УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412

ПСЕВДОТЕНЗОРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА МЕХАНИКИ ГЕМИТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ СРЕД*

Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

radayev@ipmnet.ru, evmurashkin@gmail.com

Поступила в редакцию 23.10.2020

Рассматривается возможность применения относительных тензоров в механике микрополярного континуума, в частности гемитропных микрополярных тел. Вводятся фундаментальные тензоры и ориентирующие относительные скаляры в трехмерном пространстве. Исследуются символы перестановок и абсолютные тензоры Леви-Чивиты. Обсуждаются свойства относительных тензоров. Приводится общая форма ковариантного дифференцирования относительного тензора и ее конкретные представления для тензоров рангов, наиболее часто используемых в прикладных задачах. Указаны веса основных кинематических тензоров. Из векторов микроповорота и перемещений строятся тензор изгиба-кручения и «полный» асимметричный тензор деформаций. Получены результаты, касающиеся понятий вектора поверхностных сил и моментов, ассоциированного вектора силовых и моментных напряжений, тензора силовых и моментных напряжений. Определяются веса силовых и моментных характеристик микрополярного континуума. Вводится определяющая форма гемитропного микрополярного упругого потенциала, которая представляет собой абсолютный скаляр. В линейном случае упругий потенциал представляет собой квадратичную форму, коэффициенты которой являются псевдоскалярами. Найдены веса определяющих псевдоскаляров. Выделены безразмерные определяющие микрополярные константы и определяющие константы, имеющие физическую размерность. Приводятся уравнения движения микрополярного континуума в терминах относительных тензоров. Обсуждаются варианты динамических уравнений микрополярного гемитропного континуума в зависимости от выбора системы координат. Выводится конечная форма динамических уравнений для перемещений и микровращений в случае полуизотропной (гемитропной) симметрии в левоориентированной декартовой системе координат. Создан свод основных формул и понятий, касающихся алгебры и дифференцирования относительных тензоров произвольного ранга.

Ключевые слова: относительный тензор, ориентирующий псевдоскаляр, микроповорот, перемещение, микрополярный гемитропный континуум.

* Выполнено в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке РФФИ (гранты №№ 18-01-00844, 20-01-00666).

Введение

Классические теории механики сплошных сред оказываются неприемлемыми для математического моделирования поведения современных материалов (например, упругих метаматериалов или биоматериалов, таких как грунты, зернистые упругие среды, идеально пластические дилатирующие материалы, волокнистые материалы, сотовые структуры, армированные композитные материалы, кости, сосуды, мышцы и другие биологические ткани). Теория микрополярных континуумов – активно развивающаяся область современной механики сплошных сред [1–8]. В общем случае микрополярной анизотропии упругий материал определяется 171 материальной константой, что чрезвычайно усложняет анализ уравнений при решении прикладных задач. Изотропное центрально-симметричное микрополярное упругое тело задается шестью определяющими константами. Гемитропное (полуизотропное) микрополярное упругое тело может быть классифицировано так же, как изотропное нецентрально-симметричное, задаваемое девятью определяющими константами. В последнем случае материальный тензор определяющих констант инвариантен относительно пространственных поворотов ортогонального координатного репера, но он оказывается чувствительным (sensible) к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Волновые процессы в гемитропных средах распознаются распространением связанных волн микровращений и перемещений с одновременным наличием зеркальных волновых мод, что объясняется чувствительностью дифференциальных уравнений гемитропной упругости к преобразованиям зеркального отражения.

Анализ литературных источников [1–8] указывает на отсутствие формулировок теории гемитропных микрополярных тел в терминах относительных тензоров (relative tensors), закон преобразования которых чувствителен к преобразованиям зеркального отражения и инверсиям трехмерного пространства. Относительные тензоры применяются в механике упругих микрополярных сред. В частности, таковыми являются: вектор микроповорота, тензор изгиба-кручения, вектор и тензор моментных напряжений, коэффициент микроинерции, распределение объемных моментов. Обзор литературных источников показывает, что использование относительных тензоров в теориях континуальной механики встречается редко, несмотря на хорошо развитый математический аппарат (алгебру, теорию инвариантов и дифференцирование относительных тензоров) [9–19]. Формулировка уравнений микрополярной теории упругости в терминах относительных тензоров или псевдотензоров (pseudotensors) позволяет более глубоко понять физическую и геометрическую природу тех или иных физических полей.

Физически приемлемые математические модели получаются в результате использования теоретико-полевого формализма [9–11], а геометрическую корректность обеспечивает аппарат векторного анализа и тензорного исчисления [12–14]. Такой подход хорошо зарекомендовал себя в современной континуальной механике и физике [15, 16]. Более того, последовательное применение средств тензорного исчисления существенно упрощает математические представления систем дифференциальных уравнений, физических законов или геометрических свойств, а также позволяет простым способом конструировать функции (упругую энергию, граничные условия в механике растущих тел), аргументами которых являются алгебраические инварианты [17].

1. Относительные тензоры (псевдотензоры) в трехмерном пространстве

Выберем в трехмерном пространстве систему координат x^k $(k = 1, 2, 3)$. Метрика пространства задается квадратом линейного элемента длины согласно

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j, \tag{1}$$

где g_{ij} – компоненты метрического тензора. Компоненты фундаментального тензора связаны с метрическим тензором соотношением

$$g^{ij}g_{ij} = \delta^i_k. \tag{2}$$

И метрический, и фундаментальный тензоры являются абсолютными (истинными) тензорами. То же самое относится к символу Кронекера δ^i_k.

Квадратичная форма (1) является положительно определенной, откуда следует неравенство

$$g = \det g_{ij} > 0. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение локальные базисные триэдры, связанные с выбранной координатной системой в трехмерном пространстве: $\underset{s}{\boldsymbol{\iota}}$ $(s = 1, 2, 3)$ – локальный ковариантный базис; $\overset{s}{\boldsymbol{\iota}}$ $(s = 1, 2, 3)$ – локальный контравариантный (взаимный) базис.

Базисные векторы и взаимные базисные векторы удовлетворяют соотношению

$$\underset{s}{\boldsymbol{\iota}}\cdot\overset{k}{\boldsymbol{\iota}} = \overset{k}{\underset{s}{\delta}} \quad (k = 1, 2, 3;\ s = 1, 2, 3).$$

Базисные направления и различные способы их нумерации являются фундаментальными понятиями в теории относительных тензоров.

С ориентацией локальных базисов связан фундаментальный объект тензорной алгебры и многомерной геометрии – символы перестановок [12, 18], которые не являются абсолютным тензорами и определяются согласно соотношениям:

$$\text{э}_{ijk} = \text{э}^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{для троек } (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2), \\ -1 & \text{для троек } (3,2,1),(1,3,2),(2,1,3), \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4}$$

Символы перестановок э_{ijk} и э^{ijk} являются относительными ковариантными тензорами (псевдотензорами) веса -1 (w.g.t. $= -1$) и одновременно – относительными контравариантными тензорами веса $+1$ (w.g.t. $= +1$), поэтому удобно ввести для них следующие обозначения: $\overset{[-1]}{\text{э}}_{ijk}, \overset{[+1]}{\text{э}}_{ijk}$.

Далее сверху корневого символа относительного тензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, не отражается в обозначениях.

Введем в рассмотрение ориентирующий трехмерное пространство псевдоскаляр (относительный скаляр веса $+1$ (w.g.t. $= +1$)), образованный последовательным применением операций скалярного и векторного произведения (тройного произведения) к базисным векторам:

$$e = \overset{[+1]}{e} = \underset{1}{\boldsymbol{\iota}}\cdot\left(\underset{2}{\boldsymbol{\iota}}\times\underset{3}{\boldsymbol{\iota}}\right), \tag{5}$$

и относительный скаляр отрицательного веса –1 (w.g.t. = –1):

$$\frac{1}{e} = \overset{[-1]}{e}^{-1} = \overset{1}{\boldsymbol{\iota}} \cdot (\overset{2}{\boldsymbol{\iota}} \times \overset{3}{\boldsymbol{\iota}}). \tag{6}$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (5) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на векторах $\underset{s}{\boldsymbol{\iota}}$. Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированной координатной системы, $e < 0$ для левоориентированной координатной системы. Ориентирующий пространство псевдоскаляр позволяет осуществить переход от относительных тензоров к абсолютным. Можно видеть, что

$$e^2 = g,$$

откуда следует, что g является псевдоскаляром веса +2, то есть

$$g = \overset{[+2]}{g},$$

и, кроме того,

$$|e| = \sqrt{g}.$$

Далее у фундаментальных символов, таких как e и g, указание на их вес будем опускать.

Истинные (абсолютные) e-тензоры [14] (тензоры перестановок, тензоры Леви-Чивиты, дискриминантные тензоры) e^{ijk}, e_{ijk} можно вычислить согласно соотношениям:

$$e_{ijk} = \overset{[+1]}{e} \cdot \overset{[-1]}{\text{э}}_{ijk}, \quad e^{ijk} = \overset{[-1]}{e}^{-1} \cdot \overset{[+1]}{\text{э}}^{ijk}, \tag{7}$$

то есть

$$e_{skl} = \begin{cases} +|e| \overset{[-1]}{\text{э}}_{sld}, & \text{если } e > 0, \\ -|e| \overset{[+1]}{\text{э}}_{sld}, & \text{если } e < 0, \end{cases} \qquad e^{skl} = \begin{cases} +\dfrac{1}{|e|} \overset{[-1]}{\text{э}}_{sld}, & \text{если } e > 0, \\ -\dfrac{1}{|e|} \overset{[+1]}{\text{э}}_{sld}, & \text{если } e < 0. \end{cases}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\begin{gathered} \underset{s}{\boldsymbol{\iota}} \times \underset{k}{\boldsymbol{\iota}} = e_{skl} \overset{l}{\boldsymbol{\iota}}, \\ \overset{s}{\boldsymbol{\iota}} \times \overset{k}{\boldsymbol{\iota}} = e^{skl} \underset{l}{\boldsymbol{\iota}}, \\ e_{skl} = \underset{s}{\boldsymbol{\iota}} \cdot \left(\underset{k}{\boldsymbol{\iota}} \times \underset{l}{\boldsymbol{\iota}} \right), \\ e^{skl} = \overset{s}{\boldsymbol{\iota}} \cdot \left(\overset{k}{\boldsymbol{\iota}} \times \overset{l}{\boldsymbol{\iota}} \right). \end{gathered} \tag{8}$$

2. Определение и формула ковариантного дифференцирования относительного тензора

Сведения, касающиеся символов перестановок и псевдотензоров, имеются во многих руководствах по многомерной геометрии [20, 21] и тензорному анализу [12–14, 17]. В общем случае определение относительного тензора веса W таково [17, 19]:

$$\overline{T}_{ij\ldots k}^{lm\ldots n} = J^W (\partial_p \overline{x}^l)(\partial_q \overline{x}^m)\ldots(\partial_s \overline{x}^n)(\overline{\partial}_i x^a)(\overline{\partial}_j x^b)\ldots(\overline{\partial}_k x^c) T_{ab\ldots c}^{pq\ldots s}, \qquad (9)$$

где

$$J = \det(\overline{\partial}_j x^i), \quad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}, \quad \overline{\partial}_p = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^p}.$$

Здесь черта сверху указывает на значение величины в новой системе координат $\overline{x}^k$ ($k = 1, 2, 3$), J – якобиан преобразования[1].

Преобразование относительного тензора (9) является линейным и однородным. Это означает неизменность нулевого тензора при изменении системы координат. Из этого утверждения следует, что дифференциальные уравнения, полученные в терминах относительных тензоров, справедливые в одной системе координат, остаются верными и в любой другой системе координат. При этом веса относительных тензоров в различных частях исследуемых уравнений должны совпадать.

Кроме того, для относительных тензоров справедливы следующие утверждения:

1) относительные тензоры одинаковой валентности и веса можно суммировать, в результате получается относительный тензор той же валентности и веса, что и слагаемые;

2) результатом тензорного произведения относительных тензоров является относительный тензор с весом, равным сумме весов тензоров, входящих в произведение;

3) операция свертки относительного тензора не меняет веса относительного тензора.

Чтобы отличать истинные тензоры от относительных тензоров, для первых часто применяется термин «абсолютный тензор».

Ковариантная производная относительного тензора $T_{ij\ldots k}^{lm\ldots n}$ веса W вычисляется по аналогии с соответствующей операцией для обычных тензоров [13, 14, 19]:

$$\nabla_p \overset{[W]}{T}{}_{ij\ldots k}^{lm\ldots n} = \partial_p \overset{[W]}{T}{}_{ij\ldots k}^{lm\ldots n} + \overset{[W]}{T}{}_{ij\ldots k}^{sm\ldots n} \Gamma_{sp}^l + \ldots + \overset{[W]}{T}{}_{ij\ldots k}^{lm\ldots s} \Gamma_{ip}^s -$$

$$- \Gamma_{sp}^l \overset{[W]}{T}{}_{sj\ldots k}^{lm\ldots n} - \ldots - \Gamma_{sp}^l \overset{[W]}{T}{}_{ij\ldots s}^{lm\ldots n} - W \overset{[W]}{T}{}_{ij\ldots k}^{lm\ldots n} \Gamma_{sp}^l. \qquad (10)$$

Выпишем формулу (10) для конкретных случаев:

– ковариантная производная относительного скаляра веса W:

$$\nabla_p \overset{[W]}{T} = \partial_p \overset{[W]}{T} - W \overset{[W]}{T} \Gamma_{sp}^s; \qquad (11)$$

– ковариантная производная относительного контравариантного вектора веса W:

$$\nabla_p \overset{[W]}{T}{}^k = \partial_p \overset{[W]}{T}{}^k - \overset{[W]}{T}{}^s \Gamma_{sp}^k - W \overset{[W]}{T}{}^k \Gamma_{sp}^s; \qquad (12)$$

– ковариантная производная относительного тензора контравариантной валентности 2 веса W:

$$\nabla_p \overset{[W]}{T}{}^{ji} = \partial_p \overset{[W]}{T}{}^{ji} + \overset{[W]}{T}{}^{si} \Gamma_{sp}^j + \overset{[W]}{T}{}^{js} \Gamma_{sp}^i - W \overset{[W]}{T}{}^{ji} \Gamma_{sp}^s; \qquad (13)$$

[1]В современной научной литературе имеется несколько различных определений относительных тензоров. Обзор литературы показывает, что их насчитывается как минимум три [10].

– ковариантная производная относительного тензора контравариантной валентности 1 ковариантной валентности 1 веса W:

$$\nabla_p \overset{[W]}{T_i^j} = \partial_p \overset{[W]}{T_i^j} - \overset{[W]}{T_s^j} \Gamma_{ip}^s + \overset{[W]}{T_i^s} \Gamma_{sp}^j - W \overset{[W]}{T_i^j} \Gamma_{sp}^s. \tag{14}$$

3. Кинематика микрополярного континуума

Кинематика микрополярных континуумов определяется микроповоротами и трансляционными перемещениями элементарного объема [22–24]. Первоначальные характеристики тела в микрополярной теории упругости – массовая плотность ρ и коэффициент микроинерции $\overset{[-2]}{\Im}$. Вес коэффициента микроинерции $\overset{[-2]}{\Im}$ можно вычислить, воспользовавшись определением тензора инерции, известным из курса аналитической механики [25].

Плотность, микроинерция и все остальные величины, используемые в микрополярной теории упругости, отнесены к инвариантному элементу объема:

$$dV = ed\overset{[-1]}{\tau},$$

где

$$d\overset{[-1]}{\tau} = dx^1 dx^2 dx^3$$

– естественный элемент объема отрицательного веса -1. Естественный элемент объема широко используется в механике и физике в случае теоретико-полевых формулировок [9–11].

Известно, что малый поворот в трехмерном пространстве представляется абсолютным антисимметричным тензором второго ранга – тензором микроповорота (microrotation tensor) Ω_{ik} (w.g.t. = 0):

$$\Omega_{ik} = \Omega_{[ik]}. \tag{15}$$

Здесь квадратные скобки обозначают операцию альтернирования по заключенным в них индексам. С антисимметричным тензором Ω_{ik} связывается относительный вектор (micropolar microrotation vector) $\overset{[+1]}{\phi}$ (w.g.t. = +1):

$$\overset{[+1]}{\phi^i} = \frac{1}{2} \overset{[+1]}{\text{э}^{ikl}} \Omega_{kl}. \tag{16}$$

Тензор Ω_{ik} может быть выражен через вектор $\overset{[+1]}{\phi^i}$:

$$\Omega_{kl} = \overset{[-1]}{\text{э}_{klj}} \overset{[+1]}{\phi^j}. \tag{17}$$

Таким образом, основными кинематическими переменными микрополярной теории являются абсолютный вектор u^k и относительный вектор $\overset{[+1]}{\phi^i}$. Картина деформации микрополярного континуума лучше всего описывается вектором относительного микровращения (relative microrotation vector) φ^i (w.g.t. = +1):

$$\overset{[+1]}{\varphi^i} = \overset{[+1]}{\phi^i} - \frac{1}{2} \overset{[-1]}{\text{э}^{ikl}} \nabla_k u_l. \tag{18}$$

«Чистая» деформация при этом характеризуется абсолютным симметричным тензором малых деформаций

$$\varepsilon_{(ij)} = \nabla_{(i}u_{j)} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i), \tag{19}$$

где круглые скобки обозначают симметризацию по заключенным в них индексам. Тензор $\varepsilon_{(ij)}$ – тензор малых деформаций, известный из классических теорий механики деформируемых тел.

Наконец, поле микроповоротов $\overset{[+1]}{\phi}{}^i$ порождает еще один тензор (тензор изгиба-кручения, wryness tensor), характеризующий деформацию изгиба-кручения:

$$\overset{[+1]}{\kappa}{}_i^s = \nabla_i \overset{[+1]}{\phi}{}^s . \tag{20}$$

Определим также вектор κ_i (w.g.t. = 0), сопутствующий антисимметричной части тензора изгиба-кручения $\overset{[+1]}{\kappa}{}_i^s$ (w.g.t. = +1):

$$\kappa_i = \frac{1}{2} \overset{[-1]}{\epsilon}_{ijs} \overset{[-1]}{\kappa}{}^{[js]} . \tag{21}$$

В большинстве исследований по теории асимметричной упругости вводится «полный» асимметричный тензор деформации ε_{ij} (w.g.t. = 0). Он конструируется из симметричного тензора деформации (19) и антисимметричного тензора

$$\epsilon_{[ij]} = - \overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk} \overset{[+1]}{\varphi}{}^k \tag{22}$$

простым сложением тензоров (19) и (22):

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{(ij)} + \epsilon_{[ij]}. \tag{23}$$

Можно показать, что «полный» асимметричный тензор деформации вычисляется по формуле

$$\epsilon_{ij} = \nabla_i u_j - \overset{[-1]}{\epsilon}_{ijk} \overset{[+1]}{\phi}{}^k . \tag{24}$$

4. Динамические уравнения микрополярного континуума

Вектор силовых напряжений (force traction vector) и вектор моментных напряжений (couple traction vector) являются базовыми понятиями микрополярной механики и связываются с тензором силовых напряжений σ^{ik} и тензором моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^i_k$ согласно соотношениям Коши

$$t^k = n_i \sigma^{ik}, \tag{25}$$

$$\overset{[-1]}{m}_k = n_i \overset{[-1]}{\mu}{}^i_k . \tag{26}$$

Очевидно, что тензор силовых напряжений σ^{ik} является абсолютным тензором второго ранга, а тензор моментных напряжений $\overset{[-1]}{\mu}{}^i_k$ – относительным тензором веса –1.

С учетом указанного обстоятельства дифференциальные уравнения движения микрополярного континуума в терминах относительных тензоров можно выписать в форме [22–24]:

$$\nabla_i \sigma^{ik} = -X^k + \rho \partial v^k, \tag{27}$$

$$\nabla_i \overset{[-1]}{\mu}{}^i_k - 2 \overset{[-1]}{\tau}_k - \overset{[-1]}{Y}_k + \overset{[-2]}{\mathfrak{I}} \partial \overset{[+1]}{\phi}{}^k, \tag{28}$$

где ρ – массовая плотность, v^k – компоненты вектора скорости, X^k – объемные силы, Y_k (w.g.t. $= -1$) – объемные моменты, $\overset{[-1]}{\tau}_k$ (w.g.t. $= -1$)) – ассоциированный вектор силовых напряжений, связанный с антисимметричной частью тензора силовых напряжений $\sigma^{[ik]}$ соотношением

$$\sigma^{[ik]} = -\overset{[+1]}{э}{}^{ikj} \overset{[-1]}{\tau}_j . \tag{29}$$

Аналогично определяется ассоциированный вектор моментных напряжений

$$-\overset{[-1]}{\mu}_{[is]} = -\overset{[-1]}{э}_{isj} \mu^j. \tag{30}$$

Запишем ковариантные производные в (27) и (28), следуя (15), (16):

$$\partial_i \sigma^{ik} + \sigma^{sk} \Gamma^i_{si} + \sigma^{is} \Gamma^k_{si} = -X^k + \rho \partial v^k, \tag{31}$$

$$\partial_i \overset{[-1]}{\mu}{}^i_k + \overset{[-1]}{\mu}{}^s_k \Gamma^i_{si} - \overset{[-1]}{\mu}{}^i_s \Gamma^s_{ki} + \overset{[-1]}{\mu}{}^i_k \Gamma^s_{si} - 2 \overset{[-1]}{\tau}_k = -\overset{[-1]}{Y}_k + \overset{[-2]}{\mathfrak{I}} \partial \overset{[+1]}{\phi}{}^k . \tag{32}$$

Для постановки краевых задач теории моментной упругости необходимо задать силы t^k и моменты m_k, действующие на внешней поверхности деформируемого тела.

Полученные уравнения (31), (32) в совокупности с краевыми условиями (25), (26) дают общую постановку краевой задачи теории микрополярной упругости в произвольной криволинейной системе координат.

5. Гемитропное микрополярное тело

Введем микрополярный упругий потенциал $\mathscr{U}$ с соответствующими аргументами

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}(э_{(ij)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)}, \overset{[+1]}{\varphi}{}^i, \kappa_i). \tag{33}$$

Он представляет собой абсолютный скаляр, вариация которого вычисляется согласно

$$\delta \mathscr{U} = \sigma^{(ij)} \delta э_{(ij)} + \overset{[-1]}{\mu}_{(ij)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(ij)} + 2 \overset{[-1]}{\tau}_i \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^i + 2\mu^i \delta \kappa_i. \tag{34}$$

Принцип виртуальной работы, являющийся следствием принципа виртуальных перемещений и который может быть положен в основу моделирования механического поведения микрополярных сред, имеет вид [24]:

$$\int \delta \mathscr{U} dV = \int \left[X^j \delta u_j + \overset{[-1]}{Y}_j \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^j \right] dV + \oint_{\partial} \left[t^j \delta u_j + \overset{[-1]}{m}_j \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^j \right] dS. \tag{35}$$

В том случае, когда потенциал $\mathscr{U}$ инвариантен относительно гемитропной группы, он представляется в форме

$$\mathscr{U} = \underset{1}{A} g^{is} g^{lm} \text{э}_{(is)} \text{э}_{(lm)} + \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} g_{is} g_{im} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \underset{3}{A} g^{is} g^{lm} \text{э}_{(il)} \text{э}_{(sm)} + \overset{[-2]}{\underset{4}{A}} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(il)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(sm)} +$$

$$+ \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} g_{is} \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i} \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^{s} + \underset{6}{A} g^{is} \kappa_i \kappa_s + \overset{[-1]}{\underset{7}{A}} g^{is} g_{lm} \text{э}_{(is)} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)} + \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} \kappa_i \delta \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}, \qquad (36)$$

где символы $\underset{i}{A}$ $(i = 1, \ldots, 9)$ с соответствующими весами – определяющие псевдоскаляры. Тогда определяющие уравнения получаются в виде:

$$\sigma^{(is)} = 2 \underset{1}{A} g^{is} g^{lm} \text{э}_{(lm)} + 2 \underset{3}{A} g^{il} g^{sm} \text{э}_{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{7}{A}} g^{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)},$$

$$\overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2 \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} g_{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + 2 \overset{[-2]}{\underset{4}{A}} g_{il} g_{sm} \overset{[-1]}{\kappa}{}^{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{7}{A}} g_{is} g^{lm} \text{э}_{(lm)} + \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} \text{э}_{(ls)}, \qquad (37)$$

$$2 \overset{[-1]}{\tau}_i = 2 \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{s} + \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} \kappa_i,$$

$$2\mu^i = 2 \underset{6}{A} g^{is} \kappa_s + \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}.$$

Вместо девяти определяющих псевдоскаляров $\underset{i}{A}$, появляющихся в выражении для упругого потенциала (36), удобнее ввести другие определяющие псевдообъекты:

$$\underset{1}{A} = G\nu(1-2\nu)^{-1}, \quad \overset{[-2]}{\underset{2}{A}} = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} c_3, \quad \underset{3}{A} = G,$$

$$\overset{[-2]}{\underset{4}{A}} = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L}, \quad \overset{[-2]}{\underset{5}{A}} = 2G \overset{[-2]}{c}_1, \quad \underset{6}{A} = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+2]}{c}_2, \qquad (38)$$

$$\overset{[-1]}{\underset{7}{A}} = G \overset{[-1]}{L} c_4, \quad \overset{[-1]}{\underset{8}{A}} = G \overset{[-1]}{L} c_5, \quad \overset{[-1]}{\underset{9}{A}} = G \overset{[-1]}{L} c_6,$$

чтобы в итоге пришлось иметь дело с двумя размерными и семью безразмерными параметрами: G – модуль сдвига (имеет размерность силовых напряжений); ν – коэффициент Пуассона (не имеет физической размерности); $\overset{[-1]}{L}$ – характерная длина в микрополярной теории; $\overset{[-2]}{c}_1$, $\overset{[+2]}{c}_2$, c_3, c_4, c_5, c_6 – не имеющие физической размерности псевдоскаляры.

В результате вместо уравнений (37) приходим к определяющим уравнениям гемитропной микрополярной среды:

$$\sigma^{(is)} = 2G\big(\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm}\big) \text{э}_{(lm)} + G \overset{[-1]}{L} \big(c_4 g^{is} g_{lm} \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + c_5 \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(is)}\big),$$

$$\overset{[-1]}{\mu}_{(is)} = 2G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} (c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm}) \overset{[+1]}{\kappa}{}^{(lm)} + G \overset{[-1]}{L} \big(c_4 g_{is} g^{lm} \text{э}_{(lm)} + c_5 \text{э}_{(is)}\big), \qquad (39)$$

$$\overset{[-1]}{\tau}_i = 2G \overset{[-2]}{c}_1 g_{is} \overset{[+1]}{\varphi}{}^{s} + \frac{1}{2} G \overset{[-1]}{L} c_6 \kappa_i,$$

$$\mu^i = G \overset{[-1]}{L} \overset{[-1]}{L} \overset{[+2]}{c}_2 g^{is} \kappa_s + \frac{1}{2} G \overset{[-1]}{L} c_6 \overset{[+1]}{\varphi}{}^{i}$$

или для «полных» силовых и моментных напряжений:

$$\sigma^{is} = 2G\big(\nu(1-2\nu)^{-1} g^{is} g^{lm} + g^{il} g^{sm}\big)\nabla_{(l}u_{m)} + G\overset{[-1]}{L} c_4 g^{is} g_{lm} \nabla^{(l}\overset{[+1]}{\phi}{}^{m)} +$$
$$+ G\overset{[-1]}{L} c_5 \nabla^{(i}\overset{[+1]}{\phi}{}^{s)} + 2G\overset{[+1]}{\text{э}}{}^{isj}\overset{[-2]}{c_1} g_{jk}\overset{[+1]}{\phi}{}^{k} - G\overset{[-2]}{c_1} g_{jk}\overset{[+1]}{\text{э}}{}^{isj}\overset{[+1]}{\text{э}}{}^{kml}\nabla_m u_i +$$
$$+\frac{1}{4} G\overset{[-1]}{L} c_6 \overset{[+1]}{\text{э}}{}^{isj}\overset{[-1]}{\text{э}}{}_{jkm}\nabla^{(k}\overset{[+1]}{\phi}{}^{m)}, \qquad (40)$$

$$\overset{[-1]}{\mu}{}_{is} = 2G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}(c_3 g_{is} g_{lm} + g_{il} g_{sm})\nabla^{(l}\overset{[+1]}{\phi}{}^{m)} + G\overset{[-1]}{L} c_4 g_{is} g^{lm}\nabla_{(l}u_{m)} + G\overset{[-1]}{L} c_5 \nabla_{(i}u_{s)} +$$
$$+\frac{1}{2} G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\overset{[+2]}{c_2} g^{jk}\overset{[-1]}{\varepsilon}{}_{isj}\overset{[-1]}{\varepsilon}{}_{kjm}\nabla^{[j}\overset{[+1]}{\phi}{}^{m]} + \frac{1}{2}\overset{[-1]}{\varepsilon}{}_{isj} G\overset{[-1]}{L} c_6 \overset{[+1]}{\phi}{}^{j} - \frac{1}{4} G\overset{[-1]}{L} c_6 \overset{[-1]}{\varepsilon}{}_{isj}\overset{[+1]}{\varepsilon}{}^{jkl}\nabla_k u_i.$$

Выберем систему координат, подчинив ее условию

$$|e| = 1, \qquad (41)$$

то есть

$$e = \operatorname{sgn} e. \qquad (42)$$

В трехмерном пространстве таких систем существует бесконечно много, например декартовы лево- и правоориентированные системы координат. Для таких систем координат особенно просто получаются уравнения движения в перемещениях и микровращениях, поскольку

$$c_1 = \overset{[-2]}{c_1}, \quad c_2 = \overset{[+2]}{c_2}, \quad L = \overset{[-1]}{L}\operatorname{sgn} e, \quad l_i = \overset{[-1]}{l_i}\operatorname{sgn} e, \quad \phi^i = \overset{[+1]}{\phi}{}^{i}\operatorname{sgn} e,$$
$$\overset{[+1]}{\text{э}}{}^{ikl} = \overset{[-1]}{\text{э}}{}_{ikl} = \text{э}^{ikl} = \text{э}_{ikl}, \quad \mathrm{I} = \overset{[-2]}{\mathrm{I}}. \qquad (43)$$

Кроме того, удобно ввести обозначения

$$c'_4 = c_4 + \frac{1}{2}c_5 + \frac{1}{4}c_6, \quad c'_5 = +\frac{1}{2}c_5 - \frac{1}{4}c_6, \quad c'_6 = -c_6, \quad f^i = \frac{X^i}{\rho}, \quad \overset{[-1]}{l_i} = \frac{\overset{[-1]}{Y_i}}{\rho}. \qquad (44)$$

Окончательно, учитывая (42), (43) и (44), получаем

$$G\Big[\big(1+\overset{[-2]}{c_1}\big)\nabla^s\nabla_s u^i + \big(1-\overset{[-2]}{c_1}+2\nu(1-2\nu)^{-1}\big)\nabla^i\nabla_k u^k + 2\overset{[-2]}{c_1}\text{э}^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}_l \pm$$
$$\pm L c'_4 \nabla^i\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^{k} \pm L c'_5 \nabla^k\nabla_k \overset{[+1]}{\phi}{}^{i}\Big] = -\rho(f^i - \partial u^i),$$
$$G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}\Big[\big(1+\overset{[+2]}{c_2}\big)\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}{}_i + \big(1-\overset{[+2]}{c_2}+2c_3\big)\nabla_i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^{k} + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c'_4 \nabla_i\nabla^k u_k + \qquad (45)$$
$$+\overset{[-1]}{L}{}^{-1} c'_5 \nabla^k\nabla_k u_i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1} c'_6 \text{э}_{isl}\overset{[+1]}{\phi}{}^{l}\Big] - 2G\overset{[-2]}{c_1}\big(2\overset{[+1]}{\phi}{}_i - \text{э}_{ikl} g^{ks}\nabla_s u^l\big) = -\rho\big(\overset{[-1]}{l_i} - \overset{[-2]}{\mathrm{I}}\,\partial\overset{[+1]}{\phi}{}_i\big),$$

где «+» соответствует правоориентированной системе координат, а знак «–» – левоориентированной.

Заключение

Развита линейная микрополярная теория упругости в терминах относительных тензоров. Такой подход является в некотором смысле более фундаментальным, поскольку с его помощью можно всегда перейти к формулировкам в терминах абсолютных тензоров.

Заметим, что фундаментальные уравнения (45) в левоориентированной декартовой системе координат приобретают вид:

$$G\Big[\big(1+\overset{[-2]}{c}_1\big)\partial_s\partial_s u_i+\big(1-\overset{[-2]}{c}_1+2\nu(1-2\nu)^{-1}\big)\partial_i\partial_k u_k+2\overset{[-2]}{c}_1\,\ni_{ikl}\,\partial_k\overset{[+1]}{\phi}_l-$$

$$-\overset{[-1]}{L}c_4'\partial_i\partial_k\overset{[+1]}{\phi}_k-\overset{[-1]}{L}c_5'\partial_k\partial_k\overset{[+1]}{\phi}_i\Big]=-\rho(f_i-\partial u_i),$$

$$\overset{[-1]}{G}\,\overset{[-1]}{L}\,L\Big[\big(1+\overset{[+2]}{c}_2\big)\partial_s\partial_s\overset{[+1]}{\phi}_i+\big(1-\overset{[+2]}{c}_2+2c_3\big)\partial_i\partial_k\overset{[+1]}{\phi}_k+\overset{[-1]^{-1}}{L}c_4'\partial_i\partial_k u_k+$$

$$+\overset{[-1]^{-1}}{L}c_5'\nabla^k\nabla_k u_i+\overset{[-1]^{-1}}{L}c_6'\ni_{isl}\overset{[+1]}{\phi}{}^l\Big]-2G\overset{[-2]}{c}_1\big(2\overset{[+1]}{\phi}_i-\ni_{ikl}\,g^{ks}\nabla_s u^l\big)=-\rho\big(\overset{[-1]}{l}_i-\overset{[-2]}{\mathrm{I}}\,\partial\overset{[+1]}{\phi}_i\big),$$

Проведено обсуждение фундаментальных тензоров, характеризующих метрические и ориентационные свойства трехмерного пространства. Дано представление о фундаментальном ориентирующем псевдоскаляре.

Приведены основные формулы и понятия, касающиеся алгебры и дифференцирования относительных тензоров произвольного ранга. Установлена процедура перехода от относительных тензоров к абсолютным, характерная для микрополярных теорий.

Аппарат относительных тензоров применен к исследованию кинематики и динамики микрополярного континуума. Указаны веса основных относительных тензоров микрополярной теории упругости.

Предложена форма упругого потенциала для линейной гемитропной микрополярной среды в терминах относительных определяющих тензоров и определяющих псевдоскаляров.

Получена конечная форма динамических уравнений в перемещениях и микровращениях с учетом их псевдотензорного характера. Исследование ограничено гемитроптными средами.

Список литературы

1. *Mechanics of Generalized Continua: On Hundred Years After the Cosserats. Advances in Mathematics and Mechanics*. Vol. 21. Eds. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. Berlin: Springer, 2010. 338 p.

2. *Mechanics of Generalized Continua. Advanced Structured Matherials.* Vol. 7. Eds. H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 350 p.

3. *Mechanics for Materials and Technologies. Advanced Structured Matherials*. Vol. 46. Eds. H. Altenbach, R.V. Goldstein, E. Murashkin. Cham: Springer, 2017. 447 p.

4. *Generalized Models and Non-Classical Approaches in Complex Materials. Advanced Structured Matherials*. Vol. 89, 90. Eds. H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, Th. Michelitsch. Cham: Springer, 2018. 760 p.; 328 p.

5. *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. A Tribute to Wolfgang H. Muller. Advanced Structured Matherials.* Vol. 108. Eds. B.E. Abali, H. Altenbach, F. dell'Isola, V. Eremeyev, A. Ochsner. Cham: Springer, 2019. 564 p.

6. *High Gradient Materials and Related Generalized Continua. Advanced Structured Matherials.* Vol. 120. Eds. H. Altenbach, W.H. Muller, B.E. Abali. Cham: Springer, 2019. 232 p.

7. *Dynamics, Strength of Materials and Durability in Multiscale Mechanics. Advanced Structured Matherials.* Vol. 137. Eds. F. dell'Isola, L. Igumnov. Cham: Springer, 2021. 404 p.

8. *Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Matherials*. Vol. 141. Eds. H. Altenbach, V.A. Eremeyev, L.A. Igumnov. Cham: Springer, 2021. 500 p.

9. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory. Encyclopedia of Physics*. Vol. 1. Ed. S. Flügge. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer, 1960. P. 226–902. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

10. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. *Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты*. М.: Физматлит, 2009. 156 с.

11. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика*. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2009. 328 с.

12. Ricci-Curbastro G., Hermann R., Ricci M.M.G., Levi-Civita T. *Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper*. Brookline: Mat. Sci. Press, 1975. 261 p.

13. Схоутен Я.А. *Тензорный анализ для физиков*. М.: Наука. 1965. 456 с.

14. Сокольников И. С. *Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред*. М.: Наука, 1971. 376 с.

15. Maugin G.A. *Non-Classical Continuum Mechanics*. Singapore: Springer Verlag, 2017. 259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.

16. Maugin G.A. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. Amsterdam–New York–Oxford–Tokyo: Elsevier, 1988. 598 p.

17. Гуревич Г.Б. *Основы теории алгебраических инвариантов*. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.

18. Levi-Civita T. *The Absolute Differential Calculus* (*Calculus of Tensors*). London – Glasgow: Blackie & Son Limited, 1927. 450 p.

19. Veblen O., Thomas T.Y. Extensions of relative tensors. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1924. Vol. 26. No 3. P. 373–377. https://www.jstor.org/stable/1989146.

20. Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966. 648 с.

21. Рашевский П. К. *Риманова геометрия и тензорный анализ*. М.: Наука, 1967. 664 с.

22. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.

23. Radayev Yu.N., Kovalev V.A. On plane thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 23 № 3. С. 464–474. DOI: 10.14498/vsgtu1689.

24. Радаев Ю.Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 22. №3. С. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635.

25. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. М: Наука, 1974. 432 с.

References

1. *Mechanics of Generalized Continua: On Hundred Years After the Cosserats. Advances in Mathematics and Mechanics*. Vol. 21. Eds. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. Berlin. Springer. 2010. 338 p.

2. *Mechanics of Generalized Continua. Advanced Structured Matherials.* Vol. 7. Eds. H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag. 2011. 350 p.

3. *Mechanics for Materials and Technologies. Advanced Structured Matherials*. Vol. 46. Eds. H. Altenbach, R.V. Goldstein, E. Murashkin. Cham. Springer. 2017. 447 p.

4. *Generalized Models and Non-Classical Approaches in Complex Materials. Advanced Structured Matherials*. Vol. 89, 90. Eds. H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, Th. Michelitsch. Cham. Springer. 2018. 760 p.; 328 p.

5. *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics. A Tribute to Wolfgang H. Muller. Advanced Structured Matherials.* Vol. 108. Eds. B.E. Abali, H. Altenbach, F. dell'Isola, V. Eremeyev, A. Ochsner. Cham. Springer. 2019. 564 p.

6. *High Gradient Materials and Related Generalized Continua. Advanced Structured Matherials.* Vol. 120. Eds. H. Altenbach, W.H. Muller, B.E. Abali. Cham. Springer. 2019. 232 p.

7. *Dynamics, Strength of Materials and Durability in Multiscale Mechanics. Advanced Structured Matherials.* Vol. 137. Eds. F. dell'Isola, L. Igumnov. Cham. Springer. 2021. 404 p.

8. *Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Matherials*. Vol. 141. Eds. H. Altenbach, V.A. Eremeyev, L.A. Igumnov. Cham. Springer. 2021. 500 p.

9. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. In: *Principles of Classical Mechanics*

and Field Theory. Encyclopedia of Physics. Vol. 1. Ed. S. Flügge. Berlin. Göttingen. Heidelberg. Springer. 1960. P. 226–902. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

10. Kovalev V.A., Radaev Yu.N. *Elementy teorii polya: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [*Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and GeometricInvariants*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2009. 156 p. (In Russian).

11. Kovalev V. A., Radaev Yu. N. *Volnovye zadachi teorii polya i termomekhanika* [*Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics*]. Saratov. SGU Publ. 2009. 328 p. (in Russian).

12. Ricci-Curbastro G., Hermann R., Ricci M.M.G., Levi-Civita T. *Ricci and Levi-Civita's Tensor Analysis Paper*. Brookline. Mat. Sci. Press. 1975. 261 p.

13. Schouten J.A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford. Clarendon Press. 434 p.

14. Sokolnikoff I.S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. New York. John Wiley & Sons Inc. 1964. 361 p.

15. Maugin G.A. *Non-Classical Continuum Mechanics*. Singapore. Springer-Verlag. 2017. 259 p. DOI: 10.1007/978-981-10-2434-4.

16. Maugin G.A. *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. Amsterdam. New York. Oxford. Tokyo. Elsevier. 1988. 598 p.

17. Gurevich G.B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants.* Groningen. Noordhoff. 1964. 429 p.

18. Levi-Civita T. *The Absolute Differential Calculus* (*Calculus of Tensors*). London. Glasgow. Blackie & Son Limited. 1927. 450 p.

19. Veblen O., Thomas T.Y. Extensions of relative tensors. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1924. Vol. 26. No 3. P. 373–377. https://www.jstor.org/stable/1989146.

20. Rozenfeld B.A. *Mnogomernye prostranstva* [*Multidimensional Spaces*]. Moscow. Nauka Publ. 1966. 648 p. (In Russian).

21. Rashevskiy P.K. *Rimanova geometriya i tenzornyy analiz* [*Riemannian Geometry and Tensor Analysis*]. Moscow. Nauka Publ. 1964. 664 p. (In Russian).

22. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford. Pergamon Press. 1986. 383 p.

23. Radayev Yu.N., Kovalev V.A. On plan e thermoelastic waves in hemitropic micropolar continua. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences.* 2019. Vol. 23. No 3. P. 464–474. DOI: 10.14498/vsgtu1689.

24. Radayev Yu.N. Pravilo mnozhiteley v kovariantnykh formulirovkakh mikropolyarnykh teoriy mekhaniki kontinuuma [The rule of factors in covariant formulations of micropolar theories of continuum mechanics]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [*Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences.*]. 2018. Vol. 22. No 3. P. 504–517. DOI: 10.14498/vsgtu1635 (In Russian).

25. Arnold V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki* [*Mathematical Methods of Classical Mechanics*]. Moscow. Nauka Publ. 1974. 432 p. (In Russian).

PSEUDOTENSOR FORMULATION OF THE MECHANICS OF HEMITROPIC MICROPOLAR MEDIA

Radayev Yu.N., Murashkin E.V.

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

The possibility of applications of relative tensors concepts to the mechanics of micropolar continuum and, in particular, for the hemitropic micropolar continua is considered. The fundamental tensors and orienting relative scalars in three-dimensional space are introduced. Permutation symbols and absolute Levi-Civita tensors are investigated in further details. Algebraic and differential properties of the relative tensors are discussed. The weights of the fundamental kinematic tensors are determined. The wryness tensor and the asymmetric strain tensor are constructed in terms of the vectors of micro-rotation and displacements. Notions of force and couple traction vectors, associated force and associated couple stress vector, force and couple stresses tensors are discussed in the frameworks of relative tensors algebra. The weights of the basic micropolar elasticity tensors are determined and discussed. The constitutive form of the micropolar elastic potential is introduced as an absolute scalar in order to obtain micropolar constitutive equations. In the linear case, the elastic potential is a quadratic form whose coefficients are pseudoscalars. The weights of the constitutive pseudoscalars are calculated. The dimensionless constitutive micropolar constants and constitutive constants with physical dimensions are discriminated. Statics and dynamics of micropolar elastic continua are developed in terms of relative tensors. Dynamic equations involving displacements and microrotations in the case of semi-isotropic (hemitropic) symmetry are derived and represented by the pseudotensor technique. The paper can be considered as a script of fundamental formulas and concepts related to the algebra and differentiation of relative tensors of arbitrary rank.

Keywords: relative tensor, orienting pseudoscalar, microrotation, displacement, micropolar hemitropic continuum.