), \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt, \quad \mathbf{x} = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\epsilon}'_{ij}{}^p \dot{\epsilon}'_{ij}{}^p} dt,$$

$$\int_{\Omega} [(1-\beta)\sigma_{ij}^m + \beta\sigma_{ij}^a] \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma_p} P_i \delta \dot{U}_i d\gamma \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (6)$$

Здесь  $K$  – коэффициент объемного сжатия;  $G$  – модуль сдвига;  $S_{ij}$  – компоненты тензора активных напряжений;  $\rho_{ij}$  – тензор микронапряжений, определяющий координаты центра поверхности текучести;  $g_1 = \text{const}$  и  $g_2 = g_2(\mathbf{x})$  – модули кинематического упрочнения;  $\mathbf{x}$  – параметр Одвииста. Параметр  $\lambda$  тождественно равен нулю при упругом деформировании и определяется при упругопластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки.

Древесина рассматривается в виде совокупности изотропных материалов (матрицы и волокон), которые работают совместно. Волокна учитывают только продольные усилия растяжения-сжатия. В (6)  $\sigma_{ij}^m, \sigma_{ij}^a$  – напряжения в матрице и в волокнах древесины,  $0 < \beta < 1$  – отношение объемов матрицы и волокон. Компоненты тензоров  $\sigma_{ij}^m, \sigma_{ij}^a$  определяются из соотношений теории течения (3)–(5). Определение деформационных характеристик матрицы, волокон и параметра  $\beta$  осуществляется по результатам экспериментальных исследований механических свойств древесины в направлении анизотропии и в плоскости, перпендикулярной ему.

Для решения определяющей системы уравнений (1)–(6) при заданных граничных условиях применяется моментная схема метода конечных элементов [32, 34–38]. Для дискретизации расчетной области используются 8-узловые конечные элементы (КЭ). В узлах сетки определяются перемещения  $U$ , скорости  $\dot{U}$  и ускорения  $\ddot{U}$  в общей системе координат  $X$ . В каждом элементе вводится локальный прямоугольный базис  $x$ , отслеживающий его вращение как жесткого целого пошаговым пересчетом направляющих косинусов его осей.

Конечный элемент отображается на куб  $-1 \leq \xi_i \leq 1$  ( $i = \overline{1, 3}$ ):

$$x_i = \sum_{k=1}^8 x_i^k N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad N_k = \frac{(1 + \xi_1/\xi_1^k)(1 + \xi_2/\xi_2^k)(1 + \xi_3/\xi_3^k)}{8}, \quad (7)$$

где  $x_i^k, \xi_i^k$  – координаты узлов в базисах  $\{x\}, \{\xi\}$ .

Для компонент скорости перемещений узлов внутри конечного элемента применяется полилинейная аппроксимация

$$\dot{u}_i = \sum_{k=1}^8 \dot{u}_i^k N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \quad (8)$$

В соответствии с (8) аппроксимация компонент тензора скорости деформаций осуществляется линейными функциями

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^0 + \dot{\varepsilon}_{ij}^1 \xi_1 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \xi_2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^3 \xi_3. \quad (9)$$

В (9)  $[\dot{\varepsilon}_{11}^0, \dot{\varepsilon}_{22}^0, \dot{\varepsilon}_{33}^0, \dot{\varepsilon}_{12}^0, \dot{\varepsilon}_{23}^0, \dot{\varepsilon}_{13}^0] = \dot{\varepsilon}|_{\xi_1=\xi_2=\xi_3=0}$  – безмоментные составляющие компонент скорости деформаций – значения компонент скорости деформаций в центре КЭ ( $\dot{\xi}_{ik}^0 = \text{const}$ );  $[0 \ \dot{\varepsilon}_{22,1} \ \dot{\varepsilon}_{33,1} \ 0 \ \dot{\varepsilon}_{23,1} \ 0]$ ,  $[\dot{\varepsilon}_{11,2} \ 0 \ \dot{\varepsilon}_{33,2} \ 0 \ 0 \ \dot{\varepsilon}_{31,2}]$ ,  $[\dot{\varepsilon}_{11,3} \ \dot{\varepsilon}_{22,3} \ 0 \ \dot{\varepsilon}_{12,3} \ 0 \ 0]$  – моментные составляющие (градиент) скорости деформаций в центре КЭ ( $\dot{\varepsilon}_{ik,l} = \partial \dot{\varepsilon}_{ik} / \partial \xi_l = \text{const}$ ). В  $\dot{\varepsilon}_i$  оставлены только компоненты, соответствующие изгибающим и крутящим моментам в теории оболочек, что позволяет избежать сдвиговое запирание [32, 34].

Мощность виртуальной работы в каждом КЭ выражается через матрицу масс, узловое ускорения и узловые силы, статически эквивалентные напряжениям в матрице и волокнах древесины  $\sigma_{ij}^m, \sigma_{ij}^a$ , а также внешней нагрузке [35–37]. Интегрирование по области  $\Omega$  заменяется суммированием по конечным элементам. В результате получается дискретный аналог уравнений движения (6):

$$[M] \{\ddot{U}\} = \{F\}, \quad (10)$$

где  $[M]$  – диагональная матрица масс;  $\{\ddot{U}\}$ ,  $\{F\}$  – векторы ускорений узлов конечно-элементной сетки (КЭ-сетки) и результирующие узловые силы в общей системе координат. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (10) интегрируется по явной конечно-разностной схеме типа «крест». Шаг интегрирования по времени  $\Delta t_{k+1}$  определяется из условия устойчивости Куранта. Изложенная методика реализована в рамках вычислительной системы «Динамика-3» [39].

## 2. Результаты численного моделирования

Для верификации математической модели и конечно-элементной методики решения трехмерных нелинейных задач деформирования древесины как упругопластического однонаправленно армированного материала и оснащения их деформационными и прочностными параметрами решена задача о сжатии экспериментального образца  $1 \times 1 \times 2$  см [5] поперек волокон (рис. 1а) и вдоль волокон (рис. 1б). Нижний торец образца опирался на неподвижное недеформированное основание. На верхнем торце задавалась скорость смещения  $V = 0,1$  м/с.

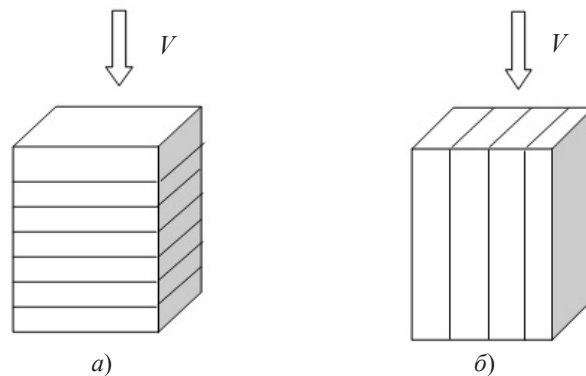


Рис. 1. Схема испытаний на сжатие поперек волокон (а) и вдоль волокон (б)

В [5] древесина рассматривается как ортотропная среда. Математическая модель деформирования древесины основана на текущей лагранжевой формулировке

с применением производной Яумана. Она учитывает связь между анизотропной пластичностью и вязким уплотнением при сжатии перпендикулярно волокну. Упругопластическое деформирование древесины описывается теорией течения с изотропным упрочнением. Для оценки прочности древесины используются упрощенные критерии отказа, сформулированные в пространстве главных напряжений. Численное решение задачи основано на методе конечных элементов с использованием динамического явного метода интегрирования по времени, реализованного в коммерческом программном обеспечении ABAQUS / Explicit.

Исследуемый образец выполнен из ели, плотность которой  $\rho = 0,445 \text{ г/см}^3$ . Для определения деформационных параметров разработанной математической модели древесины использовались данные, полученные расчетно-экспериментальным методом при испытаниях образцов вдоль и поперек волокон и представленные в [5] в виде модулей упругости  $E_0, E_{90}$  и коэффициентов Пуассона  $\mu_0, \mu_{90}$  вдоль и поперек волокон:  $E_{90} = 17000 \text{ МПа}, E_0 = 135000 \text{ МПа}, \mu_{90} = 0,036, \mu_0 = 0,29$ . По этим значениям итерационным методом снижения расхождения результатов расчетов и эксперимента были определены модули объемного сжатия  $K$  и модули сдвига  $G$  для матрицы и волокон, входящие в (3), (5).

Значение интенсивности напряжений в точках аппроксимации диаграммы деформирования матрицы и волокон древесины задавались в соответствии с диаграммами деформирования из [5], представленными на рис. 2.

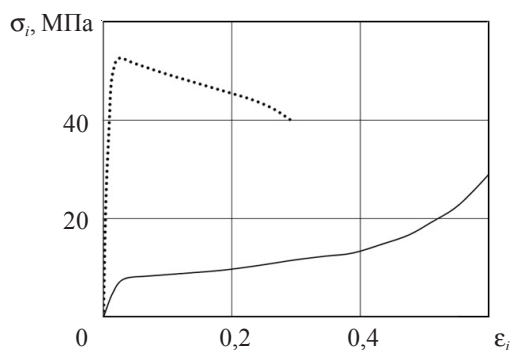


Рис. 2. Экспериментальная диаграмма деформирования образца поперек волокон (сплошная линия) и вдоль волокон (пунктирная линия)

По этим диаграммам для математической модели (1)–(6) расчетно-экспериментальным методом были построены зависимости предела текучести  $\sigma_T$  от параметра Одквиста

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^{'P} \dot{\varepsilon}_{ij}^{'P}} dt$$

для матрицы и волокон ели, которые представлены на рис. 3.

Результаты численного решения первого варианта задачи (образец вырезан поперек волокон) представлены на рис. 4–6. На рис. 4 изображены КЭ-сетки образца на различных стадиях нагружения. На рис. 5 приведены графики зависимости интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$  в центре зоны нагружения. Сплошная линия на рис. 5 соответствует экспериментальным данным [5], пунктирная линия – результат решения задачи на основе разработанной методики, штриховая линия – результаты расчета с применением вычислительной системы ABAQUS [5].

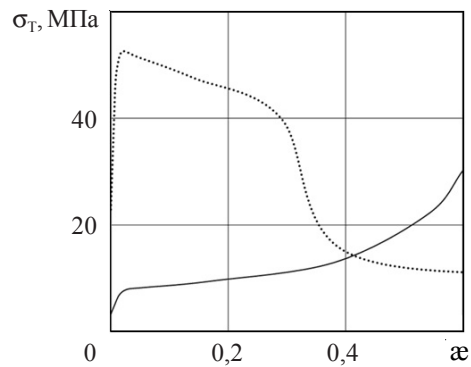


Рис. 3. Зависимость предела текучести матрицы древесины (сплошная линия) и волокон древесины (пунктирная линия) от параметра Одквиста

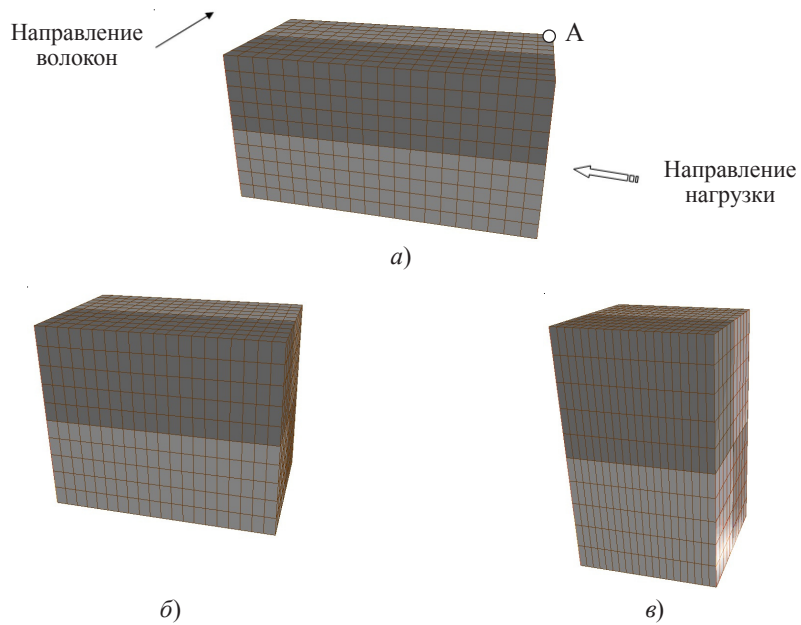


Рис. 4. Изменение КЭ-сетки образца в процессе его нагружения поперек волокон: а) 0 мкс, б) 500 мкс ( $\epsilon_i = 0,273$ ), в) 1000 мкс ( $\epsilon_i = 0,67$ )

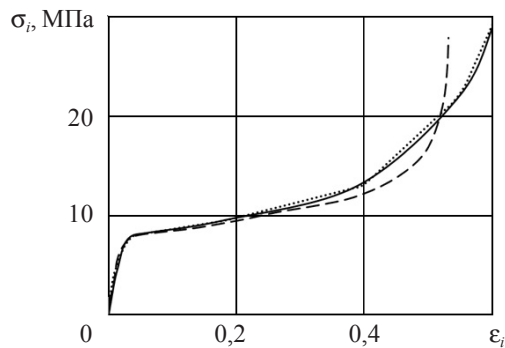


Рис. 5. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в центре зоны нагружения

На рис. 6 изображены графики зависимости от интенсивности деформаций  $\epsilon_i$  смещения в угловой точке нагружаемого торца образца (точка А на рис. 4а). Сплошная линия на рис. 6 – смещение в продольном направлении, штриховая и пунктирные линии – смещения в плоскости поперечного сечения ортогонально волокнам и вдоль волокон соответственно.

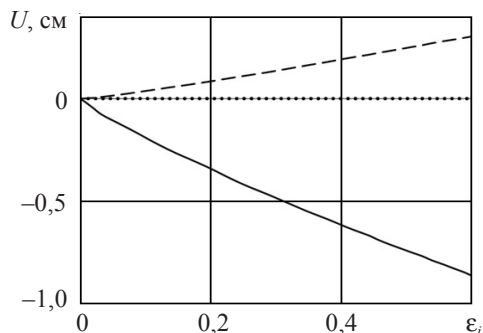


Рис. 6. Зависимости продольного и поперечного смещения ортогонально волокнам и поперечного смещения вдоль волокон от интенсивности деформаций в угловой точке А

Из анализа результатов следует, что разработанная вычислительная модель деформирования конструктивных элементов из древесины обеспечивает устойчивость счета и хорошую точность решения (расхождение результатов расчета и эксперимента на рис. 5 не превышает 2%). При сжатии образца ортогонально волокнам изменение его размеров в поперечном сечении происходит непропорционально. Вдоль волокон размеры поперечного сечения образца практически не меняются, а в ортогональном направлении происходит его расширение, что качественно соответствует экспериментальным данным [5]. Результаты расчета с применением КЭ, реализующего в вычислительной системе ABAQUS модель деформирования древесины, расходятся с экспериментальными данными на завершающей стадии.

Результаты численного решения второго варианта задачи (сжатие образца, вырезанного вдоль волокон древесины) приведены на рис. 7–9. На рис. 7 изображена зависимость интенсивности напряжений  $\sigma_i$  от интенсивности деформаций  $\epsilon_i$  в центре зоны нагружения. Сплошная линия на рис. 7 соответствует экспериментальным данным [1], пунктирная линия – расчету с применением разработанной математической модели деформирования древесины.

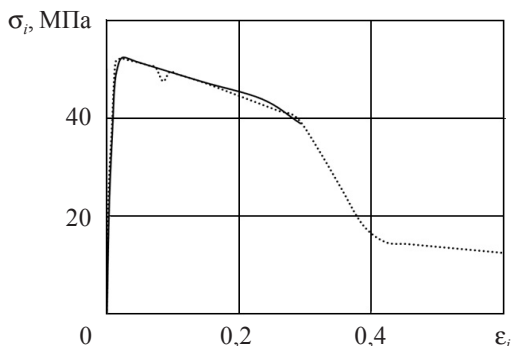


Рис. 7. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций в центре зоны нагружения

На рис. 8 показана расчетная зависимость смещения  $U$  угловой точки А нагружаемого торца образца от интенсивности деформаций  $\epsilon_i$ . На рис. 8 сплошная линия соответствует смещению вдоль волокон, а пунктирная линия – смещению в перпендикулярном направлении. Рисунок 9 иллюстрирует изменение КЭ-сетки образца в процессе нагружения.

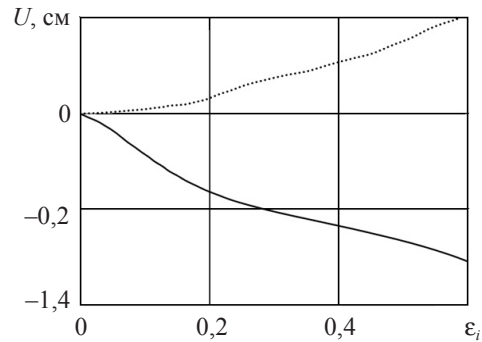


Рис. 8. Зависимость смещения вдоль и поперек волокон от интенсивности деформаций в угловой точке

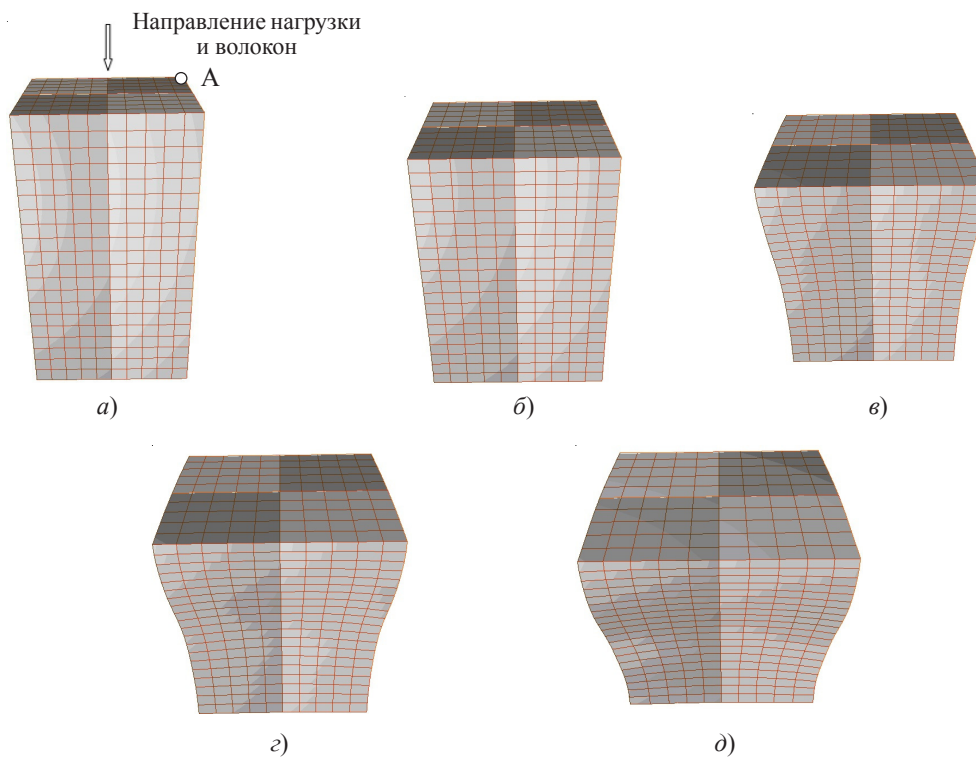


Рис. 9. Изменение КЭ-сетки образца в процессе его нагружения вдоль волокон: а) 0 мкс, б) 400 мкс ( $\epsilon_i = 0,179$ ), в) 600 мкс ( $\epsilon_i = 0,45$ ), г) 700 мкс ( $\epsilon_i = 0,584$ ), д) 900 мкс ( $\epsilon_i = 0,776$ )

Из представленных результатов видно, что интенсивность деформаций во втором варианте задачи значительно превысила предельное значение, с которого начинается нисходящая часть диаграммы деформирования (см. рис. 7). По расчетным данным на нисходящей ветви диаграммы деформирования в зоне нагружения об-



разца происходит расслоение древесины вдоль волокон. В этих условиях разработанная математическая модель деформирования древесины обеспечивает устойчивость численного решения и хорошую точность результатов счета.

### Заключение

Развиты и верифицированы математическая модель, конечно-элементная методика, алгоритм и программные модули решения трехмерной задачи динамического деформирования древесины как упругопластического однонаправленно армированного материала при ударном нагружении. Расчетно-экспериментальным методом определены деформационные параметры. Разработанная математическая модель, методика решения и программный код обеспечивают устойчивость счета и хорошую точность решения (расхождение результатов расчета и эксперимента не превышает 2%).

### Список литературы

1. Johnson W. Historical and present-day references concerning impact on wood. *International Journal of Impact Engineering*. 1986. Vol. 4. Iss. 3. P. 161–174. DOI: 10.1016/0734-743X(86)90003-5.
2. Bragov A.M., Lomunov A.K. Dynamic properties of some wood species. *Journal de Physique IV*. 1997. Vol. 7. P. 487–492.
3. Neumann M. Investigation of the behavior of shock-absorbing structural parts of transport casks holding radioactive substances in terms of design testing and risk analysis. *PhD Thesis*. Germany, Wuppertal: Bergische Universität, 2009. 220 p.
4. Ломунов А.К., Южина Т.Н., Крушка Л., Чен В.В. Деформирование и разрушение липы и сосны при интенсивных динамических воздействиях. *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82. № 1. С. 43–51. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-1-43-51.
5. Oudjene M., Khelifa M. Finite element modelling of wooden structures at large deformations and brittle failure prediction. *Materials and Design*. 2009. Vol. 30. Iss. 10. P. 4081–4087. DOI: 10.1016/j.matdes.2009.05.024.
6. Guan Z.W., Zhu E.C. Finite element modelling of anisotropic elasto-plastic timber composite beams with openings. *Engineering Structures*. 2009. Vol. 31. Iss. 2. P. 394–403. DOI: 10.1016/j.engstruct.2008.09.007.
7. Vasic S., Smith I., Landis E. Finite element techniques and models for wood fracture mechanics. *Wood Science and Technology*. 2005. Vol. 39. P. 3–17. DOI: 10.1007/s00226-004-0255-3.
8. Boone T.J., Wawrzynek P.A., Ingraffea A.R. Finite element modelling of fracture propagation in orthotropic materials. *Engineering Fracture Mechanics*. 1987. Vol. 26. Iss. 2. P. 185–201. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(87\)90196-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(87)90196-2).
9. Tabiei A., Wu J. Three-dimensional nonlinear orthotropic finite element material model for wood. *Composite Structures*. 2000. Vol. 50. Iss. 2. P. 143–149. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00089-1.
10. Schmidt J., Kaliske M. Models for numerical failure analysis of wooden structures. *Engineering Structures*. 2009. Vol. 31. 2. P. 571–579. DOI: 10.1016/j.engstruct.2008.11.001.
11. Гандурин В.П., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Кузьмин В.А., Одзерихо И.А. Упругопластическая модель деформирования некоторых пород древесины, учитывающая скоростное упрочнение. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. № 2. С. 165–176. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-165-176.
12. Mackenzie-Helnwein P., Eberhardsteiner J., Mang H.A. A multi-surface plasticity model for clear wood and its application to the finite element analysis of structural details. *Computational Mechanics*. 2003. Vol. 31. Iss. 1-2. P. 204–218. DOI: 10.1007/s00466-003-0423-6.
13. Supriatna D., Steinke C., Kaliske M. Advances in computational dynamics for inelastic continua with anisotropic material behavior: Formulation and numerical implementation of inelastic ductile behavior of spruce wood. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 198. P. 41–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.04.005.

14. Lukacevic M., Lederer W., Füssl J. A microstructure-based multisurface failure criterion for the description of brittle and ductile failure mechanisms of clear-wood. *Engineering Fracture Mechanics*. 2017. Vol. 176. P. 83–99. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.02.020.
15. Konstantinov A. Yu., Lomunov A.K., Yuzhina T.N., Gray III G.T. Investigation of wood anisotropy under dynamic loading. *Problems of Strength and Plasticity*. 2018. Vol. 80. No 4. P. 555–566.
16. Bragov A., Gonov M., Konstantinov A. et al. Deformation and destruction at deformation rate of order  $10^3 \text{ s}^{-1}$  in wood of hardwood trees. *Advanced Structured Materials*. 2020. Vol. 130. P. 443–451.
17. Gilbertson Ch.G., Bulleit W.M. Load duration effects in wood at high strain rates. *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2013. Vol. 25. No 11. P. 1647–1654. DOI: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0000708.
18. Šebek F., Kubik P., Brabec M. et al. Modelling of impact behaviour of European beech subjected to split Hopkinson pressure bar test. *Composite Structures*. 2020. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112330.
19. Moilanen C.S., Saarenrinne P., Engberg B.A., Björkqvist T. Image-based stress and strain measurement of wood in the split-Hopkinson pressure bar. *Measurement Science and Technology*. 2015. Vol. 26. No 8. DOI: 10.1088/0957-0233/26/8/085206.
20. Wouts J., Haugou G., Oudjene M., Morvan H. Strain rate effects on the compressive response of wood and energy absorption capabilities – Part A: Experimental investigations. *Composite & Structures*. 2016. Vol. 149. P. 315–328. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.03.058.
21. Wouts J., Haugou G., Oudjene M. et al. Strain rate effects on the compressive response of wood and energy absorption capabilities – Part B: Experimental investigation under rigid lateral confinement. *Composite & Structures*. 2018. Vol. 204. P. 95–104. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.07.001.
22. Hering S., Keunecke D., Niemz P. Moisture-dependent orthotropic elasticity of beech wood. *Wood Science and Technology*. 2012. Vol. 45. No 5. P. 927–938. DOI: 10.1007/s00226-011-0449-4.
23. Ozyhar T., Hering S., Niemz P. Moisture-dependent orthotropic tension-compression asymmetry of wood. *Holzforschung*. 2013. Vol. 67. Iss. 4. P. 395–404. DOI: 10.1515/hf-2012-0089.
24. Pang S., Liang Y., Tao W. et al. Effect of the strain rate and fiber direction on the dynamic mechanical properties of beech wood. *Forests*. 2019. Vol. 10. No 10. P. 881–894. <https://doi.org/10.3390/f10100881>.
25. Gomes F., Xavier J., Koerber H. High strain rate compressive behaviour of wood on the transverse plane. *Procedia Structural Integrity*. 2019. Vol. 17. P. 900–905. DOI: 10.1016/j.prostr.2019.08.120.
26. Müller U., Ringhofer A., Brandner R., Schickhofer G. Homogeneous shear stress field of wood in an Arcan shear test configuration measured by means of electronic speckle pattern interferometry: description of the test setup. *Wood Science and Technology*. 2015. Vol. 49. Iss. 6. P. 1123–1136. DOI: 10.1007/s00226-015-0755-3.
27. Hering S., Saft S., Resch E. et al. Characterisation of moisture-dependent plasticity of beech wood and its application to a multi-surface plasticity model. *Holzforschung*. 2012. Vol. 66. Iss. 3. P. 373–380. DOI: 10.1515/HF.2011.162.
28. Milch J., Tippner J., Sebera V., Brabec M. Determination of the elasto-plastic material characteristics of Norway spruce and European beech wood by experimental and numerical analyses. *Holzforschung*. 2016. Vol. 70. Iss. 11. P. 1081–1092. DOI: 10.1515/hf-2015-0267.
29. Pichler P., Leitner M., Grün F. et al. Evaluation of wood material models for the numerical assessment of cutting forces in chipping processes. *Wood Science and Technology*. 2018. Vol. 52. Iss. 1. P. 281–294. DOI: 10.1007/s00226-017-0962-1.
30. Müller U., Jost T., Kurzböck C. et al. Crash simulation of wood and composite wood for future automotive engineering. *Wood Material Science and Engineering*. 2020. Vol. 15. Iss. 5. P. 312–324. DOI: 10.1080/17480272.2019.1665581.
31. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. М.: Наука, 1986. 232 с.
32. Баженов В.Г., Демарева А.В., Жестков М.Н., Кибец А.И. Особенности численного моделирования упругопластического выпучивания полусферических оболочек при нагружении жестким индентором. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2016. №2. С. 22–33.

33. Волков И.А., Коротких Ю.Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
34. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций*. М.: Физматлит, 2006. 391 с.
35. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Шошин Д.В. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагрузениях. *ПМТФ*. 2014. Т. 55. №1. С. 13–18.
36. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Петров М.В., Федорова Т.Г., Фролова И.А. Экспериментальное и теоретическое исследование упругопластического выпучивания цилиндрических оболочек, заполненных сыпучим материалом, под действием поперечной силы. *Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки*. 2017. Т. 159. №3. С. 282–295.
37. Баженов В.Г., Варавин Д.А., Кибец А.И., Рябов А.А., Романов В.И. Исследование формоизменений сферической оболочки под действием импульса перегрузки при контактном взаимодействии с жесткой обоймой. *ПМТФ*. 2015. Т. 56. №6. С. 38–45.
38. Bathe K.Y. *Finite Element Procedures*. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1052 p.
39. *Вычислительный комплекс «Динамика-3»*. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013.

#### References

1. Johnson W. Historical and present-day references concerning impact on wood. *Int. J. Impact Eng.* 1986. Vol. 4. Iss. 3. P. 161–174. DOI: 10.1016/0734-743X(86)90003-5.
2. Bragov A.M., Lomunov A.K. Dynamic properties of some wood species. *Journal de Physique IV*. 1997. Vol. 7. P. 487–492.
3. Neumann M. Investigation of the behavior of shock-absorbing structural parts of transport casks holding radioactive substances in terms of design testing and risk analysis. *PhD Thesis*. Germany, Wuppertal. Bergische Universität. 2009. 220 p.
4. Lomunov A.K., Yuzhina T.N., Kruszka L., Chen W.W. Deformirovanie i razrushenie lipy i sosny pri intensivnykh dinamicheskikh vozdeystviyakh [Deforming and fracture of linden and pine under intensive dynamic impacts]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2020. Vol. 82. No 1. P. 43–51. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-1-43-51 (In Russian).
5. Oudjene M., Khelifa M. Finite element modelling of wooden structures at large deformations and brittle failure prediction. *Mater. Design*. 2009. Vol. 30. Iss. 10. P. 4081–4087. DOI: 10.1016/j.matdes.2009.05.024.
6. Guan Z.W., Zhu E.C. Finite element modelling of anisotropic elasto-plastic timber composite beams with openings. *Eng. Struct.* 2009. Vol. 31. Iss. 2. P. 394–403. DOI: 10.1016/j.engstruct.2008.09.007.
7. Vasic S., Smith I., Landis E. Finite element techniques and models for wood fracture mechanics. *Wood Sci. Technol.* 2005. Vol. 39. P. 3–17. DOI: 10.1007/s00226-004-0255-3.
8. Boone T.J., Wawrzynek P.A., Ingraffea A.R. Finite element modelling of fracture propagation in orthotropic materials. *Eng. Fract. Mech.* 1987. Vol. 26. Iss. 2. P. 185–201. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90196-2.
9. Tabiei A., Wu J. Three-dimensional nonlinear orthotropic finite element material model for wood. *Compos. Struct.* 2000. Vol. 50. Iss. 2. P. 143–149. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00089-1.
10. Schmidt J., Kaliske M. Models for numerical failure analysis of wooden structures. *Eng. Struct.* 2009. Vol. 31. 2. P. 571–579. DOI: 10.1016/j.engstruct.2008.11.001.
11. Gandurin V.P., Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kuz'min V.A., Odzerikho I.A. Uprugoplasticheskaya model deformirovaniya nekotorykh porod drevesiny, uchityvayushchaya skorostnoe uprochnenie [Elastoplastic model of deformation of some of wood species, accounting for high-rate hardening]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 2. P. 165–176. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-165-176. (In Russian).
12. Mackenzie-Helnwein P., Eberhardsteiner J., Mang H.A. A multi-surface plasticity model

for clear wood and its application to the finite element analysis of structural details. *Comput. Mech.* 2003. Vol. 31. Iss. No 1-2. P. 204–218. DOI: 10.1007/s00466-003-0423-6.

13. Supriatna D., Steinke C., Kaliske M. Advances in computational dynamics for inelastic continua with anisotropic material behavior: Formulation and numerical implementation of inelastic ductile behavior of spruce wood. *Int. J. Solids Struct.* 2020. Vol. 198. P. 41–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.04.005.

14. Lukacevic M., Lederer W., Fübssl J. A microstructure-based multisurface failure criterion for the description of brittle and ductile failure mechanisms of clear-wood. *Eng. Fract. Mech.* 2017. Vol. 176. P. 83–99. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.02.020.

15. Konstantinov A. Yu., Lomunov A.K., Yuzhina T.N., Gray III G.T. Investigation of wood anisotropy under dynamic loading. *Problems of Strength and Plasticity.* 2018. Vol. 80. No 4. P. 555–566.

16. Bragov A., Gonov M., Konstantinov A. et al. Deformation and destruction at deformation rate of order  $10^3 \text{ s}^{-1}$  in wood of hardwood trees. *Advanced Structured Materials.* 2020. Vol. 130. P. 443–451.

17. Gilbertson Ch. G., Bulleit W.M. Load duration effects in wood at high strain rates. *J. Mater. Civ. Eng.* 2013. Vol. 25. No 11. P. 1647–1654. DOI: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0000708.

18. Šebek F., Kubik P., Brabec M. et al. Modelling of impact behaviour of European beech subjected to split Hopkinson pressure bar test. *Compos. Struct.* 2020. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112330.

19. Moilanen C.S., Saarenrinne P., Engberg B.A., Björkqvist T. Image-based stress and strain measurement of wood in the split-Hopkinson pressure bar. *Meas. Sci. Technol.* 2015. Vol. 26. No 8. DOI: 10.1088/0957-0233/26/8/085206.

20. Wouts J., Haugou G., Oudjene M., Morvan H. Strain rate effects on the compressive response of wood and energy absorption capabilities – Part A: Experimental investigations. *Compos. Struct.* 2016. Vol. 149. P. 315–328. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.03.058.

21. Wouts J., Haugou G., Oudjene M. et al. Strain rate effects on the compressive response of wood and energy absorption capabilities – Part B: Experimental investigation under rigid lateral confinement. *Compos. Struct.* 2018. Vol. 204. P. 95–104. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.07.001.

22. Hering S., Keunecke D., Niemz P. Moisture-dependent orthotropic elasticity of beech wood. *Wood Sci. Technol.* 2012. Vol. 45. No 5. P. 927–938. DOI: 10.1007/s00226-011-0449-4.

23. Ozyhar T., Hering S., Niemz P. Moisture-dependent orthotropic tension-compression asymmetry of wood. *Holzforschung.* 2013. Vol. 67. Iss. 4. P. 395–404. DOI: 10.1515/hf-2012-0089.

24. Pang S., Liang Y., Tao W. et al. Effect of the strain rate and fiber direction on the dynamic mechanical properties of beech wood. *Forests.* 2019. Vol. 10. No 10. P. 881–894. <https://doi.org/10.3390/f10100881>.

25. Gomes F., Xavier J., Koerber H. High strain rate compressive behaviour of wood on the transverse plane. *Procedia Structural Integrity.* 2019. Vol. 17. P. 900–905. DOI: 10.1016/j.prostr.2019.08.120.

26. Müller U., Ringhofer A., Brandner R., Schickhofer G. Homogeneous shear stress field of wood in an Arcan shear test configuration measured by means of electronic speckle pattern interferometry: description of the test setup. *Wood Sci. Technol.* 2015. Vol. 49. Iss 6. P. 1123–1136. DOI: 10.1007/s00226-015-0755-3.

27. Hering S., Saft S., Resch E. et al. Characterisation of moisture-dependent plasticity of beech wood and its application to a multi-surface plasticity model. *Holzforschung.* 2012. Vol. 66. Iss. 3. P. 373–380. DOI: 10.1515/HF.2011.162.

28. Milch J., Tippner J., Sebera V., Brabec M. Determination of the elasto-plastic material characteristics of Norway spruce and European beech wood by experimental and numerical analyses. *Holzforschung.* 2016. Vol. 70. Iss. 11. P. 1081–1092. DOI: 10.1515/hf-2015-0267.

29. Pichler P., Leitner M., Grün F. et al. Evaluation of wood material models for the numerical assessment of cutting forces in chipping processes. *Wood Sci. Technol.* 2018. Vol. 52. Iss. 1. P. 281–294. DOI: 10.1007/s00226-017-0962-1.

30. Müller U., Jost T., Kurzböck C. et al. Crash simulation of wood and composite wood for future automotive engineering. *Wood Mater. Sci. Eng.* 2020. Vol. 15. Iss. 5. P. 312–324. DOI: 10.1080/17480272.2019.1665581.

31. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bolshie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya* [The Large Elastic-Plastic Deformation Theory, Algorithms, Applications]. Moscow. Nauka Publ. 1986. 232 p. (In Russian).
32. Bazhenov V.G., Demareva A.V., Zhestkov M.N., Kibets A.I. Osobennosti chislenogo modelirovaniya uprugoplasticheskogo vypuchivaniya polusfericheskikh obolochek pri nagruzhenii zhestkim indentorom [Special features of numerical simulation for elastic-plastic buckling of hemispherical shells under loading with the rigid indenter]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2016. No 2. P. 22–33 (In Russian).
33. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. *Urvneniya sostoyaniya vyazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami* [Equations of State for Viscoelastic Media with Damages]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 424 p. (In Russian).
34. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy* [The Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2006. 391 p. (In Russian).
35. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Shoshin D.V. Ustoychivost i predelnye sostoyaniya uprugoplasticheskikh sfericheskikh obolochek pri staticheskikh i dinamichestkikh nagruzheniyaakh [Stability and limit states of elastoplastic spherical shells under static and dynamic loading]. *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]. 2014. Vol. 55. №1. P. 13–18 (In Russian).
36. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Petrov M.V., Fedorova T.G., Frolova I.A. Eksperimentalnoe i teoreticheskoe issledovanie uprugoplasticheskogo vypuchivaniya tsilindricheskikh obolochek, zapolnennykh sypuchim materialom, pod deystviem poperechnoy sily [Experimental and theoretical study of elastoplastic buckling of cylindrical shells filled with bulk material under the action of a transverse force]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki* [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]. 2017. Vol. 159. No 3. P. 282–295 (In Russian).
37. Bazhenov V.G., Varavin D.A., Kibets A.I., Ryabov A.A., Romanov V.I. Issledovanie formoizmeneniy sfericheskoy obolochki pod deystviem impulsa peregruzki pri kontaktnom vzaimodeystvii s zhestkoy oboymoy [Investigation of changes in the spherical shell shape under the action of pulsed loading due to contact interaction with a rigid block]. *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]. 2015. Vol. 56. No 6. P. 38–45 (In Russian).
38. Bathe K.Y. *Finite element procedures*. New Jersey. Prentice Hall. 1996. 1052 p.
39. *Vychislitelnyy kompleks "Dinamika-3"* [Computing Complex "Dynamics-3"]. Nauchno-tekhnicheskii tsentr po yadernoy i radiatsionnoy bezopasnosti. Attestatsionnyy pasport programmogo sredstva. Registratsionnyy pasport attestatsii PS № 325 ot 18.04.2013 [Scientific and Technical Center for Nuclear and Radiation Safety. Certification passport software. Registration passport of certification PS No 325 dated 04.18.2013] (In Russian).

## FINITE ELEMENT METHOD FOR NUMERICAL MODELING OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF WOOD UNDER SHOCK LOADING

**Bezhentseva M.V.<sup>1</sup>, Vutsin L.I.<sup>1</sup>, Kibets A.I.<sup>1</sup>, Kruszka L.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University  
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Military University of Technology, Warsaw, Poland*

The 3D problem of wood deformation under shock loading is considered. The governing system of equations is formulated in Lagrange variables. A defining system of equations in a three-dimensional formulation is presented. The equation of motion is derived from the balance of the virtual powers of work. Wood is modeled as a unidirectionally reinforced material with a description of the descending branch of the deformation diagram. Deformations and stresses are determined in a



local basis, the position of which in space is related to the direction of the wood grain. Wood material is represented as a combination of reinforcing fibers and a matrix, the elastoplastic deformation of which is described by the relations of the theory of flow with combined kinematic and isotropic strengthening. The deformation characteristics of the matrix and fibers are determined on the basis of a computational and experimental study of the mechanical properties of wood along and across the fibers. In numerical simulation, the moment scheme of the finite element method and an explicit time integration scheme of the “cross” type are used. Discretization of the computational domain is based on an eight-node isoparametric finite element adapted to the specifics of the problem under consideration. Software realization of the developed mathematical model and numerical methodology is implemented within the computing complex “Dynamics-3”. Computer simulation of compression of an experimental specimen of spruce along and across the fibers has been performed. The reliability of the calculation results is confirmed by good agreement with the experimental data.

*Keywords:* wood, plastic deformation, anisotropy, finite element method.