

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-3-377-389

МЕТОД РАСПАДА РАЗРЫВОВ В ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИКЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД*

© 2020 г.

Абузьяров К.М.

*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

abouziar@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 25.09.2019

Представлена численная методика расчета трехмерных процессов ударного взаимодействия упругопластических тел с большими перемещениями и деформациями, основанная на методе распада разрывов, по схеме Годунова. Для интегрирования уравнений динамики упругопластической среды используется принцип расщепления по пространству и по физическим процессам. Получены и приведены решения задачи распада разрыва для упругой среды в случае произвольного напряженного состояния, которые используются на этапе «предиктор» схемы Годунова. Описана модификация схемы, позволяющая получать решения в областях гладкости со вторым порядком точности на компактном шаблоне для подвижных эйлерово-лагранжевых сеток. Модификация производится путем сближения областей влияния дифференциальной и разностной задач при распаде произвольного разрыва. Этап «корректор» остается неизменным для схемы как первого, так и второго порядка точности. Используются три вида разностных сеток. Первая – подвижная поверхностная сетка – состоит из непрерывного набора треугольников, ограничивающих и сопровождающих движение тел; размеры и количество треугольников в процессе деформирования и перемещения тела могут меняться. Вторая – регулярная неподвижная эйлерова сетка – ограничена поверхностной сеткой; отдельно строится для каждого тела; на этой сетке происходит интегрирование уравнений; количество ячеек в этой сетке может меняться при перемещении тела. Третья сетка – набор локальных эйлерово-лагранжевых сеток, привязанных к каждому подвижному треугольнику поверхности со стороны тел и позволяющих определять параметры на граничных и контактных поверхностях. Значения недоопределенных параметров вблизи контактных границ на всех видах сеток находятся интерполированием. Сравнение полученных решений с известными решениями по эйлерово-лагранжевым и лагранжевым методикам, а также с экспериментальными данными показывает работоспособность и достаточную точность представленной трехмерной методики.

Ключевые слова: упругопластическая среда, моделирование, эйлерово-лагранжев подход, схема Годунова, распад разрыва, многосеточный алгоритм, интерполяция, высокоскоростной удар.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты №19-58-53005 ГФЕН_а, №19-08-00320 А).

Введение

Схема С.К. Годунова [1], основанная на использовании точного решения задачи распада разрыва для интегрирования законов сохранения при моделировании быстротекающих процессов в газовой динамике, допускает использование лагранжевых, эйлерово-лагранжевых и эйлеровых подходов. Популярность схемы во многом объясняется применением точного решения задачи распада разрыва, что дает возможность выделять ударные фронты и контактные разрывы и привязывать к ним подвижные расчетные сетки. Кроме того, схема обладает монотонностью на разрывных решениях. Известны многочисленные модификации схемы при моделировании различных физических процессов в упругих [2, 3], упругопластических [4–6] и многофазных [7] средах. Основным недостатком схемы Годунова – значительная нерегулируемая схемная вязкость, обусловленная первым порядком аппроксимации. В связи с этим были предприняты попытки повысить точность схемы различными способами. Для задач гидрогазодинамики – это модификации [8–10], в которых повышение точности достигается увеличением разностного шаблона. В публикациях [11, 12] был предложен метод повышения точности схемы С.К. Годунова, не требующий увеличения разностного шаблона при использовании лагранжевых и эйлерово-лагранжевых подходов. Повышение порядка аппроксимации до второго достигается за счет сближения областей влияния дифференциальной и разностной задач на неравномерной подвижной сетке. Подходы к повышению точности схемы С.К. Годунова для решения упругопластических задач изложены в статьях [12–14]. Почти все отмеченные выше результаты в решении упругопластических задач получены в двумерном приближении.

В настоящей статье излагается модификация схемы С.К. Годунова повышенной точности для решения трехмерных динамических упругопластических задач.

Основные уравнения

Система уравнений, описывающая адиабатическое нестационарное упругопластическое деформирование сплошной среды, при отсутствии вязкости и теплопроводности в эйлеровой декартовой системе координат $Oxyz$ имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{g} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{h} = \mathbf{k}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \\ s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ s_{xy} \\ s_{xz} \\ s_{yz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - s_{xx} \\ \rho uv - s_{xy} \\ \rho uw - s_{xz} \\ (e + p - s_{xx})u - s_{xy}v - s_{xz}w \\ u(s_{xx} - 4\mu/3) \\ u(s_{yy} + 2\mu/3) \\ u(s_{zz} + 2\mu/3) \\ us_{xy} - \mu v \\ us_{xz} - \mu w \\ us_{yz} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - s_{xy} \\ \rho v^2 + p - s_{yy} \\ \rho vw - s_{yz} \\ (e + p - s_{yy})v - s_{xy}u - s_{yz}w \\ v(s_{xx} + 2\mu/3) \\ v(s_{yy} - 4\mu/3) \\ v(s_{zz} + 2\mu/3) \\ vs_{xy} - \mu u \\ vs_{xz} \\ vs_{yz} - \mu w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - s_{xz} \\ \rho vw - s_{yz} \\ \rho w^2 + p - s_{zz} \\ (e + p - s_{zz})w - s_{yz}v - s_{xz}u \\ w(s_{xx} + 2\mu/3) \\ w(s_{yy} + 2\mu/3) \\ w(s_{zz} - 4\mu/3) \\ ws_{xy} \\ ws_{xz} - \mu u \\ ws_{yz} - \mu v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_{xx} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + s_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + s_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda s_{xx} \\ s_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + s_{yy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + s_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \lambda s_{yy} \\ s_{xz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + s_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + s_{zz} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \lambda s_{zz} \\ s_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (s_{xx} - s_{yy}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} s_{xz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} s_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda s_{xy} \\ s_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (s_{xx} - s_{zz}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} s_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} s_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \lambda s_{xz} \\ s_{yz} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} (s_{yy} - s_{zz}) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} s_{xz} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} s_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \lambda s_{yz} \end{bmatrix}$$

Система (1) замыкается уравнением состояния (УРС) в форме

$$e = \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right), \quad \varepsilon = \varepsilon(p, \rho). \quad (2)$$

В соотношениях (1), (2): p – давление, ρ – плотность, u, v, w – компоненты скоростей по x, y и z ; ε – внутренняя энергия единицы массы, e – полная механическая энергия единицы объема сплошной среды, $s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}, s_{xy}, s_{xz}, s_{yz}$ – компоненты диватора тензора истинных напряжений Эйлера, μ – модуль сдвига. Первые пять уравнений системы (1) представляют собой законы сохранения массы, импульса и энергии. Следующие шесть уравнений – физические соотношения упругости и пластичности с учетом поворота тензора напряжений в эйлеровых координатах (производная Яумана), записанные в дифференциальной форме. К системе (1), (2) добав-

ляются начальные и краевые условия. В качестве критерия перехода из упругого состояния в пластическое состояние используется условие текучести Мизеса. Интегральная форма системы (1), на базе которой строится разностная схема, имеет вид

$$\iiint_{\omega} \mathbf{u} dx dy dz + \mathbf{f} dy dz dt + \mathbf{g} dx dz dt + \mathbf{h} dx dy dt = \iiint_{\Omega} \mathbf{k} dx dy dz dt, \quad (3)$$

где Ω – любой замкнутый объем, поверхность ω которого гомеоморфна сфере в четырехмерном пространстве (x, y, z, t) . Конечно-разностные соотношения для системы (3) строятся аналогично [1]. Область численного решения покрывается регулярной неподвижной сеткой, состоящей из прямоугольных параллелепипедов.

Решение линеаризованной задачи о распаде разрыва

Решение задачи о распаде разрыва проводится на основе упрощенной системы уравнений в упругом приближении, получаемой из (1), если положить $\lambda = 0$. Исходную систему (1), (2) линеаризуем в окрестности некоторого состояния и предполагаем, что движение происходит вдоль оси x и все неизвестные функции зависят только от x . Получим систему из одиннадцати уравнений. После введения автомодельной переменной $\xi = x/t$ система преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [15]. Нетривиальные решения этой системы

$$\begin{aligned} \xi_1 = u + a, \quad \xi_2 = u - a, \quad \xi_3 = u + \beta_y, \quad \xi_4 = u - \beta_y, \quad \xi_5 = u + \beta_z, \quad \xi_6 = u - \beta_z, \\ \xi_7 = \xi_8 = \xi_9 = \xi_{10} = \xi_{11} = u \end{aligned}$$

представляют собой скорости слабых разрывов, образующих устойчивую конфигурацию. Здесь

$$\begin{aligned} a^2 = c^2 + \frac{4\mu/3 - fs_{xx}}{\rho}, \quad \beta_y = \sqrt{\frac{\mu + 3s_{xx}/4}{\rho} - 0,5\sqrt{\frac{0,25(s_{yy} - s_{zz})^2 + s_{yz}^2}{\rho^2}}}, \\ \beta_z = \sqrt{\frac{\mu + 3s_{xx}/4}{\rho} + 0,5\sqrt{\frac{0,25(s_{yy} - s_{zz})^2 + s_{yz}^2}{\rho^2}}}, \end{aligned}$$

c – адиабатическая скорость звука, параметр f задается равным нулю.

В плоскости (x, t) траектории разрывов (характеристики) изображаются лучами, исходящими из точки $x = x_0$, и делят полуплоскость $t > 0$ на 8 зон (рис. 1).

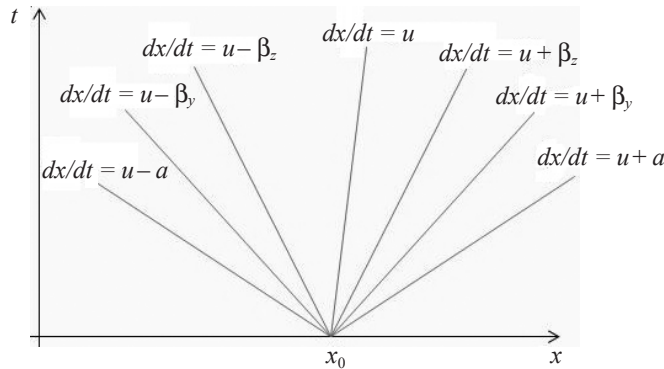


Рис. 1

Соотношения на этих характеристиках R_l , $l = \overline{1, 11}$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
R_1 &= [\rho a]u - \left[a(1+f) \frac{s_{xy}(a^2 - b_3^2) - s_{xz} \cdot 0,5s_{yz} / \rho}{(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25s_{yz}^2 / \rho^2} \right] v - \\
&\quad - \left[a(1+f) \frac{s_{xz}(a^2 - b_2^2) - s_{xy} \cdot 0,5s_{yz} / \rho}{(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25s_{yz}^2 / \rho^2} \right] w + \\
&\quad + p - s_{xx} + \left[(1+f) \frac{\rho s_{xy}(a^2 - b_3^2) - s_{xz} \cdot 0,5s_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25s_{yz}^2} \right] s_{xy} + \\
&\quad + \left[(1+f) \frac{\rho s_{xz}(a^2 - b_2^2) - s_{xy} \cdot 0,5s_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25s_{yz}^2} \right] s_{xz}, \\
b_2^2 &= \frac{\mu + 0,5(s_{xx} - s_{yy})}{\rho}, \quad b_3^2 = \frac{\mu + 0,5(s_{xx} - s_{zz})}{\rho}, \\
R_2 &= [-\rho a]u + \left[\rho a(1+f) \frac{\rho s_{xy}(a^2 - b_3^2) - s_{xz} \cdot 0,5s_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25s_{yz}^2} \right] v + \\
&\quad + \left[\rho a(1+f) \frac{\rho s_{xz}(a^2 - b_2^2) - s_{xy} \cdot 0,5s_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25s_{yz}^2} \right] w + \\
&\quad + p - s_{xx} + \left[(1+f) \frac{\rho s_{xy}(a^2 - b_3^2) - s_{xz} \cdot 0,5s_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25s_{yz}^2} \right] s_{xy} + \\
&\quad + \left[(1+f) \frac{\rho s_{xz}(a^2 - b_2^2) - s_{xy} \cdot 0,5s_{yz}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0,25s_{yz}^2} \right] s_{xz}, \\
R_3 &= [\beta_y \rho]v - [\beta_y \rho C]w - s_{xy} + [C]s_{xz}, \\
R_4 &= -[\beta_y \rho]v + [\beta_y \rho C]w - s_{xy} + [C]s_{xz}, \\
R_5 &= [\beta_z \rho C]v - [\beta_z \rho]w - [C]s_{xy} + s_{xz}, \\
C &= \sqrt{1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4s_{yz}^2 / (s_{yy} - s_{zz})^2}}}}, \\
R_6 &= -[\beta_z \rho C]v - [\beta_z \rho]w - Cs_{xy} + s_{xz}, \\
R_7 &= [a^2] \rho - p + s_{xx} + \left[(1+f) \frac{s_{xy} \rho b_3^2 - 0,5s_{yz} s_{xz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25s_{yx}^2} \right] s_{xy} + \\
&\quad + \left[(1+f) \frac{\rho b_2^2 s_{xz} + 0,5s_{yz} s_{xy}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25s_{yz}^2} \right] s_{xz}, \\
R_8 &= \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \right] \rho + s_{xx} + \left[\frac{s_{xy} \rho b_3^2 + 0,5s_{yz} s_{xz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25s_{yz}^2} \right] s_{xy} + \left[\frac{\rho b_2^2 s_{xz} + 0,5s_{yz} s_{xy}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25s_{yz}^2} \right] s_{xz},
\end{aligned}$$

$$R_9 = \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \right] \rho + s_{yy} + \left[\frac{-s_{xy} \rho b_3^2}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25 s_{yz}^2} \right] s_{xy} + \left[\frac{-0,5 s_{yz} s_{xy}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25 s_{yz}^2} \right] s_{xz},$$

$$R_{10} = \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{\mu}{\rho} \right] \rho + s_{zz} + \left[\frac{-0,5 s_{yz} s_{xz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25 s_{yz}^2} \right] s_{xy} + \left[\frac{-\rho b_2^2 s_{xz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25 s_{yz}^2} \right] s_{xz},$$

$$R_{11} = \left[\frac{-0,5 s_{xz} \rho b_3^2 - 0,25 s_{yz} s_{xy}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25 s_{yz}^2} \right] s_{xy} + \left[\frac{-0,5 \rho b_2^2 s_{xy} - 0,25 s_{yz} s_{xz}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0,25 s_{yz}^2} \right] s_{xz} + s_{yz}.$$

Здесь величины в квадратных скобках представляют собой коэффициенты, полученные путем линеаризации уравнений и определяемые по усредненным параметрам в ячейках.

Схема повышенной точности

Схема второго порядка точности строится так же, как и для уравнений газовой динамики [11]. Для этого перед решением задачи о распаде разрыва требуется предположить линейное распределение инвариантов Римана [12] между центрами разностных ячеек. Координаты точек интерполяции определяются как границы областей влияния инвариантов на положение грани в момент времени $\Delta t/2$ (рис. 2):

$$x_n = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} - (c_n - w) \frac{\Delta t}{2}, \quad n = 1, \dots, 11,$$

где w – скорость грани, $c_1 = u + a$, $c_2 = u - a$, $c_3 = u + \beta_y$, $c_4 = u - \beta_y$, $c_5 = u + \beta_z$, $c_6 = u - \beta_z$, $c_7 = c_8 = c_9 = c_{10} = c_{11} = u$.

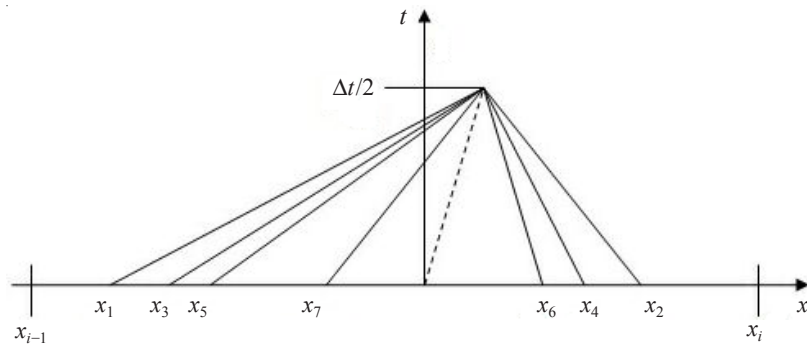


Рис. 2

Отметим интерполированные инварианты индексом m , тогда

$$R_n^m = R_n^{i-1} + \frac{R_n^i - R_n^{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x_n - x_{i-1}), \quad n = \overline{1, 11}.$$

Полученные значения инвариантов используются для определения «поточковых» величин. Этап численного интегрирования уравнений (этап «корректор») остается неизменным. Как показано в статье [16], использование задачи распада разрыва в таком упругом приближении на этапе «предиктор» разностной схемы и учет пластического деформирования на этапе «корректор» сохраняет второй порядок точности в целом.

Многосеточный алгоритм расчета задач с граничными поверхностями

Многосеточный алгоритм расчета контактного взаимодействия сред с конструкцией в эйлеровых переменных предложен в [17] и состоит из последовательности следующих этапов:

1) конструкции и среды задаются в виде поверхностей из наборов треугольников с необходимой точностью – в виде файлов STL-формата, содержащих координаты внешних нормалей и вершин треугольников;

2) каждая расчетная область с криволинейными границами заключается в окаймляющий прямоугольный параллелепипед и покрывается регулярной декартовой сеткой. Получаем четыре вида ячеек для расчетной области: первый вид – ячейки, секущиеся треугольниками поверхности, или граничные ячейки; второй вид – ячейки снаружи поверхности; третий и четвертый виды – ячейки внутри поверхности, для интегрирования которых хватает или не хватает разностного шаблона из целых ячеек, находящихся внутри поверхности [12];

3) на каждом треугольнике поверхности строится локальная декартова сетка внутри объема от поверхности. Размеры ячеек этой локальной 3D-сетки берутся близкими к декартовой. В случае контакта треугольника с другой подобластью локальная сетка симметрично достраивается наружу от плоскости треугольника. Такого шаблона достаточно для интегрирования центральных ячеек со вторым порядком точности по модифицированной схеме С.К. Годунова. Значения параметров локальной сетки определяются интерполяцией параметров из основной сетки. Рассчитывается задача распада разрыва на контактных границах сред. Результатом ее решения являются скорости и силы на половинном временном слое в центре треугольника. С нормальной скоростью двигаем контактную границу и получаем локальную сетку на новом временном слое. Проводим стандартное интегрирование параметров в подвижных декартовых сетках;

4) с использованием скоростей в центре каждого треугольника, полученных из решения задачи распада разрыва на этапе 3), вычисляем скорости в вершинах треугольников STL-файла с весами, пропорциональными площадям треугольников. Получаем положение поверхности на новом временном слое (новый STL-файл);

5) в ячейки вида 4 интерполируем параметры из ячеек вида 3 и граничных ячеек;

6) производим перестройку базисного параллелепипеда в соответствии с новым STL-файлом.

Алгоритм реализован на супер-ЭВМ «Лобачевский» Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Тестовые расчеты

1. Удар пластины по полупространству (тест Уилкинса). Рассматривается задача высокоскоростного удара пластины о покоящееся полупространство [18]. Материал пластины и преграды алюминий, толщина пластины 5 мм, левая поверхность пластины свободна, внешнее давление 0,1 МПа. Для алюминия используется уравнение состояния:

$$P(\rho) = 72 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) + 172 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)^2 + 40 \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)^3,$$

где $P(\rho)$ – гидростатическое давление в ГПа, $\rho_0 = 2700 \text{ кг/м}^3$, модуль сдвига $\mu = 24,8 \text{ ГПа}$, предел текучести $\sigma_S = 2,2976 \text{ ГПа}$. Расчеты проводились для скоростей соударения $0,8 \text{ км/с}$ на равномерной разностной сетке $500 \times 500 \times 500$ ячеек (10 ячеек на миллиметр). По толщине пластины принималось 50 ячеек. Начальное положение контактной границы $x_k = 0,5 \text{ см}$. На рис. 3 показано распределение нормальных напряжений σ_n в пластине (а) и полупространстве (б) в различные моменты времени. Сплошной линией показано решение по схеме С.К. Годунова второго порядка точности, пунктиром – первого порядка точности, штрихпунктиром – по схеме Уилкинса, имеющей второй порядок точности [18]. Наблюдается хорошее соответствие решения по схеме второго порядка точности с решением Уилкинса. Решение по схеме первого порядка точности недостаточно точно описывает амплитуды волновых фронтов и контактных разрывов.

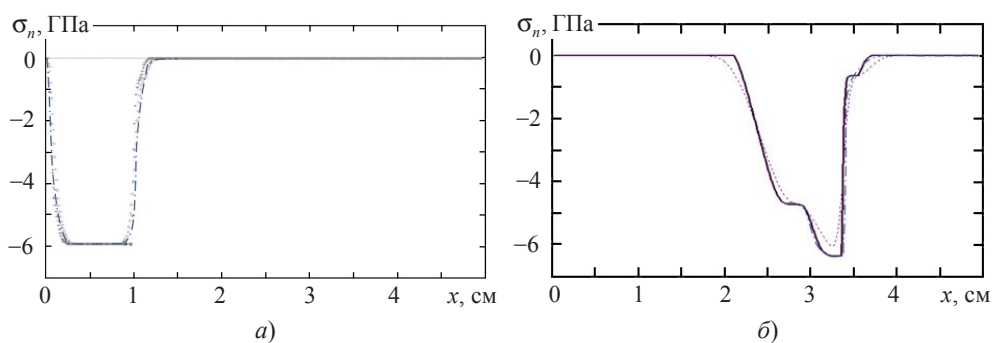


Рис. 3

2. Моделирование вынужденных осесимметричных колебаний упругого диска. Стальной диск высотой $H = 1,5 \text{ см}$, радиусом $R = 14,85 \text{ см}$ (рис. 4) нагружается на нижней поверхности постоянным давлением в направлении оси Oz . Свойства материала: $\rho_0 = 7,8 \text{ г/см}^3$, $E = 210 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Граничные условия: жесткое закрепление по контуру пластины, на нижней поверхности задавалось давление $p = 0,17 \text{ ГПа}$, верхняя поверхность – свободная граница, $p = 0$. Размер ячейки $0,1 \text{ см}$. Результаты расчетов по предложенной методике сравнивались с численным расчетом по LS-DYNA.

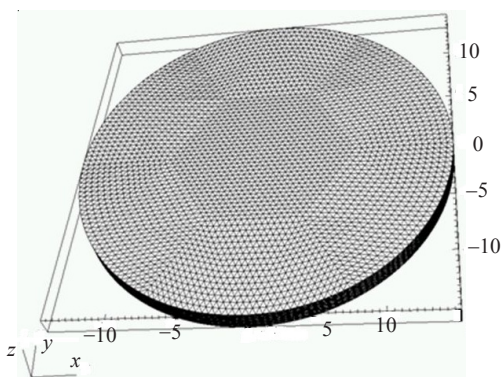


Рис. 4

На рис. 5 приведена зависимость скорости центра пластины на верхней поверхности от времени. Численное решение по схеме С.К. Годунова второго порядка точ-

ности показано красным цветом, синим цветом показано решение по LS-DYNA. Наблюдается соответствие решений по амплитудам и фазам колебаний.

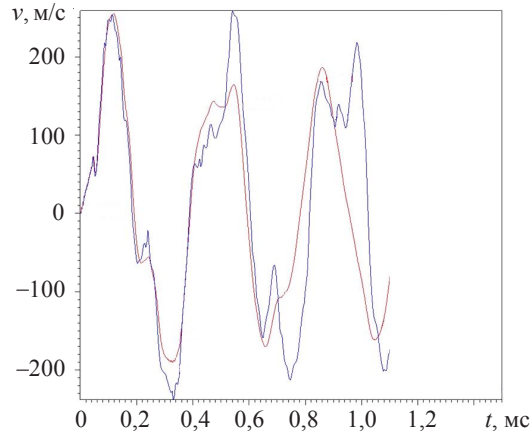


Рис. 5

3. Моделирование проникания медного ударника в алюминиевую преграду.

Медный цилиндр высотой $H = 2$ см, радиусом $R = 0,4$ см, начальная вертикальная скорость 870 м/с; алюминиевый цилиндр высотой $H_2 = 6$ см, радиусом $R_2 = 3$ см на жестком основании (рис. 6). Свойства материалов: отожженная медь $\rho_0 = 0,9$ кг/м³, объемный модуль $K = 178$ ГПа, модуль сдвига $G = 48,7$ ГПа, предел текучести $\sigma_s = 75$ МПа, отожженный алюминий $\rho_0 = 2,7$ кг/м³, объемный модуль $K = 63,9$ ГПа, модуль сдвига $G = 27$ ГПа, $\sigma_s = 80$ МПа. Предполагается идеальная пластичность обоих материалов. Размер ячейки по меди $0,011$ см, по алюминию – $0,025$ см. Результаты расчетов осесимметричной задачи сравнивались с экспериментальными данными Н.А. Златина [19]. Наблюдаются большие формоизменения как ударника, так и мишени.

На рис. 6 приведены контуры ударника и мишени в осевом сечении на моменты времени $0, 9, 21$ и 100 мкс. Момент остановки ударника $t_k = 100$ мкс и конечная глубина его проникания $h_k = 3,6$ см близки к экспериментальным значениям [19].

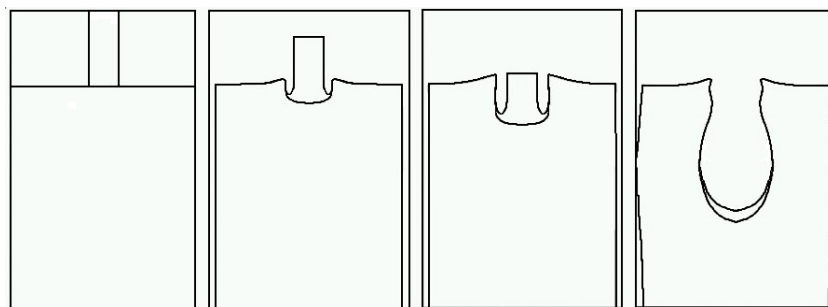


Рис. 6

На рис. 7 в безразмерных координатах красным цветом представлены результаты трехмерных расчетов, синим цветом отмечены расчеты по двумерному комплексу UPSGOD [20] по лагранжево-эйлеровой методике в подвижных криволинейных сетках, зеленым – экспериментальные результаты [19].

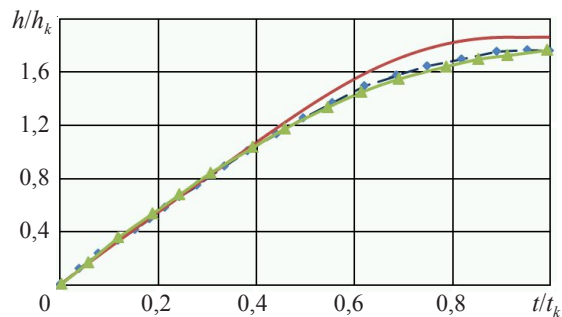


Рис. 7

На рис. 8 представлены результаты расчета трехмерной задачи с теми же параметрами ударника и преграды при ударе боковой гранью медного цилиндра с той же скоростью.



Рис. 8

Красным цветом отмечен ударник, синим – преграда. Процесс становится трехмерным, наблюдается сплющивание ударника с формированием боковой струи.

Заключение

Изложена численная методика решения трехмерных волновых упругопластических задач, основанная на модифицированной конечно-разностной схеме С.К. Годунова повышенной точности и многосеточном алгоритме расчета. Методика позволяет получать решения трехмерных задач ударного взаимодействия при больших деформациях и перемещениях в эйлеровых переменных. Сравнение полученных решений с известными решениями по эйлерово-лагранжевым и лагранжевым методикам, а также с экспериментальными данными показывает работоспособность и достаточную точность представленной трехмерной методики.

Список литературы

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. М.: Наука, 1976. 401 с.
2. Gavriluyk S.L., Favrie N., Saurel R. Modelling wave dynamics of compressible elastic materials. *Journal of Computational Physics*. 2008. Vol. 227. Iss. 5. P. 2941–2969.
3. Barton P.T., Drikaki D., Romenski E., Titarev V.A. Exact and approximate solutions of Riemann problems in non-linear elasticity. *Journal of Computational Physics*. 2009. Vol. 228. Iss. 18. P. 7046–7068.

4. Абузьяров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред. *ЖВМ и МФ*. 2000. Т. 40. №6. С. 940–953.
5. Меньшов И.С., Мищенко А.В., Серезкин А.А. Численное моделирование упругопластических течений методом Годунова на подвижных эйлеровых сетках. *Математическое моделирование*. 2013. Т. 25. С. 89–108.
6. Michael L., Nikiforakis N. A hybrid formulation for the numerical simulation of condensed phase explosives. *Journal of Computational Physics*. 2016. Vol. 316. P. 193–217. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.04.017.
7. Michael L., Nikiforakis N. A multi-physics methodology for the simulation of the two-way interaction of reactive flow and elastoplastic structural response. *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 367. P. 1–27. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.03.037.
8. Копченков В.И., Крайко А.Н. Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными. *ЖВМ и МФ*. 1983. Т. 23. №4. С. 848–859.
9. Моисеев Н.Я. Об одном способе повышения точности решений в разностных схемах, построенных на основе метода С.К. Годунова. *ВАИТ. Сер.: Методики и программы численного решения задач математической физики*. 1988. Вып. 1. С. 38–45.
10. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*. 1979. Vol. 32. P. 101–136.
11. Абузьяров М.Х., Баженов В.Г., Кочетков А.В. О новом эффективном подходе к повышению точности схемы Годунова. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения*. 1987. Вып. 35. С. 43–49.
12. Abouziarov M., Aiso H., Takahashi T. An application of conservative scheme to structure problems. *Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics: Ser. from Research Institute of Mathematics of Kyoto University*. 2004. No 1353. P. 192–201.
13. Miller G., Colella P., A high-order Eulerian – Godunov method for elastic-plastic flow in solids. *Journal of Computational Physics*. 2001. Vol. 167. No 1. P. 131–176.
14. Miller H. An iterative Riemann solver for systems of hyperbolic conservation laws, with application to hyperelastic solid mechanics. *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 193. No 1. P. 198–225.
15. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике*. М.: Наука, 1978. 688 с.
16. Кукуджанов В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений. *Изв. РАН. МТТ*. 2004. №1. С. 98–108.
17. Абузьяров К.М., Абузьяров М.Х., Зефиоров С.В. Численная методика определения взрывных нагрузок в эйлеровых переменных на пространственные конструкции при детонации твердых взрывчатых веществ. *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Т. 76. №4. С. 326–334.
18. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений. *Вычислительные методы в гидродинамике*. М.: Мир, 1967. С. 212–263.
19. Златин Н.А., Мишин Г.И. *Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях*. М.: Наука, 1974. 344 с.
20. Абузьяров М.Х., Крылов С.В., Цветкова Е.В. Моделирование гидроупругопластического взаимодействия с помощью программного комплекса UPSGOD. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 1. С. 25–32.

References

1. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya. et al. *Chislennoye resheniye mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki [Numerical Solution of Multidimensional Problems of Gas Dynamics]*. Moscow. Nauka Publ. 1976. 401 p. (In Russian).
2. Gavrilyuk S.L., Favrie N., Saurel R. Modelling wave dynamics of compressible elastic materials. *J. Comput. Phys*. 2008. Vol. 227. Iss. 5. P. 2941–2969.
3. Barton P.T., Drikaki D., Romenski E., Titarev V.A. Exact and approximate solutions of Riemann problems in non-linear elasticity. *J. Comput. Phys*. 2009. Vol. 228. Iss. 18. P. 7046–7068.

4. Abuzyarov M. Kh., Bazhenov V.G., Kotov V.L., Kochetkov A.V., Krylov S.V., Fel'dgun V.R. Metod raspada razryvov v dinamike uprugoplasticheskikh sred [The method of disintegration of discontinuities in the dynamics of elastoplastic media]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Comput. Math. Math. Phys]. 2000. Vol. 40. No 6. P. 940–953 (In Russian).
5. Menshov I.S., Mishchenko A.V., Serezhkin A.A. Chislennoye modelirovaniye uprugoplasticheskikh techeniy metodom Godunova na podvizhnykh eylerovykh setkakh [Numerical modeling of elastoplastic flows by the Godunov method on moving Euler networks]. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical Models and Computer Simulations]. 2013. Vol. 25. P. 89–108 (In Russian).
6. Michael L., Nikiforakis N. A hybrid formulation for the numerical simulation of condensed phase explosives. *J. Comput. Phys.* 2016. Vol. 316. P. 193–217. DOI: 10.1016/j.jcp.2016.04.017.
7. Michael L., Nikiforakis N. A multi-physics methodology for the simulation of the two-way interaction of reactive flow and elastoplastic structural response. *J. Comput. Phys.* 2018. Vol. 367. P. 1–27. DOI: 10.1016/j.jcp.2018.03.037.
8. Kopchenov V.I., Kraiko A.N. Monotone difference scheme of the second order for hyperbolic systems with two independent variables. *Comput. Math. Math. Phys.* 1983. Vol. 23. Iss. 4. P. 50–56. [https://doi.org/10.1016/S0041-5553\(83\)80128-1](https://doi.org/10.1016/S0041-5553(83)80128-1).
9. Moiseev N.Ya. Ob odnom sposobe povysheniya tochnosti resheniy v raznostnykh skhemakh, postroennykh na osnovе metoda S.K. Godunova [About one way to increase the accuracy of solutions in difference schemes constructed on the basis of the method of S.K. Godunov]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Metodiki i programmy chislennogo resheniya zadach matematicheskoy fiziki* [Problems of Atomic Science and Technology. Series: Methods and Programs for the Numerical Solution of Problems in Mathematical Physics]. 1988. No 1. P. 38–45 (In Russian).
10. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme V. A second order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.* 1979. Vol. 32. P. 101–136.
11. Abuziarov M.Kh., Bazhenov V.G., Kochetkov A.V. O novom effektivnom podkhode k povysheniyu tochnosti skhemy Godunova [About a new effective approach to improving the accuracy of the Godunov scheme]. *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti. Metody resheniya* [Applied Problems of Strength and Plasticity. Solution Methods]. 1987. Iss. 35. P. 43–49 (In Russian).
12. Abouziarov M., Aiso H., Takahashi T. An application of conservative scheme to structure problems. *Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics: Ser. from Research Institute of Mathematics of Kyoto University.* 2004. No 1353. P. 192–201.
13. Miller G., Colella P., A high-order Eulerian – Godunov method for elastic-plastic flow in solids. *J. Comput. Phys.* 2001. Vol. 167. No 1. P. 131–176.
14. Miller H. An iterative Riemann solver for systems of hyperbolic conservation laws, with application to hyperelastic solid mechanics. *J. Comput. Phys.* 2004. Vol. 193. No 1. P. 198–225.
15. Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniye k gazovoy dinamike* [Systems of Quasilinear Equations and their Application to Gas Dynamics]. Moscow. Nauka Publ. 1978. 688 p. (In Russian).
16. Kukudzhanov V.N. Metod rasshchepleniya uprugoplasticheskikh uravneniy [The splitting method of elastoplastic equations]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 2004. No 1. P. 98–108 (In Russian).
17. Abuziarov K.M., Abuziarov M.Kh., Zefirov S.V. Chislennaya metodika opredeleniya vzryvnykh nagruzok v eylerovykh peremennykh na prostranstvennyye konstruksii pri detonatsii tverdykh vzrychatykh veshchestv [A numerical Euler variable method for determining the explosion loads on spatial structures from the detonation of solid explosives]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2014. Vol. 76. No 4. P. 326–334 (In Russian).
18. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. In: *Methods in Computational Physics.* Vol. 3. New York. Academic Press. 1964. P. 211–263.
19. Zlatin N.A., Mishin G.I. *Ballisticheskiye ustanovki i ikh primeneniye v eksperimentalnykh issledovaniyakh* [Ballistic Installations and their Application in Experimental Research]. Moscow. Nauka Publ. 1974. 344 p. (In Russian).
20. Abouzyarov M.Kh., Krylov S.V., Tsvetkova E.V. Modelirovaniye gidrouprugoplasticheskogo vzaimodeystviya s pomoshch'yu programmogo kompleksa UPSGOD [The simulation of the hydro-elastoplastic interaction using the upsgod codes]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2013. Iss. 75. Pt. 1. P. 25–32 (In Russian).

**THE METHOD OF DECOMPOSITION OF GAPES
IN THE THREE-DIMENSIONAL DYNAMICS OF ELASTOPLASTIC MEDIA**

Abuzyarov K.M.

*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

A numerical method for calculating the three-dimensional processes of impact interaction of elastoplastic bodies with large displacements and deformations based on the method of disintegration of discontinuities according to the Godunov scheme is presented. To integrate the equations of dynamics of an elastoplastic medium, the principle of splitting in space and in physical processes is used. The Riemann's solver for an elastic medium in the case of an arbitrary stress state are obtained and presented. A modification of the scheme is described that allows one to obtain solutions in smoothness domains with a second order of accuracy on a compact template for moving Eulerian – Lagrangian grids. Three types of difference grids are used. The first – a moving surface grid – consists of a continuous set of triangles that limit and accompany the movement of bodies; the size and number of triangles in the process of deformation and movement of the body can vary. The second – a regular fixed Eulerian grid – is limited to a surface grid; separately built for each body; integration of equations takes place on this grid; the number of cells in this grid can change as the body moves. The third grid is a set of local Eulerian – Lagrangian grids attached to each moving triangle of the surface from the side of the bodies and allowing to determine the parameters on the boundary and contact surfaces. The values of the underdetermined parameters near the contact boundaries on all types of grids are interpolated. Comparison of the obtained solutions with the known solutions and with the experimental data, shows the efficiency and sufficient accuracy of the presented three-dimensional methodology

Keywords: elastoplastic medium, modeling, Eulerian – Lagrangian approach, Godunov scheme, discontinuity decay, multigrid algorithm, interpolation, high-speed impact.