УДК 539.3

О ТОЧНЫХ И ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ С МАЛОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ОСЕВОМ СЖАТИИ

В.Н. Паймушин, Т.В. Полякова

Казань

Рассматривается двумерная линеаризованная задача об устойчивости стержня (полосы) из линейно упругого ортотропного материала, находящегося под действием однородного по длине и поперечному сечению напряжения сжатия. Без введения каких-либо упрощающих предположений и при точном удовлетворении статическим граничным условиям в точках продольных кромок проведена ее редукция к одномерным уравнениям, выведенным в двух вариантах. В основу первого из них положено использование только тригонометрических функций (синуса и косинуса) по поперечной координате (SC-аппроксимации), приводящей к точным уравнениям, а при выводе уравнений второго варианта в качестве базисных используются синус, косинус (четные гармоники) и единица (SC1-аппроксимация). Показано, что в случае шарнирного опирания поперечных кромок стрежня выведенные уравнения позволяют выявить только одну практически полезную форму потери устойчивости (ФПУ), являющуюся сдвиговой.

Показано, что только при введении допущения об отсутствии нормального напряжения в продольных сечениях стрежня использование указанных аппроксимаций приводит к одномерным уравнениям, позволяющим исследовать изгибную ФПУ. Исходя из анализа результатов решений этих уравнений, найденных для стержня с шарнирно опертыми поперечными кромками, установлена теоретическая возможность потери устойчивости стержня с числом полуволн (гармоник в тригонометрических функциях) по поперечной координате больше единицы. Такими решениями определяются значения критических нагрузок, которые ниже известных в литературе и не могут быть установлены исходя из существующих в литературе уточненных вариантов теории стрежней, пластин и оболочек.

С использованием тригонометрических базисных функций при введении допущения об отсутствии нормального напряжения в продольных сечениях построен также такой вариант одномерных уравнений, который без каких-либо дополнительных преобразований допускает осуществить предельный переход к уравнению устойчивости стрежня по классической теории Кирхгофа. Показано, что уравнения этого варианта по точности эквивалентны уравнениям, построенным при указанном выше допущении на основе использования по поперечной координате SC1-аппроксимации перемещений, но отличаются от них по содержательности.

1. Постановка задачи

Предположим, что твердое деформируемое тело в виде прямоугольного параллелепипеда (стержня) со сторонами a, b, $2h$ отнесено к прямоугольной декартовой системе координат, в которой $0 \le x \le a$; $0 \le y \le b$; $0 \le z \le 2h$, причем $a >> b$, $a >> 2h$, $b > 2h$, грани $y=0, b$; $z=0, 2h$ свободны от усилий, а к граням $x=0, a$ приложено равномерно распределенное сжимающее внешнее усилие $\sigma_x^0 = -p$.

Так как в рассматриваемом случае во всех точках стержня

$$\sigma_x^0 = -p, \quad \sigma_y^0 = \sigma_z^0 = 0, \quad \tau_{xy}^0 = \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = 0, \tag{1.1}$$

то, исходя из геометрически нелинейных соотношений теории упругости, предложенных в работе [1] в непротиворечивом квадратичном варианте, для возмущенного напряженно-деформированного состояния (НДС), линеаризованного в окрестности невозмущенного напряженного состояния (1.1) и предполагаемого плосконапряженным, можно составить вариационное уравнение следующего вида:

$$\delta U = \int_0^a \int_0^{2h} (\sigma_x \delta u^x + \tau_{xz} \delta u^z + \tau_{xz}^* \delta w^x + \underline{\sigma_z \delta w^z})\, dxdz = 0, \tag{1.2}$$

$$\sigma_x = E_1^*(u^x + \nu_{31} w^z), \quad \sigma_z = E_3^*(w^z + \nu_{13} u^x), \tag{1.3}$$

$$\tau_{xz} = G_{13}(u^z + w^x), \quad \tau_{xz}^* = \tau_{xz} + \sigma_x^0 w^x, \tag{1.4}$$

$$E_i^* = E_i / (1 - \nu_{13}\nu_{31}), \quad i = 1,2; \quad E_1 \nu_{31} = E_3 \nu_{13}. \tag{1.5}$$

Здесь введены общеизвестные обозначения для упругих характеристик ортотропного упругого материала, а верхними индексами у перемещений u, w возмущенного НДС обозначены частные производные, например, $u^x = \partial u / \partial x$.

Если на возмущенные перемещения, деформации и напряжения не накладываются какие-либо ограничения (гипотезы), то на лицевых поверхностях стержня при $z=0, 2h$ должны быть выполнены статические граничные условия:

$$u^z + w^x = 0, \tag{1.6}$$

$$w^z + \nu_{13} u^x = 0. \tag{1.7}$$

Если же считать, что возмущенное состояние является плосконапряженным не только в направлении оси y, но и в направлении z, то, как часто используется в теории тонкостенных элементов конструкций, принимается гипотеза

$$\sigma_z = E_3^*(w^z + \nu_{13} u^x) = 0. \tag{1.8}$$

При этом условие (1.7) становится ненужным, в (1.2) отбрасывается подчеркнутое слагаемое, соотношения упругости (1.3) редуцируются в формулу закона Гука

$$\sigma_x = E_1 u^x. \tag{1.9}$$

Заметим, что вариационное уравнение (1.2) представимо также в виде:

$$\int_0^{2h} (\sigma_x \delta u + \tau_{xz}^* \delta w)\, dx \Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a (\tau_{xz} \delta u + \sigma_z \delta w)\, dx \Big|_{z=0}^{z=2h} - \int_0^a \int_0^{2h} (f_1 \delta u + f_3 \delta w)\, dxdy = 0, \tag{1.10}$$

из которого следуют дифференциальные уравнения нейтрального равновесия (устойчивости) в перемещениях:

$$f_1 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = E_1^* u^{xx} + G_{13} u^{zz} + (E_1^* \nu_{31} + G_{13})\, w^{xz} = 0,$$
$$f_3 = \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E_3^* w^{zz} + (E_3^* \nu_{13} + G_{13})\, u^{xz} + (G_{13} + \sigma_x^0)\, w^{xx} = 0 \qquad (1.11)$$

и граничные условия, соответствующие уравнениям (1.11).

2. Точные одномерные дифференциальные уравнения устойчивости, основанные на использовании тригонометрических базисных функций (SC-аппроксимация перемещений)

Развивая результаты, полученные в статье [2], представим входящие в (1.11) перемещения u, w в виде:

$$u = u_m \sin\lambda_m z + \tilde{u}_m \cos\lambda_m z, \quad w = w_m \sin\lambda_m z + \tilde{w}_m \cos\lambda_m z, \qquad (2.1)$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{2h}, m = 0,1,2,...,$$

где $u_m,...,\widetilde{w}_m$ – функции, зависящие только от x. Подчинив функции (2.1) граничным условиям (1.6) и (1.7), устанавливаем зависимости

$$u_m = -\frac{1}{\lambda_m}\widetilde{w}'_m, \quad w_m = -\frac{\nu_{13}}{\lambda_m}\widetilde{u}'_m, \qquad (2.2)$$

при использовании которых вместо (2.1) будем иметь

$$u = -\frac{1}{\lambda_m}\widetilde{w}'_m \sin\lambda_m z + \widetilde{u}_m \cos\lambda_m z,$$
$$w = -\frac{\nu_{13}}{\lambda_m}\widetilde{u}'_m \sin\lambda_k z + \widetilde{w}_m \cos\lambda_k z. \qquad (2.3)$$

Внеся выражения (2.3) в левые части уравнений (1.11), получим:

$$f_1 = -\left(\frac{E_1^*}{\lambda_m}\widetilde{w}'''_m + \lambda_m E_1^* \nu_{31}\widetilde{w}'_m\right)\sin\lambda_m z + \left[(E_1 - \nu_{13}G_{13})\,\widetilde{u}''_m - \lambda_m^2 \widetilde{u}_m\right]\cos\lambda_m z, \qquad (2.4)$$

$$f_3 = -\left[\frac{\nu_{13}}{\lambda_m}(G_{13} + \sigma_x^0)\widetilde{u}'''_m + \lambda_m G_{13}\widetilde{u}'_m\right]\sin\lambda_m z -$$
$$-[(E_3^*\nu_{13} - \sigma_x^0)\,\widetilde{w}''_m + \lambda_m^2 E_3^* \widetilde{w}_m]\cos\lambda_m z, \qquad (2.5)$$

а в соответствии с (1.3) и (1.4)

$$\sigma_x = E_1^*\left[-\left(\frac{1}{\lambda_m}\widetilde{w}''_m + \lambda_m \nu_{31}\widetilde{w}_m\right)\sin\lambda_m z + (1 - \nu_{13}\nu_{31})\,\widetilde{u}'_m \cos\lambda_m z\right],$$

$$\sigma_z = -E_3^*\left(\lambda_m \widetilde{w}_m + \frac{\nu_{13}}{\lambda_m}\widetilde{w}''_m\right)\sin\lambda_m z,$$

$$\tau_{xz} = G_{13}\gamma_{xz} = -G_{13}\left(\frac{\nu_{13}}{\lambda_m}\tilde{u}''_m + \lambda_m\tilde{u}_m\right)\sin\lambda_m z,$$

$$\tau^*_{xz} = -\left[\frac{\nu_{13}}{\lambda_m}\left(G_{13} + \sigma^0_x\right)\tilde{u}''_m + \lambda_m G_{13}\tilde{u}_m\right]\sin\lambda_m z + \sigma^0_x\tilde{w}'_m\cos\lambda_m z. \tag{2.6}$$

Дальнейшую редукцию исходных двумерных уравнений (1.11) и содержащихся в (1.10) граничных условий к одномерным уравнениям можно осуществлять на основе как уравнения (1.2), так и уравнения в форме (1.10). Однако целесообразнее для этого использование уравнения (1.2), которое при подстановке соотношений (2.3) и (2.6) представимо в виде:

$$\delta U = \int_0^a (M_x\delta\tilde{w}''_m + N_x\delta\tilde{u}'_m + N_{xz}\delta\tilde{u}_m + N^*_{xz}\delta\tilde{u}''_m +$$
$$+ h\sigma^0_x\tilde{w}'_m\delta\tilde{w}'_m + N_z\delta\tilde{w}_m)\,dx = 0, \tag{2.7}$$

где

$$M_x = \frac{E^*_1 h}{\lambda^2_m}(\tilde{w}''_m + \lambda^2_m\nu_{31}\tilde{w}_m), \quad N_x = E_1 h\tilde{u}'_m\ , \tag{2.8}$$

$$N_{xz} = G_{13}h(\nu_{13}\tilde{u}''_m + \lambda^2_m\tilde{u}_m),$$
$$N^*_{xz} = \frac{\nu_{13}h}{\lambda^2_m}\left[\nu_{13}(G_{13} + \sigma^0_x)\tilde{u}''_m + \lambda^2_m G_{13}\tilde{u}_m\right], \tag{2.9}$$

$$N_z = E^*_3 h(\lambda^2_m\tilde{w}_m + \nu_{13}\tilde{w}''_m). \tag{2.10}$$

Проведя стандартные преобразования, вариационное уравнение (2.7) приведем к окончательному виду:

$$(M_x\delta\tilde{w}'_m + N^*_{xz}\delta\tilde{u}'_m - Q_z\delta\tilde{w}_m - S_x\delta\tilde{u}_m)\Big|_{x=0}^{x=a} +$$
$$+\int_0^a\left[(Q'_x + N_z)\delta\tilde{w}_m + (S'_x + N_{xz})\delta\tilde{u}_m\right]dx = 0, \tag{2.11}$$

где введены обозначения

$$Q_z = M'_x - h\sigma^0_x\tilde{w}'_m, \quad S_x = N^{*\prime}_{xz} - N_x. \tag{2.12}$$

В силу произвольности вариаций $\delta\tilde{w}_m \neq 0, \delta\tilde{u}_m \neq 0,$ из (2.11) следуют два дифференциальных уравнения устойчивости:

$$L_1 = M''_x + N_z - h\sigma^0_x\tilde{w}''_m = 0, \tag{2.13}$$

$$L_2 = N^{*\prime}_{xz} - N'_x + N_{xz} = 0 \tag{2.14}$$

и соответствующие им граничные условия на кромках $x = 0, a$:

$$M'_x = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta\tilde{w}'_m \neq 0, \quad Q_z = M'_x - h\sigma^0_x\tilde{w}'_m = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta\tilde{w}_m \neq 0, \tag{2.15}$$

$$N_{xz}^{*} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta\tilde{u}_m' \neq 0, \quad S_z = N_{xz}^{*'} - N_x = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta\tilde{u}_m \neq 0. \tag{2.16}$$

Внеся теперь составленные соотношения (2.8)–(2.10) в соответствующие уравнения (2.13), (2.14), получим два обособленных уравнения в перемещениях:

$$L_1 = E_1^{*}\tilde{w}_m^{IV} + (2E_1^{*}\nu_{31} - \sigma_x^0)\lambda_m^2\tilde{w}_m'' + E_3^{*}\lambda_m^4\tilde{w}_m = 0, \tag{2.17}$$

$$L_2 = \nu_{13}^2(G_{13} + \sigma_x^0)\tilde{u}_m^{IV} - (E_1 - 2\nu_{13}G_{13})\lambda_m^2\tilde{u}_m'' + G_{13}\lambda_m^4\tilde{u}_m = 0. \tag{2.18}$$

Судя по структуре, можно предположить, что первым из этих уравнений описываются чисто изгибные ФПУ (ввиду отсутствия в нем G_{13}), а вторым, как будет показано ниже, – сдвиговые ФПУ, о чем свидетельствует и разделение граничных условий (2.15), (2.16) относительно функций $\tilde{w}_m$ и $\tilde{u}_m$.

Действительно, при представлении указанных функций в виде

$$\tilde{u}_m = \tilde{u}_{mn}\cos\lambda_n x, \quad \tilde{w}_m = \tilde{w}_{mn}\sin\lambda_n x, \quad \lambda_n = n\pi/a, \tag{2.19}$$

точно удовлетворяющем условиям шарнирного опирания кромок $x = 0, a$, когда, как легко можно убедиться, $\sigma_x(x = 0, a) = 0$, $w(x = 0, a) = 0$, а $\tau_{xz}(x = 0, a) \neq 0$, из уравнения (2.17) можно получить одну из формул для определения бифуркационного значения нагрузки p:

$$p = p_{u(1)} = E_1^{*}\left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} - 2\nu_{31}\right) + E_3^{*}\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2}, \tag{2.20}$$

а из уравнения (2.18) следует другая формула

$$p = p_{c(1)} = G_{13} + \frac{E_1 - 2\nu_{13}G_{13}}{\nu_{13}^2}\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} + \frac{G_{13}}{\nu_{13}^2}\frac{\lambda_m^4}{\lambda_n^4}. \tag{2.21}$$

Из (2.21) видно, что в силу $E_1 > 2\nu_{13}G_{13}$, минимальное критическое значение нагрузки p, равное

$$p_{c(1)}^{\min} = p_{c(1)}^{*} = G_{13}, \tag{2.22}$$

имеет место или при $\lambda_m = 0$, или при $\lambda_n = \infty$.

Как было установлено в [3, 4], значение p, определяемое по формуле (2.22), соответствует чисто сдвиговой ФПУ, реализация которой раньше изгибной ФПУ возможна у стержней из композитных материалов с малым значением G_{13}.

Для определения $p_{u(1)}^{\min} = p_{u(1)}^{*}$ в (2.20) необходимо произвести соответствующую минимизацию по параметрам m и n. Для этого, введя обозначение $\lambda_m^2/\lambda_n^2 = \lambda$, запишем условие экстремума $p_{u(1)}$ по аргументу λ:

$$dp_{u(1)}/d\lambda = -E_1^{*}/\lambda^2 + E_3^{*} = 0,$$

откуда следует формула для положительного значения λ:

$$\lambda = \sqrt{E_3^{*}/E_1^{*}} = \sqrt{E_3/E_1}. \tag{2.23}$$

Так как при этом значении λ

$$d^2 p_{u(1)}/d\lambda^2 = 2E_1^{*}/\lambda^3 > 0,$$

то

$$p^*_{u(1)} = 2\left(\sqrt{E_1^* E_3^*} - E_1^* \nu_{31}\right) = 2E_1^*\left(\sqrt{\nu_{31}/\nu_{13}} - \nu_{31}\right) = p^{\min}_{u(1)}. \qquad (2.24)$$

В частном случае, когда $E_1 = E_3 = E_1$, $\nu_{13} = \nu_{31} = \nu$, $G = E/[2(1+\nu)]$, из (2.24) следует формула

$$p^{\min}_{u(1)} = 4G. \qquad (2.25)$$

Сравнивая формулы (2.22) и (2.25), видим, что $p^{\min}_{c(1)} < p^{\min}_{u(1)}$, следовательно, установленное построенным решением значение $p^{\min}_{u(1)}$ не имеет никакого практического интереса, хотя и соответствует изгибной ФПУ стержня.

И, наконец, отметим, что в свете результатов, изложенных в статье [2], одномерные уравнения устойчивости (2.17), (2.18) и соответствующие им граничные условия (2.15), (2.16), полученные путем редукции исходной двумерной задачи к одномерной с использованием одинарных тригонометрических функций, следует считать точными, по крайней мере, в классе выбранных базисных функций, а полученные на их основе формулы соответствуют одному из точных решений рассмотренной простейшей задачи. Использование в качестве базисных функций синуса и косинуса назовем в дальнейшем одномерной SC-аппроксимацией искомых двумерных функций.

3. Упрощенные одномерные уравнения, полученные на основе SC-аппроксимации перемещений

В механике тонкостенных элементов конструкций для редукции исходных трехмерных соотношений к двумерным или одномерным, наряду с другими вводимыми гипотезами относительно свойств материала, часто используется предположение $\nu_{i3} = \nu_{3i} = 0$. Введя это предположение, в рассматриваемом случае вместо (1.3) приходим к соотношениям упругости:

$$\sigma_x = E_1 u^x, \quad \sigma_z = E_3 w^z. \qquad (3.1)$$

Так как при этом в соответствии с (2.2) $w_m \equiv 0$, то из формулы (2.3) следует

$$w = \widetilde{w}_m \cos\lambda_m z, \qquad (3.2)$$

а вариационное уравнение (2.7) примет вид:

$$\delta U = \int_0^a (M_x \delta\widetilde{w}''_m + N_x \delta\widetilde{u}'_m + N_{xz}\delta\widetilde{u}_m + h\sigma_x^0 \widetilde{w}'_m \delta\widetilde{w}'_m + N_z \delta\widetilde{w}_m)\,dx = 0, \qquad (3.3)$$

в котором

$$M_x = \frac{E_1 h}{\lambda_m^2}\widetilde{w}''_m, \quad N_x = E_1 h\widetilde{u}'_m, \quad N_{xz} = G_{13} h\lambda_m^2 \widetilde{u}_m, \quad N_z = E_3 h\lambda_m^2 \widetilde{w}_m. \qquad (3.4)$$

Проведя соответствующие преобразования, вместо (2.11) будем иметь вариационное уравнение

$$(M_x \delta\widetilde{w}'_m - Q_z \delta\widetilde{w}_m + N_x \delta\widetilde{u}_m)\Big|_{x=0}^{x=a} + \int_0^a [(Q'_z + N_z)\delta\widetilde{w}_m - (N'_x - N_{xz})\delta\widetilde{u}_m]\,dx = 0, \qquad (3.5)$$

из которого при использовании соотношений (3.4) следуют дифференциальные уравнения

$$L_1 = E_1 \widetilde{w}_m^{IV} - \sigma_x^0 \lambda_m^2 \widetilde{w}_m'' + E_3 \lambda_m^4 \widetilde{w}_m = 0, \tag{3.6}$$

$$L_2 = E_1 \widetilde{u}_m'' - G_{13} \lambda_m^2 \widetilde{u}_m = 0. \tag{3.7}$$

Видно, что уравнение (3.7) при всех формулируемых для него граничных условиях имеет только тривиальное решение, а из (3.6) при шарнирном опирании кромок стержня следует только одна формула для определения бифуркационных значений p:

$$p_{u(2)} = E_1 \frac{\lambda_n^2}{\lambda_m^2} + E_3 \frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2}. \tag{3.8}$$

Таким образом, использование упрощающих предположений $\nu_{i3} = \nu_{3i} = 0$ в рамках SC-аппроксимации перемещений не позволяет получить уравнения, описывающие в чистом виде сдвиговую ФПУ стержня.

Вместо указанных предположений примем теперь другое, также часто используемое на практике предположение в виде равенства (1.8). Так как при этом необходимо удовлетворить только условиям (1.6), то в (2.2) становится ненужной вторая установленная зависимость, что позволяет функции u, w представить в виде:

$$u = -\frac{1}{\lambda_m} \widetilde{w}_m' \sin\lambda_m z + \widetilde{u}_m \cos\lambda_m z, \quad w = w_m \sin\lambda_m z + \widetilde{w}_m \cos\lambda_m z. \tag{3.9}$$

При этом, как легко установить,

$$\sigma_x = E_1 \left(-\frac{1}{\lambda_m} \widetilde{w}_m'' \sin\lambda_m z + \widetilde{u}_m' \cos\lambda_m z \right), \quad \tau_{xz} = G_{13} (w_m' - \lambda_m \widetilde{u}_m) \sin\lambda_m z,$$

$$\tau_{xz}^* = [(G_{13} + \sigma_x^0) w_m' - \lambda_m G_{13} \widetilde{u}_m] \sin\lambda_m z + \sigma_x^0 \widetilde{w}_m' \cos\lambda_m z. \tag{3.10}$$

Внеся теперь (3.9) и (3.10) в (1.2) и отбрасывая в нем слагаемое $\sigma_z \delta w^z$, получим уравнение

$$\delta U = \int_0^a (N_x \delta\widetilde{u}_m' - \lambda_m N_{xz} \delta\widetilde{u}_m + M_x \delta\widetilde{w}_m'' + N_{xz}^* \delta w_m' + h\sigma_x^0 \widetilde{w}_m' \delta\widetilde{w}_m') \, dx = 0, \tag{3.11}$$

в котором

$$N_x = E_1 h \widetilde{u}_m', \quad M_x = E_1 h / \lambda_m^2 \, \widetilde{w}_m'', \quad N_{xz} = h G_{13} (w_m' - \lambda_m \widetilde{u}_m),$$

$$N_{xz}^* = N_{xz} + h\sigma_x^0 w_m' = h[(G_{13} + \sigma_x^0) w_m' - \lambda_m G_{13} \widetilde{u}_m]. \tag{3.12}$$

Составленное уравнение (3.11) после стандартных преобразований примет вид:

$$(M_x \delta\widetilde{w}_m' + N_x \delta\widetilde{u}_m + N_{xz}^* \delta w_m - Q_z \delta\widetilde{w}_m) \Big|_{x=0}^{x=a} +$$

$$+ \int_0^a (L_1 \delta\widetilde{w}_m - L_2 \delta\widetilde{u}_m - L_3 \delta w_m) \, dx = 0, \tag{3.13}$$

из которого следуют три дифференциальных уравнения устойчивости стержня

$$L_1 = Q_z' = M_x' - h\sigma_x^0 \widetilde{w}_m'' = 0, \tag{3.14}$$

$$L_2 = N'_x + \lambda_m N_{xz} = 0, \quad L_3 = N^{*'}_{xz} = N'_{xz} + h\sigma^0_x w''_m = 0 \tag{3.15}$$

и соответствующие им граничные условия для кромок $x = 0, a$

$$N_x = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta\widetilde{u}_m \neq 0, \quad N^*_{xz} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta w_m \neq 0, \tag{3.16}$$

$$M_x = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta\widetilde{w}'_m \neq 0, \quad Q_z = M'_x - h\sigma^0_x \widetilde{w}'_m = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta\widetilde{w}_m \neq 0. \tag{3.17}$$

Внеся в (3.14) и (3.15) соотношения упругости (3.12), получим обособленное дифференциальное уравнение относительно неизвестной $\widetilde{w}_m$:

$$E_1 \widetilde{w}^{IV}_m - \lambda^2_m \sigma^0_x \widetilde{w}''_m = 0, \tag{3.18}$$

по структуре совпадающее с уравнением устойчивости по классической теории, а также систему из двух уравнений

$$E_1 \widetilde{u}''_m + \lambda_m G_{13}(w'_m - \lambda_m \widetilde{u}_m) = 0, \quad (G_{13} + \sigma^0_x) w''_m - \lambda_m G_{13} \widetilde{u}'_m = 0 \tag{3.19}$$

относительно неизвестных $\widetilde{u}_m$ и w_m.

Для стержня с шарнирно опертыми кромками решением уравнения (3.18) становится формула

$$p_{u(3)} = E_1 \lambda^2_n / \lambda^2_m = E_1 \varepsilon^2 n^2 / m^2, \quad \varepsilon^2 = (2h/a)^2, \tag{3.20}$$

которая следует также и из формулы (3.8), если ввести предположение $\sigma_z = 0$. Она при $m = 1$, $n = 1$ с точностью $\pi^2/12 \approx 1$ совпадает с формулой Эйлера

$$p_{ý} = E_1 \pi^2 \varepsilon^2 / 12. \tag{3.21}$$

Из уравнений (3.19) следует другая формула

$$p_{u(4)} = \frac{E_1 \varepsilon^2 n^2}{m^2 [1 + n^2 \varepsilon^2 / (m^2 k_{13})]} = \frac{p_{u(3)}}{1 + n^2 \varepsilon^2 / (m^2 k_{13})}, \quad k_{13} = \frac{G_{13}}{E_1}, \tag{3.22}$$

которая так же, как и (3.20), соответствует изгибной ФПУ стержня. Но в ней, в отличие от (3.20), содержится слагаемое, учитывающее влияние поперечного сдвига на критические нагрузки. Кроме того, заметим, что $p_{u(4)} < p_{u(3)}$.

Если исследуемую задачу формулировать исходя из соотношений теории типа Тимошенко [5], то вместо (3.18) и (3.19) приходим к уравнениям

$$G_{13}(\gamma'_1 + w''_0) - p w''_0 = 0, \quad E_1 h^2 \gamma''_1 - 3G_{13}(w'_0 + \gamma_1) = 0, \tag{3.23}$$

в которых w_0 – прогиб, постоянный по толщине; γ_1 – угол поворота нормального сечения $x = \text{const}$.

Из (3.23) для определения бифуркационного значения нагрузки p можно получить формулу

$$p_{(t)} = \frac{E_1 \varepsilon^2 \pi^2 n^2}{12[1 + \pi^2 \varepsilon^2 n^2 / (12 k_{13})]}, \tag{3.24}$$

которая совпадает с формулой (3.22), если принять $m = 1$, $\pi^2/12 \approx 1$.

Таким образом, уравнения (3.19) эквивалентны уравнениям теории типа Тимошенко, но, в отличие от принятой в [5] аппроксимации,

$$w = w_0(x), \quad u = u_0(x) + \zeta\gamma_1(x), \quad -h \le \zeta \le h, \tag{3.25}$$

они основаны на функциях (3.9), точно удовлетворяющих граничным условиям $\tau_{xz}(z = 0, 2h) = 0$. Однако положенное в их основу предположение $\sigma_z = 0$, которое используется и в теории типа Тимошенко, не позволяет выявить в чистом виде сдвиговую ФПУ. Появление же в формулах (3.22) и (3.24) слагаемых, учитывающих поперечный сдвиг, является следствием упрощения исходных уравнений только за счет принятия предположения $\sigma_z = 0$, так как все соотношения и уравнения (3.9)–(3.19) в рамках принятого предположения $\sigma_z = 0$, в отличие от (3.23)–(3.25), по определению [2] являются точными.

Если в (2.1) принять $m = 0$, то уравнения (2.17), (2.18) будут иметь вид: $E_1^* \widetilde{w}_m^{IV} = 0$, $(G_{13} + \sigma_x^0)\widetilde{u}_m^{IV} = 0$. Отсюда при условии $\widetilde{u}_m \ne 0$ и следует установленное бифуркационное значение (2.22). Аналогично при $m = 0$ уравнения (3.18), (3.19) приводятся к виду $E_1 \widetilde{w}_m^{IV} = 0$, $E_1 \widetilde{u}_m'' = 0$, $(G_{13} + \sigma_x^0)\, w_m'' = 0$. Отсюда также следует бифуркационное значение (2.22), но при условии $w_m = c_1 + c_2 x \ne 0$, где c_1, c_2 – некоторые константы. Так как $\lim\limits_{\lambda_m \to 0} (1/\lambda_m \sin\lambda_m z) = z$, то при $\lambda_m = 0$ как представления (2.3), так и представления (3.9) принимают вид:

$$u = \widetilde{u}_0 - z\widetilde{w}_0', \quad w = \widetilde{w}_0, \quad 0 \le z \le 2h.$$

Такая аппроксимация перемещений полностью отвечает классической модели Кирхгофа–Лява в теории пластин и оболочек, которые, однако, целесообразно представить в виде:

$$u = u_0 - \zeta w_0', \quad w = w_0, \quad -h \le \zeta \le h. \tag{3.26}$$

Если в рамках (3.26) принять предположение $\sigma_\zeta = \sigma_z = 0$, то приходим к уравнению устойчивости классической теории

$$E_1 h^2 w_0^{IV} - 3\sigma_x^0 w_0'' = 0, \tag{3.27}$$

из которого и следует формула Эйлера (2.21).

Видно, что представления (3.26) удовлетворяют граничным условиям (1.6), (1.7) при $\nu_{13} = 0$. В этом случае удовлетворяются и дифференциальные уравнения нейтрального равновесия (1.11), а также граничные условия шарнирного опирания $\sigma_x(x = 0) = \sigma_x(x = a) = w(x = 0) = w(x = a) = 0$, если функции u_0, w_0 представить в виде $u_0 = u_{0n}\cos\lambda_n x$, $w_0 = w_{0n}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n = n\pi/a$. Следовательно, уравнение (3.27), соответствующее модели Бернулли–Эйлера в классической теории стержней, является точным в рамках введения единственного допущения $\nu_{13} = 0$, что эквивалентно введению предположения о формировании в стержне плоского напряженного состояния.

4. Редукция двумерной задачи устойчивости стержня к одномерной на основе SC1-аппроксимации функций по толщине

Так как в рамках представлений (2.1) при $m = 0$ получающиеся результаты, кроме (3.26) и (3.27), являются практически неинтересными, то для редукции рассматриваемой двумерной задачи к одномерной вместо (2.1) целесообразно использовать также представления

$$u = u_m \sin\lambda_m z + \tilde{u}_m \cos\lambda_m z + U_0,$$
$$w = w_m \sin\lambda_m z + \tilde{w}_m \cos\lambda_m z + W_0, \quad \lambda_m = m\pi/(2h), \quad m = 1,2,..., \tag{4.1}$$

где U_0, W_0, как и остальные, – одномерные функции от x.

Так как в (4.1) базисными функциями являются $\sin\lambda_m x$, $\cos\lambda_m x$ и 1, то назовем ее одномерной SC1-аппроксимацией. При подчинении (4.1) граничным условиям (1.6) в случае нечетных значений m приходим к зависимости

$$u_m = -\frac{1}{\lambda_m}\tilde{w}'_m, \tag{4.2}$$

так как при этом $W'_0 = 0$, следовательно, W_0 = const. А при четных значениях m

$$u_m = -\frac{1}{\lambda_m}(\tilde{w}'_m + W'_0). \tag{4.3}$$

Внеся теперь (4.2) и (4.3) в (4.1), получим:

$$u = -\frac{1}{\lambda_m}\tilde{w}'_m \sin\lambda_m z + \tilde{u}_m \cos\lambda_m z + U_0,$$
$$w = w_m \sin\lambda_m z + \tilde{w}_m \cos\lambda_m z, \quad m = 1, 3,...; \tag{4.4}$$

$$u = -\frac{1}{\lambda_m}(\tilde{w}'_m + W'_0)\sin\lambda_m z + \tilde{u}_m \cos\lambda_m z + U_0,$$
$$w = w_m \sin\lambda_m z + \tilde{w}_m \cos\lambda_m z + W_0, \quad m = 2, 4,... \tag{4.5}$$

В соответствии с (4.4) и (4.5) для σ_z можно получить выражения:

$$\sigma_z = E_3^*\nu_{13}U'_0 + E_3^*(\nu_{13}\tilde{u}'_m + \lambda_m w_m)\cos\lambda_m z -$$
$$-\frac{E_3^*}{\lambda_m}(\nu_{13}\tilde{w}''_m + \lambda_m^2\tilde{w}_m)\sin\lambda_m z, \quad m = 1,3,...; \tag{4.6}$$

$$\sigma_z = E_3^*\nu_{13}U'_0 + E_3^*(\nu_{13}\tilde{u}'_m + \lambda_m w_m)\cos\lambda_m z -$$
$$-\frac{E_3^*}{\lambda_m}[\nu_{13}(\tilde{w}''_m + W''_0) + \lambda_m^2\tilde{w}_m]\sin\lambda_m z, \quad m = 2,4,... \tag{4.7}$$

Подчинив составленные выражения (4.6) и (4.7) граничным условиям $\sigma_z\big|_{z=0,\,2h} = 0$, получим:

$$U'_0 = 0, \quad w_m = -\frac{\nu_{13}}{\lambda_m}\tilde{u}'_m, \quad w = -\frac{\nu_{13}}{\lambda_m}\tilde{u}'_m \sin\lambda_m z + \tilde{w}_m \cos\lambda_m z,$$
$$\sigma_z = -\frac{E_3^*}{\lambda_m}(\nu_{13}\tilde{w}''_m + \lambda_m^2\tilde{w}_m)\sin\lambda_m z, \quad m = 1,3,...; \tag{4.8}$$

$$w_m = -\frac{\nu_{13}}{\lambda_m}(U'_0 + \tilde{u}'_m), \quad w = W_0 - \frac{\nu_{13}}{\lambda_m}(U'_0 + \tilde{u}'_m)\sin\lambda_m z + \tilde{w}_m \cos\lambda_m z,$$

$$\sigma_z = E_3^* \nu_{13} U_0' (1 - \cos\lambda_m z) - \frac{E_3^*}{\lambda_m} [\nu_{13} (\tilde{w}_m'' + W_0'') + \lambda_m^2 \tilde{w}_m] \sin\lambda_m z, \quad m = 2, 4, \ldots \tag{4.9}$$

Анализ полученных соотношений для нечетных значений m показывает, что они полностью совпадают с соотношениями, выведенными в п. 3. Поэтому в дальнейшем имеет смысл исследовать только случай, когда $m = 2, 4, \ldots$ Для этого случая, как легко можно убедиться, имеют место выражения:

$$\gamma_{xz} = -\left[\lambda_m \tilde{u}_m + \frac{\nu_{13}}{\lambda_m} (U_0'' + \tilde{u}_m'') \right] \sin\lambda_m z + W_0' (1 - \cos\lambda_m z), \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered} \varepsilon_z = -\nu_{13} (U_0' + \tilde{u}_m') \cos\lambda_m z - \lambda_m \tilde{w}_m \sin\lambda_m z, \\ \varepsilon_x = -\frac{1}{\lambda_m} (\tilde{w}_m'' + W_0'') \sin\lambda_m z + \tilde{u}_m' \cos\lambda_m z + U_0', \end{gathered} \tag{4.11}$$

$$\begin{gathered} \sigma_x = -\frac{E_1^*}{\lambda_m} (\tilde{w}_m'' + W_0'' + \lambda_m^2 \nu_{31} \tilde{w}_m) \sin\lambda_m z + E_1 \tilde{u}_m' \cos\lambda_m z + \\ + E_1^* (1 - \nu_{13} \nu_{31} \cos\lambda_m z) U_0', \end{gathered} \tag{4.12}$$

использование которых приводит к вариационному уравнению вида

$$\begin{gathered} \delta U = \int_0^a [M_x (\delta\tilde{w}_m'' + \delta W_0'') + N_x \delta\tilde{u}_m' + T_x \delta U_0' + N_z \delta\tilde{w}_m + \\ + N_{xz} \delta\tilde{u}_m + M_{xz}^* (\delta U_0'' + \delta\tilde{u}_m'') + \sigma_x^0 h \tilde{w}_m' \delta\tilde{w}_m' + T_{xz}^* \delta W_0'] dx = 0, \end{gathered} \tag{4.13}$$

в котором введены в рассмотрение усилия и моменты:

$$\begin{gathered} M_x = \frac{E_1^* h}{\lambda_m^2} (\tilde{w}_m'' + W_0'' + \lambda_m^2 \nu_{31} \tilde{w}_m), \quad N_x = E_1 h \tilde{u}_m' + \underline{E_1^* \nu_{13} \nu_{31} U_0'}, \\ N_{xz} = G_{13} h [\lambda_m^2 \tilde{u}_m + \nu_{13} (U_0'' + \tilde{u}_m'')], \quad N_z = E_3^* h [\lambda_m^2 \tilde{w}_m + \nu_{13} (\tilde{w}_m'' + W_0'')], \\ T_x = E_1^* h (2 + \nu_{13} \nu_{31}) U_0', T_{xz}^* = (3 G_{13} + 2\sigma_x^0) h W_0', \\ M_{xz}^* = G_{13} \nu_{13} h \tilde{u}_m + (G_{13} + \sigma_x^0) \frac{\nu_{13}^2 h}{\lambda_m^2} (U_0'' + \tilde{u}_m''). \end{gathered} \tag{4.14}$$

Используя далее обозначения

$$\begin{gathered} Q_z = M_{x,x} - h \sigma_x^0 \tilde{w}_m, \quad Q_z^0 = M_{x,x} - T_{xz}^*, \quad S_x = M_{xz,x}^* - N_x, \\ S_x^0 = M_{xz,x}^* - T_x, \end{gathered} \tag{4.15}$$

вариационное уравнение (4.13) приведем к виду:

$$\begin{gathered} \left[M_x (\delta w_m' + \delta W_0') + M_{xz}^* (\delta U_0' + \delta\tilde{u}_m') - S_x^0 \delta U_0 - S_x \delta\tilde{u}_m - \right. \\ \left. - Q_z^0 \delta W_0 - Q_z \delta\tilde{w}_m \right]_{x=0}^{x=a} + \int_0^a \left[(Q_{z,x} + N_z) \delta\tilde{w}_m + (S_{x,x} + N_{xz}) \delta\tilde{u}_m + \right. \end{gathered}$$

$$+Q^0_{z,x}\delta W_0 + S^0_{x,x}\delta U_0\big]dx = 0, \qquad (4.16)$$

из которого следуют четыре дифференциальных уравнения устойчивости:

$$Q^0_{z,x} = M_{x,xx} - T^*_{xz,x} = 0, \quad M_{x,xx} + N_z - h\sigma^0_x \tilde{w}''_m = 0, \qquad (4.17)$$

$$S^0_{x,x} = N^*_{xz,xx} - T_{x,x} = 0, \quad N^*_{xz,xx} - N_{x,x} + N_{xz} = 0 \qquad (4.18)$$

и граничные условия на кромках $x = 0,\ a$

$$\begin{gathered} M_x = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta(w'_m + W'_0) = 0, \quad Q^0_z = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta W_0 \neq 0, \\ Q_z = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta \tilde{w}_m \neq 0, \end{gathered} \qquad (4.19)$$

$$\begin{gathered} N_{xz} = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta(U'_0 + \tilde{u}'_m) = 0, \quad S^0_x = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta U_0 \neq 0, \\ S_x = 0 \quad \text{ï ðè} \quad \delta \tilde{u}_m \neq 0. \end{gathered} \qquad (4.20)$$

Анализируя составленные уравнения (4.17), (4.18), граничные условия (4.19), (4.20) и соотношения (4.14), можно видеть, что исходная двумерная задача в рассматриваемом случае редуцируется к двум обособленным одномерным задачам. Системой уравнений первой из них

$$\begin{gathered} E^*_1(\tilde{w}^{IV}_m + W^{IV}_0 + \lambda^2_m \nu_{31}\tilde{w}''_m) - (3G_{13} + 2\sigma^0_x)\lambda^2_m W''_0 = 0, \\ E^*_1(\tilde{w}^{IV}_m + W^{IV}_0 + 2\lambda^2_m \nu_{31}\tilde{w}''_m) + E^*_3(\lambda^4_m \tilde{w}_m + \nu_{13}\lambda^2_m W''_0) - \sigma^0_x \lambda^2_m \tilde{w}''_m = 0, \end{gathered} \qquad (4.21)$$

получающейся подстановкой в (4.17) соответствующих соотношений из (4.14), описываются ФПУ, сопровождающиеся появлением перемещений в виде

$$u = -\frac{1}{\lambda_m}(\tilde{w}'_m + W'_0)\sin\lambda_m z, \quad w = W_0 + \tilde{w}_m \cos\lambda_m z. \qquad (4.22)$$

Второй системе уравнений

$$\begin{gathered} G_{13}\nu_{13}\lambda^2_m \tilde{u}''_m + (G_{13} + \sigma^0_x)\nu^2_{13}(U^{IV}_0 + \tilde{u}^{IV}_m) - E^*_1\lambda^2_m(2 + \nu_{13}\nu_{31})U''_0 = 0, \\ (G_{13} + \sigma^0_x)\nu^2_{13}(U^{IV}_0 + \tilde{u}^{IV}_m) + 2G_{13}\nu_{13}\lambda^2_m \tilde{u}''_m + \\ + G_{13}\lambda^4_m \tilde{u}_m - E_1\lambda^2_m \tilde{u}''_m + (G_{13} - \underline{E^*_1\nu_{31}})\nu_{13}\lambda^2_m U''_0 = 0, \end{gathered} \qquad (4.23)$$

соответствуют перемещения

$$u = U_0 + \tilde{u}_m \cos\lambda_m z, \quad w = -\nu_{13}/\lambda_m (U'_0 + \tilde{u}'_m)\sin\lambda_m z. \qquad (4.24)$$

Ими, судя по их структуре, описываются ФПУ, близкие к сдвиговой.

Структура построенных уравнений указывает на целесообразность введения вместо неизвестных $\tilde{w}_m$ и $\tilde{u}_m$ новых неизвестных, согласно зависимостям

$$\tilde{w}_m = \varphi_m - W_0, \quad \tilde{u}_m = \psi_m - U_0. \qquad (4.25)$$

При их использовании соотношения упругости (4.14) перепишем в виде:

$$M_x = E^*_1 h[\varphi''_m/\lambda^2_m + \nu_{31}(\varphi_m - W_0)], \quad N_z = E^*_3 h[\lambda^2_m(\varphi_m - W_0) + \nu_{13}\varphi''_m],$$

$$T_{xz}^{*}=(3G_{13}+2\sigma_{x}^{0})hW_{0}', \tag{4.26}$$

$$N_{x}=E_{1}h(\psi_{m}'-U_{0}')+\underline{E_{1}^{*}h\nu_{13}\nu_{31}U_{0}'}\approx E_{1}h(\psi_{m}'-U_{0}'),$$

$$N_{xz}=G_{13}h[\lambda_{m}^{2}(\psi_{m}-U_{0})+\nu_{13}\psi_{m}''], \tag{4.27}$$

$$N_{xz}^{*}=G_{13}\nu_{13}h(\psi_{m}-U_{0})+(G_{13}+\sigma_{x}^{0})\frac{\nu_{13}^{2}h}{\lambda_{m}^{2}}\psi_{m}'',\quad T_{x}=E_{1}^{*}h(2+\nu_{13}\nu_{31})U_{0}',$$

а вместо уравнений (4.17) и (4.18) приходим к преобразованным уравнениям:

$$M_{x}''-\sigma_{x}^{0}h(\varphi_{m}''-W_{0}'')+N_{z}=0,\quad T_{xz,x}^{*}-\sigma_{x}^{0}h(\varphi_{m}''-W_{0}'')+N_{z}=0, \tag{4.28}$$

$$M_{xz,xx}^{*}-N_{x}'+N_{xz}=0,\quad T_{x}'-N_{x}'+N_{xz}=0. \tag{4.29}$$

Внеся теперь в (4.28), (4.29) соотношения (4.26) и (4.27), вместо систем уравнений (4.21), (4.23) приходим к преобразованным уравнениям:

$$\begin{gathered}E_{1}^{*}[\varphi_{m}^{IV}+\nu_{31}\lambda_{m}^{2}(2\varphi_{m}''-W_{0}'')]-\sigma_{x}^{0}\lambda_{m}^{2}(2\varphi_{m}''-W_{0}'')+E_{3}^{*}\lambda_{m}^{4}(\varphi_{m}-W_{0})=0,\\ 3(G_{13}+\sigma_{x}^{0})W_{0}''-\sigma_{x}^{0}\varphi_{m}''+E_{3}^{*}[\lambda_{m}^{2}(\varphi_{m}-W_{0})+\nu_{13}\varphi_{m}'']=0,\end{gathered} \tag{4.30}$$

$$\begin{gathered}(G_{13}+\sigma_{x}^{0})\nu_{13}^{2}\psi_{m}^{IV}+(2G_{13}\nu_{13}-E_{1})\lambda_{m}^{2}(\psi_{m}''-U_{0}'')-\\ -\underline{E_{1}^{*}\nu_{13}\nu_{31}\lambda_{m}^{2}U_{0}''}+G_{13}\lambda_{m}^{4}\psi_{m}=0,\end{gathered} \tag{4.31}$$

$$(E_{1}+2E_{1}^{*})U_{0}''-(E_{1}-G_{13}\nu_{13})\psi_{m}''+G_{13}\lambda_{m}^{2}(\psi_{m}-U_{0})=0,$$

имеющим четвертый и второй порядки относительно функций φ_m, ψ_m и W_0, U_0 соответственно.

Возможна и третья форма представлений систем уравнений (4.21) и (4.23). В частности, вычитая в системе (4.23) второе уравнение из первого, можно получить зависимость

$$U_{0}''=\frac{k_{13}-\nu_{13}}{k_{13}^{*}\nu^{*}+\nu_{13}}\tilde{u}_{m}''-\frac{\lambda_{m}^{2}}{k_{13}^{*}\nu^{*}+\nu_{13}}\tilde{u}_{m}, \tag{4.32}$$

в которой $\nu^{*}=(1-\nu_{13}\nu_{31})(2+\nu_{13}\nu_{31}),k_{c}=E_{1}/G_{13},k_{c}^{*}=E_{1}^{*}/G_{13}$. Внеся ее в первое уравнение системы, приходим к разрешающему уравнению

$$\begin{gathered}[(1-r_{c})\nu_{13}^{2}d^{2}/dx^{2}-k_{c}^{*}(2+\nu_{13}\nu_{31})\lambda_{m}^{2}][(k_{c}-\nu_{13})\tilde{u}_{m}''-\lambda_{m}^{2}\tilde{u}_{m}]/(k_{c}^{*}\nu^{*}+\nu_{13})+\\ +(1-r_{c})\nu_{13}^{2}\tilde{u}_{m}^{IV}+\nu_{13}\lambda_{m}^{2}\tilde{u}_{m}''=0,\end{gathered} \tag{4.33}$$

где $r_c = p/G_{13}$ – параметр нагрузки по сдвиговой ФПУ. Из полученного уравнения (4.33) для определения бифуркационных значений параметра r_c следует формула

$$\begin{gathered}r_{c}^{*}=\frac{(k_{c}^{*}\nu^{*}+\nu_{13})(\nu_{13}\lambda_{n}^{2}-\lambda_{m}^{2})\lambda_{n}^{2}\nu_{13}+[\nu_{13}\lambda_{n}^{2}+k_{c}^{*}(2+\nu_{13}\nu_{31})\lambda_{m}^{2}]\chi}{\nu_{13}^{2}\lambda_{n}^{2}(k_{c}^{*}\nu^{*}+\nu_{13})(\lambda_{n}^{2}+\chi)},\\ \chi=(k_{c}-\nu_{13})\lambda_{n}^{2}+\lambda_{m}^{2}.\end{gathered} \tag{4.34}$$

Заметим, что при $\lambda_m = 0$ и произвольных λ_n формула (4.34) приобретает вид

$$r_c^* = \frac{(k_c^* \nu^* + \nu_{13})\nu_{13} + k_c - \nu_{13}}{\nu_{13}(k_c^* \nu^* + \nu_{13})(1 + k_c - \nu_{13})}, \tag{4.35}$$

а $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} r_c^*$, как легко можно убедиться, также стремится к пределу, определяемому формулой (4.35).

Как видно из формулы (4.35), значение r_c при указанных предельных значениях не зависит ни от λ_m, ни от λ_n, то есть в рассмотренных предельных случаях имеет место бифуркационное значение r_c^*, не зависящее от деформации стержня, что не может соответствовать реальному физическому процессу. Данный вывод косвенно может быть подтвержден и тем, что при $\nu_{13} = 0$ из формулы (4.34) следует $r_c^* = \infty$.

В то же время, если в соотношениях (4.14) пренебречь подчеркнутыми слагаемыми, что приводит к необходимости их отбрасывания в (4.23), (4.27), (4.31), а во втором уравнении системы (4.31) коэффициент при первом слагаемом принять равным $E_1 + 2E_1^* \approx 3E_1^*$, то, исходя из уравнения (4.31), для определения бифуркационного значения r_c^* с незначительной погрешностью устанавливается формула

$$r_c^* = 1 + \frac{k_c - 2\nu_{13}}{\nu_{13}^2}\frac{\lambda_m^2}{\lambda_n^2} - \frac{(k_c - 2\nu_{13})(k_c - \nu_{13})\lambda_m^2}{\nu_{13}^2(3k_c^*\lambda_n^2 - \lambda_m^2)} + \frac{\lambda_m^4}{\nu_{13}\lambda_n^4}. \tag{4.36}$$

Полученный результат практически не отличается от результата, записанного в виде формулы (2.21). Видно, что минимальное значение $r_c^* = 1$ из (4.32) следует при $\lambda_m =$ $= 0$. Таким образом, системой уравнений (4.31) (или (4.23)) при указанных выше упрощениях описывается чисто сдвиговая ФПУ стержня при функциях перемещений

$$u = U_0 + \tilde{u}_m = \varphi_m, \quad w = -\nu_{13} z \varphi'_m, \tag{4.37}$$

следующих из (4.24) при $\lambda_m = 0$.

Если ввести в рассмотрение параметр нагрузки по изгибной ФПУ r_u и безразмерные параметры k_0, k_{13}^* по формулам

$$r_u = p/(E_1^*\varepsilon^2), \quad k_0 = E_3^*/E_1^* = E_3/E_1, \quad k_{13}^* = G_{13}/E_1^*, \tag{4.38}$$

то, исходя из уравнений (4.21), для определения бифуркационных значений параметра r_u приходим к квадратному уравнению

$$r_u^2 - c r_u + q = 0, \tag{4.39}$$

где

$$\begin{gathered} c = \frac{1}{\varepsilon^2}[k_0 + \lambda^4 - 2\lambda^2\nu_{31} + 1/2\,(\lambda^2 + 3k_{13}^*)], \quad \lambda = \varepsilon n/m, \quad \varepsilon = 2h/a, \\ q = 1/2\varepsilon^4\ [(\lambda^2 + 3k_{13}^*)(k_0 + \lambda^4 - 2\lambda^2\nu_{31}) - (\lambda^2 - \nu_{31})(\lambda^4 - \lambda^2\nu_{13}k_0)]. \end{gathered} \tag{4.40}$$

При введении предположения $E_3 = 0$ (то есть $k_0 = 0$), $\nu_{13} = \nu_{31} = 0$ формулы (4.40) принимают вид:

$$\tilde{c} = 1/\varepsilon^2\ [\lambda^4 + 1/2\,(\lambda^2 + 3k_{13})], \quad \tilde{q} = 3\lambda^4 k_{13}/(2\varepsilon^4). \tag{4.41}$$

При этом в случае $m \to \infty$ корни уравнения (4.39) будут равны $r_u^{(1)} = 0$, $r_u^{(2)} =$ $= 3k_{13}/(2\varepsilon^2)$, следовательно,

$$p^* = p^*_{c(2)} = E_1 \varepsilon^2 r_u^{(2)} = 3G_{13}/2. \tag{4.42}$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что при $E_3 \neq$ $\neq 0, \nu_{13} \neq 0, \nu_{31} \neq 0$, когда $m \to \infty$, $n \to \infty$, один корень уравнения (4.39) также стремится к значению $3k_{13}/(2\varepsilon^2)$, а второй – к бесконечности. Таким образом, построенными в данном разделе уравнениями, основанными на использовании SC1-аппроксимации перемещений по толщине, не описываются изгибные ФПУ стержня. Определяемая же ими критическая нагрузка потери устойчивости является сдвиговой. Она в полтора раза выше критической нагрузки сдвиговой ФПУ, определяемой уравнениями п. 2, построенными на основе SC-аппроксимации перемещений.

4.1. Уравнения устойчивости стержня, построенные на основе SC1-аппроксимации с использованием допущения $\sigma_z = 0$. Так же, как и в п. 3, вместо введения предположений $E_3 = \nu_{13} = \nu_{31} = 0$, потребуем выполнения единственного равенства (1.8), в силу которого в (1.2) отбрасывается подчеркнутое слагаемое. Так как при этом нет необходимости удовлетворения условиям $\sigma_z\big|_{z=0,2h} = 0$, то в рамках исходной аппроксимации перемещений u, w в виде (4.1) для случая $m = 2, 4, \ldots$ приходим к представлениям (4.5). При этом

$$\begin{aligned}
\gamma_{xz} &= (-\lambda_m \tilde{u}_m + w'_m)\sin\lambda_m z + (1-\cos\lambda_m z)\, W'_0, \\
\varepsilon_x &= U'_0 + \tilde{u}'_m \cos\lambda_m z - 1/\lambda_m\, (\tilde{w}''_m + W''_0)\sin\lambda_m z,
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\delta U = \int_0^a \int_0^{2h} (E_1 \varepsilon_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xz}\delta u^z + \tau^*_{xz}\delta w^x)\, dxdz =$$

$$= \int_0^a [T_x \delta U'_0 + N_x \delta\tilde{u}'_m + M_x \delta(\tilde{w}''_m + W''_0) - \lambda_m N_{xz}\delta\tilde{u}_m + N^*_{xz}\delta w'_m + \tag{4.44}$$

$$+ T^*_{xz}\delta W'_0 + h\sigma_x^0 \tilde{w}'_m]dx = 0,$$

где в рассматриваемом случае

$$\begin{gathered}
T_x = 2hE_1 U'_0, \quad N_x = hE_1\tilde{u}'_m, \quad M_x = hE_1/\lambda_m^2\, (\tilde{w}''_m + W''_0), \\
N_{xz} = hG_{13}(-\lambda_m \tilde{u}_m + w'_m), \quad N^*_{xz} = N_{xz} + h\sigma_x^0 w'_m, \quad T^*_{xz} = h(3G_{13} + 2\sigma_x^0)W'_0.
\end{gathered} \tag{4.45}$$

Следующее из (4.44) первое уравнение $U''_0 = 0$ имеет только тривиальное решение, а получающаяся система из двух других уравнений относительно неизвестных $\tilde{u}_m$ и w_m, полностью совпадающая с уравнениями (3.19), для рассматриваемой задачи устойчивости стержня приводит к формуле (3.22). В отличие от п. 3, из (4.44) следует еще одна система из двух уравнений:

$$\begin{gathered}
E_1(\tilde{w}_m^{IV} + W_0^{IV}) - \lambda_m^2(3G_{13} + 2\sigma_x^0)\, W''_0 = 0, \\
E_1(w_m^{IV} + W_0^{IV}) - \lambda_m^2 \sigma_x^0 \tilde{w}''_m = 0
\end{gathered} \tag{4.46}$$

относительно функций $\tilde{w}_m$ и W_0, которая, как и следовало ожидать, полностью совпадает с уравнениями (4.21), если в них принять $E_3 = 0$, $\nu_{13} = 0$, $\nu_{31} = 0$.

Для рассматриваемой в статье задачи из уравнений (4.46) следует характеристическое уравнение

$$r_u^2 - \tilde{c} r_u + \tilde{q} = 0, \tag{4.47}$$

где коэффициенты $\tilde{c}$ и $\tilde{q}$ определяются по формулам (4.41). Вычисления показывают, что при $m = 2$ значение r_u^*, определяемое решением уравнения (4.47), практически полностью совпадает со значением, определяемым по формуле (3.22). При $m = 1$ и малых ε значение r_u^*, определяемое по формуле (3.22), в $12/\pi^2$ раз выше значения r_u^*, определяемого по формуле (3.24), а при $m = 2$ этот коэффициент составляет $3/\pi^2 \approx 0{,}3$.

5. Комбинированная модель стержня, построенная в предположении $\sigma_z = 0$ и допускающая переход к классической модели

Замечательным достоинством представлений (4.5), справедливых для четных значений m, является ортогональность используемых в них базисных функций $\sin\lambda_m z$, $\cos\lambda_m z$ и 1. Однако уравнения п. 4, выведенные на их основе в предположении $\sigma_z = 0$, не допускают предельного перехода к уравнениям, основанным на классической модели, в то время как при предельном переходе к $\lambda_m = 0$ выражения (4.5) принимают вид:

$$u = U_0 + \tilde{u}_0 - z(\tilde{w}_0' + W_0'), \quad w = W_0 + \tilde{w}_0, \quad 0 \le z \le 2h. \tag{5.1}$$

Данные выражения полностью отвечают классической модели Кирхгофа, если принять $u_0 = U_0 + \tilde{u}_0$, $w_0 = W_0 + \tilde{w}_0$. Однако вместо использования (5.1) в дальнейшем целесообразно использовать стандартное представление перемещений по классической модели, совмещая плоскость $z = 0$ со срединной плоскостью стержня. В результате для четных значений m приходим к комбинированной модели:

$$\begin{gathered} u = u_0 - z w_0' + \tilde{u}_m \cos\lambda_m z - 1/\lambda_m\, \tilde{w}_m' \sin\lambda_m z, \\ w = w_0 + w_m \sin\lambda_m z + \tilde{w}_m \cos\lambda_m z, \end{gathered} \tag{5.2}$$

в которой по-прежнему $\lambda_m = m\pi/(2h)$, $m = 2, 4, \ldots$, но $-h \le z \le h$.

Представления (5.2) приводят к следующим выражениям для компонент деформаций:

$$\begin{gathered} \gamma_{xz} = (-\lambda_m \tilde{u}_m + w_m')\sin\lambda_m z, \\ \varepsilon_x = u_0' - z w_0'' + \tilde{u}_m' \cos\lambda_m z - 1/\lambda_m\, \tilde{w}_m'' \sin\lambda_m z, \end{gathered} \tag{5.3}$$

причем из (5.2), (5.3) при $\tilde{u}_m = w_m = \tilde{w}_m = 0$ автоматически следуют кинематические соотношения по классической модели, а содержащиеся в них базисные функции 1, $\sin\lambda_m z$, $\cos\lambda_m z$, z при четных значениях m приводят к интегралам:

$$\int_{-h}^{h} \sin^2\lambda_m z dz = \int_{-h}^{h} \cos^2\lambda_m z dz = \frac{h}{\lambda_m^2}, \quad \int_{-h}^{h} z \sin\lambda_m z = \frac{2h}{\lambda_m}, \quad \int_{-h}^{h} z^2 dz = \frac{2h^3}{3},$$

но при этом

$$\int_{-h}^{h} \sin\lambda_m z dz = \int_{-h}^{h} \cos\lambda_m z dz = \int_{-h}^{h} z\cos\lambda_m z dz = \int_{-h}^{h} z dz = 0.$$

В рассматриваемом случае приходим к вариационному уравнению

$$\delta U=\int_0^a(T_x\delta u_0'+N_x\delta\widetilde{u}_m'+H_x\delta w_0''+M_x\delta\widetilde{w}_m''-\lambda_m N_{xz}\delta\widetilde{u}_m+$$
$$+N_{xz}^*\delta w_m'+2h\sigma_x^0\delta w_0'+h\sigma_x^0\delta\widetilde{w}_m')\,dx=0, \tag{5.4}$$

в котором

$$M_x=E_1h/\lambda_m^2\,(\widetilde{w}_m''+2w_0''),\quad H_x=2h^3E_1/3\,w_0''+2E_1h/\lambda_m^2\,\widetilde{w}_m'',\quad T_x=2hE_1u_0',$$
$$N_x=hE_1\widetilde{u}_m',\quad N_{xz}=hG_{13}(-\lambda_m\widetilde{u}_m+w_m'),\quad N_{xz}^*=N_{xz}+h\sigma_x^0w_m'. \tag{5.5}$$

Из (5.4) следуют обособленное уравнение $T_x'=0$, имеющее только тривиальное решение, система уравнений

$$N_{xz}'+h\sigma_x^0w_m''=0,\quad N_x'+\lambda_m N_{xz}=0, \tag{5.6}$$

совпадающая с системой (3.15), которая имеет решение в виде формулы (3.22), а также система из двух уравнений

$$H_x''-2h\sigma_x^0w_0''=0,\quad M_x''-h\sigma_x^0\widetilde{w}_m''=0. \tag{5.7}$$

Последняя система при использовании соответствующих соотношений из (5.5) принимает вид:

$$\frac{h^2E_1}{3}w_0^{IV}+\frac{E_1}{\lambda_m^2}\widetilde{w}_m^{IV}+pw_0''=0,\quad \frac{E_1}{\lambda_m^2}\widetilde{w}_m^{IV}+\frac{2E_1}{\lambda_m^2}w_0^{IV}+p\widetilde{w}_0''=0, \tag{5.8}$$

и при введении в рассмотрение параметра нагрузки $r_u=p/(E_1\varepsilon^2)$ для исследуемой задачи устойчивости приводится к системе алгебраических уравнений

$$(\pi^2n^2/12-r_u)w_0+n^2/m^2\,\widetilde{w}_m=0,\quad 2n^2/m^2\,w_0+(n^2/12-r_u)\widetilde{w}_m=0. \tag{5.9}$$

Условие нетривиальности решения системы (5.9) доставляет характеристическое уравнение

$$r_u^2-(\pi^2/12+1/m^2)n^2r_u+n^4/m^2\,(\pi^2/12-2/m^2)=0, \tag{5.10}$$

из которого при $m\to\infty$, $n=1$ следует ненулевое бифуркационное значение параметра $r_u^*=12\pi^2$, соответствующее формуле Эйлера. При $m=2,4,\ldots$ все минимальные значения параметра r_u получаются при $n=1$, причем один корень из двух стремится к нулю.

Таким образом, практический интерес построенная комбинированная модель представляет тем, что доставляет найденное исходя из других моделей решение в виде формулы (3.22) и значение критической нагрузки стержня в виде формулы Эйлера. В свою очередь, формула (3.22) справедлива и при нечетных значениях m. В силу этого, из нее при $m=1$ и $n=1$ находим коэффициент $12/\pi^2=1{,}22$, следовательно, $p^*=p_{u(4)}^*>p_э$, а при $n=1$ и $m=2$

$$p_{u(4)}=0{,}3\frac{p_э}{1+0{,}25\varepsilon^2/k_{13}}. \tag{5.11}$$

6. Заключение

Полученные результаты являются достаточно неожиданными и парадоксальными. С одной стороны, уравнения п. 2, полученные в предположении $\sigma_z \neq 0$ при точном удовлетворении всем граничным условиям задачи и являющиеся точными в классе используемых базисных функций $\sin\lambda_m z$, $\cos\lambda_m z$, приводят только к одному практически полезному решению $p^* = G_{13}$ (правда, в предположении о шарнирном опирании кромок стержня). С другой стороны, уравнения, позволяющие исследовать изгибные ФПУ стержня, в классе использованных базисных функций получаются только при введении предположения $\sigma_z = 0$.

Вопрос о том, по какой из установленных изгибных форм может произойти потеря устойчивости стержня при сжатии, на первый взгляд, кажется абсолютно тривиальным, так как уточнение формулы Эйлера по модели Тимошенко указывает на незначительное снижение значения $p^*_{(t)}$ по сравнению с $p_э$, что обусловлено только учетом поперечного сдвига (формула (3.24)). Но уравнения (3.23) по модели С.П. Тимошенко качественно и количественно (с точностью $12/\pi^2 \approx 1$) эквивалентны выведенным в п. 3 уравнениям (а также соответствующим уравнениям п. 5) лишь при $m = 1$. Поэтому возможность потери устойчивости стержня при $m \neq 1$ (конкретно при $m = 2$, так как в случае $m \to \infty$ имеем $p_{u(4)} \to 0$, $p_{u(3)} \to 0$) можно проверить только путем проведения соответствующих экспериментальных исследований.

Интуитивно можно предположить, что потеря устойчивости по изгибной форме при $m = 2$ возможна у стержней с малой сдвиговой жесткостью. При этом, как указывает формула (5.14), критическая сжимающая сила составляет всего лишь $\approx 30\%$ критической силы по Эйлеру.

Таким образом, полученные результаты указывают на необходимость проведения определенной ревизии и некоторого осторожного отношения ко многим результатам и положениям, известным в теории устойчивости тонкостенных элементов конструкций, достоверность которых, как казалось, не вызывала никаких сомнений.

Литература

1. *Паймушин, В.Н.* Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении / В.Н. Паймушин, В.И. Шалашилин // Докл. РАН. – 2004. – Т. 396, №4. – С. 492–495.

2. *Паймушин, В.Н.* Точные и приближенные аналитические решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной пластины со свободными краями, основанные на тригонометрических базисных / В.Н. Паймушин // Механика композитных материалов. – 2005. – Т. 41, №4. – С. 461–488.

3. *Иванов, В.А.* Уточненная геометрически нелинейная теория и сдвиговые формы потери устойчивости трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем / В.А. Иванов, В.Н. Паймушин, В.И. Шалашилин // Изв. РАН. МТТ. – 2005. – №3. – С. 167–177.

4. *Паймушин, В.Н.* Непротиворечивые соотношения теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций / В.Н. Паймушин, В.И. Шалашилин // Прикладная математика и механика. – 2005. – Т. 69, №5. – С. 864–882.

5. *Рикардс, Р.Б.* Устойчивость оболочек из композитных материалов / Р.Б. Рикардс, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1974. – 310с.

[28.07.2006]

ON ACCURATE AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF STABILITY PROBLEM OF BAR-STRIP WITH SMALL SHEAR STIFFNESS UNDER UNIFORM AXIAL COMPRESSION

V.N. Paymushin, T.V. Polyakova

A two-dimensional linearized problem of a bar (strip) stability made of a linearly elastic orthotropic material is considered in conditions of the compressive stress which is homogeneous in its length and cross-section.

Its reduction to one-dimensional equations, derived in two variants, is performed without introduction any simplifying assumptions and satisfying the static boundary conditions accurately at the points of the longitudinal edges. The first variant is based on using only trigonometric functions (sine and cosine) at the lateral coordinate (SC-approximation), allowing to obtain the accurate equations, while deriving an equation of the second variant we use as basic a sine, a cosine (even harmonics) and a unit (SC1-approximation). It is shown, that in the pivoting case of the lateral bar edges the derived equations allow to reveal only one practically useful form of stability loss (FSL) which is of shear type.

It is indicated that an application of the shown approximation enables to get one-dimensional equations, allowing to analyze a bending FSL only in case of assuming the absence of normal stresses in the longitudinal sections. Proceeding from the result analysis of the solved equations, obtained for the bar with pivoting lateral edges, a theoretical opportunity of a bar stability loss with a number of half-waves (harmonics in trigonometric functions) along the lateral coordinate more than a unit, is stated These solutions are used for determining the values of critical loads which are lower than those known in scientific literature and they can't be set proceeding from the existing and more precised theory variants of bars, plates and shells.

Using trigonometric basic functions with an assumption of the normal stress absence in the longitudinal sections, a variant of one-dimensional equations is also derived which allows to perform a limiting process to a bar stability equation according to Kirchhoff theory without any additional transformations. It is shown, that the equations of this type, as for their accuracy, are equal to the equations, derived using the assumption, described above and based on using SCI-approximation of displacements along the lateral coordinate but they differ in pithiness.