

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-3-364-376

**ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ  
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ПОРОВЯЗКОУПРУГОМ  
СЛОИСТОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ И ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ  
С ПОЛОСТЬЮ\***

© 2020 г.

**Ипатов А.А.**

*Научно-исследовательский институт механики  
Национального исследовательского Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

*ipatov@mech.unn.ru*

*Поступила в редакцию 12.05.2020*

Исследуется распространение волн в поровязкоупругом материале. В качестве математической модели полностью насыщенной пороупругой среды рассматривается модель Био с четырьмя базовыми функциями – поровым давлением и перемещениями скелета. Модель Био дополняется принципом соответствия упругой и вязкоупругой реакций в отношении скелета пористого материала, что позволяет моделировать пористую полностью насыщенную среду с вязкоупругим скелетом, так называемую поровязкоупругую среду. Для описания вязкоупругих свойств скелета применяется модель стандартного вязкоупругого тела. Исходная начально-краевая задача сводится к краевой задаче посредством формального применения преобразования Лапласа. Решение строится в пространстве преобразований Лапласа. Задачи решаются методом граничных интегральных уравнений. Для решения граничных интегральных уравнений применяется метод граничных элементов. Для гранично-элементной дискретизации использованы четырехугольные восьмиузловые биквадратичные элементы. Аппроксимация обобщенных граничных функций построена по согласованной модели. Численное интегрирование производится по квадратурным формулам Гаусса с применением алгоритмов понижения порядка и устранения особенностей. Для получения решения в явном времени применяется численное обращение преобразования Лапласа на основе алгоритма Дурбина с переменным шагом по частоте.

Представленное исследование является развитием существующей гранично-элементной методики для решения задач о слоистых поровязкоупругих полупространствах, позволяющее учитывать неоднородность грунтов по глубине. Рассмотрена задача о действии вертикальной силы в виде функции Хэвисайда на поверхность слоистого поровязкоупругого полупространства и полупространства с полостью. Рассматриваются варианты однородного и неоднородного полупространства (под моделью неоднородности понимается кусочно-однородное тело). Получены результаты гранично-элементного моделирования продольных и поверхностных волн. Приведены отклики гранично-

---

\* Выполнено при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования РФ (проект 0729-2020-0054).

ных перемещений на дневной поверхности полупространства. Продемонстрировано влияние параметра модели вязкоупругого материала на динамические отклики перемещений. Установлено, что параметры вязкости оказывают существенное влияние на характер распределения параметров волновых процессов.

*Ключевые слова:* пороупругость, поровязкоупругость, полупространство, метод граничных элементов, преобразование Лапласа, метод гранично-интегральных уравнений, метод Дурбина.

## **Введение**

В настоящее время математическое моделирование является одним из основных инструментов, используемых для анализа и оптимизации процессов разработки нефтегазовых месторождений, в задачах сейсмостойкого строительства, биоинженерии [1–8]. В таких задачах обычно используется модель пороупругой среды, которая позволяет описать фильтрацию флюида в порах совместно с полноценной механической моделью напряженно-деформированного состояния среды.

В современном виде такие модели были предложены в статье А. Био [9]. Модель описывает протекающие совместно процессы деформации упругой среды и течения флюида в ней. В рамках модели принимается, что вмещающее пороупругую среду пространство заполнено двухфазной средой, причем одна фаза соответствует упругому скелету, а вторая – содержащемуся в порах флюиду. Обе фазы присутствуют в каждой точке физического пространства, а распределение фаз в пространстве описывается макроскопическими величинами типа пористости.

Применение теории Био позволяет решить ряд частных задач, среди которых особенно интересны задачи о распространении волн в однородных и слоистых пороупругих полупространствах [10–18]. Однако возрастающая при этом сложность вычислительных схем краевых задач требует привлечения развитых методов, таких как метод граничных элементов (МГЭ). Обладая высокой точностью и строгостью подхода, МГЭ является наиболее подходящим методом при рассмотрении нестационарных процессов в полубесконечных телах, так как обеспечивает автоматическое выполнение условий поведения решений на бесконечности. Несмотря на отмеченные достоинства МГЭ, возможность моделирования пороупругой динамики с его помощью главным образом определяется наличием соответствующих гранично-интегральных уравнений (ГИУ) и фундаментальных решений. Фундаментальные решения и ГИУ динамической теории пороупругости получены в статьях [19–22]; в [23–26] реализованы различные варианты гранично-элементных схем для решения задач породинамики и представлены результаты численных экспериментов. Результаты гранично-элементного моделирования динамики пороупругих полупространств приведены в публикациях [27–31].

Принципиальное отличие пороупругой постановки задач от упругой и вязкоупругой заключается в том, что пороупругая постановка позволяет учесть влияние, оказываемое движущимся в порах флюидом, на поведение среды в целом. На основе теории Био было предсказано существование в пористой среде двух продольных волн – быстрой и медленной. Кроме того, фрикционное взаимодействие вязкого флюида и скелета приводит к значительной диссипации энергии в среде, которая в результате демонстрирует вязкоупругое поведение [32, 33]. Вязкоупругое поведение пороупругой среды также может быть обусловлено вязкоупругими свойствами

скелета [34–36]. Некоторые результаты моделирования волновых процессов в поропругих телах с применением ГИУ и МГЭ и различных моделей вязкоупругого поведения скелета представлены в статьях [37–39].

В настоящей статье моделируется распространение волн в однородных и неоднородных поровязкоупругих полубесконечных телах. Использован метод Дурбина численного обращения интегрального преобразования Лапласа [40, 41]. Решаются задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхность полупространства, рассмотрены случаи слоистого полупространства и полупространства с полостью.

## 1. Математическая модель

**Пороупругая постановка.** Рассмотрим однородное тело  $\Omega$  в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  с декартовой системой координат  $Ox_1x_2x_3$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$  – граница тела. Предполагается, что  $\Omega$  – изотропное поропругое тело.

Система дифференциальных уравнений теории Био для перемещений скелета  $\bar{u}_i$  и поровых давлений  $\bar{p}$  в преобразованиях Лапласа (параметр преобразования  $s$ ) имеет вид [19]:

$$G\bar{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\bar{u}_{jij} - (\psi - \beta)\bar{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\bar{u}_i = -\bar{F}_i, \quad (1)$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\bar{p}_{,ii} - \frac{\phi^2s}{R}\bar{p} - (\psi - \beta)s\bar{u}_{i,i} = -\bar{a}, \quad (2)$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2s^2}{\phi^2s + s^2k(\rho_a + \phi\rho_f)}, \quad R = \frac{\phi^2K_fK_s^2}{K_f(K_s - K) + \phi K_s(K_s - K_f)}, \quad (3)$$

где  $G, K$  – константы упругости;  $\phi$  – пористость;  $k$  – проницаемость;  $\psi = 1 - K/K_s$  – коэффициент эффективных напряжений Био;  $\rho, \rho_a, \rho_f$  – плотности скелета, присоединенной массы и жидкой среды;  $\bar{F}_i, \bar{a}$  – объемные силы;  $K_s$  – объемный модуль зерен скелета;  $K_f$  – объемный модуль текучей среды.

Рассмотрим следующие типы граничных условий:

$$\bar{u}_l(\mathbf{x}, s) = f_l(\mathbf{x}, s), \quad \bar{u}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{p}(\mathbf{x}, s) = f_4(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad l = \overline{1, 3}, \quad (4)$$

$$\bar{t}_l(\mathbf{x}, s) = g_l(\mathbf{x}, s), \quad \bar{t}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{q}(\mathbf{x}, s) = g_4(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad l = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

где  $\Gamma_u$  и  $\Gamma_t$  – части границы  $\Gamma$ , где заданы соответствующие обобщенные перемещения и обобщенные поверхностные усилия,  $\bar{u}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{p}(\mathbf{x}, s)$  – поровое давление,  $\bar{t}_4(\mathbf{x}, s) = \bar{q}(\mathbf{x}, s)$  – поток.

**Поровязкоупругая постановка.** Поровязкоупругое решение строится на основе поропругого решения с помощью принципа соответствия. Скелет пористого материала принимается вязкоупругим с функциями материала  $\bar{K} = \bar{K}(s)$  и  $\bar{G} = \bar{G}(s)$ . Применяется модель стандартного вязкоупругого тела:

$$\bar{K}(s) = K^\infty \cdot \left[ (\theta - 1) \frac{s}{s + \gamma} + 1 \right],$$

$$\bar{G}(s) = G^\infty \cdot \left[ (\theta - 1) \frac{s}{s + \gamma} + 1 \right],$$

где  $\gamma$  – параметр вязкоупругой модели, а длительные и мгновенные модули обозначаются индексами  $\infty$  и  $0$  соответственно, они связаны следующим соотношением:

$$\theta = \frac{K^0}{K^\infty} = \frac{G^0}{G^\infty}.$$

## 2. Методы решения

**Гранично-элементный подход.** Краевая задача (1)–(5) решается с использованием прямого метода граничных элементов, опирающегося на совокупное применение интегрального преобразования Лапласа и граничные интегральные уравнения для трехмерной изотропной теории пороупругости. Гранично-элементная дискретизация строится на основе регулярного представления ГИУ [15]:

$$\alpha_\Omega \bar{u}_i(\mathbf{x}, s) + \int_\Gamma (\bar{T}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{u}_k(\mathbf{y}, s) - T_{ik}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{u}_k(\mathbf{x}, s) - \bar{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{t}_k(\mathbf{y}, s)) d\Gamma(\mathbf{y}) = 0,$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma,$$

где  $\mathbf{x}$  – точка коллокации,  $\mathbf{y}$  – точка наблюдения;  $\bar{u}_i$  и  $\bar{t}_k$  – обобщенные перемещения и поверхностные усилия,  $i, k = 1, 4$  в случае изотропной поровязкоупругости;  $\bar{U}_{ik}$  и  $\bar{T}_{ik}$  – соответствующие фундаментальные и сингулярные решения;  $\bar{T}_{ik}^S$  – статическая часть сингулярного решения; коэффициент  $\alpha_\Omega = 1$  в случае конечной области  $\Omega$  и  $\alpha_\Omega = -1$  в случае бесконечной области  $\Omega$ .

Граничные интегральные уравнения решаются численно на базе метода граничных элементов. Для дискретизации ГИУ используется метод коллокации. Для аппроксимации граничной поверхности рассмотрим ее разбиение на совокупность четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов, при этом треугольные элементы считаются вырожденными четырехугольными (рис. 1). Каждый из элементов отображается на эталонный – соответственно квадрат  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$  либо треугольник  $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$ .

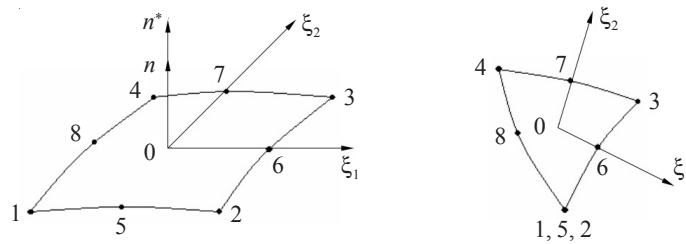


Рис. 1. Граничные элементы

Отображение элементов осуществляется по формуле:

$$y_i(\xi) = \sum_{l=1}^8 N^l(\xi) y_i^{\beta(k,l)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $\beta(k, l)$  – глобальный номер узла,  $l$  – локальный номер узла в элементе  $k$ ,  $N^l(\xi)$  – функции формы.

Узлы интерполяции неизвестных граничных функций являются подмножеством геометрических узлов наложенной гранично-элементной сетки. Локальная аппроксимация строится по согласованной интерполяционной модели Р.В. Гольдштейна.

Согласно модели Гольдштейна, обобщенные граничные перемещения аппроксимируются по билинейным граничным элементам, в то время как обобщенные усилия представляются на элементах постоянными. Для метода коллокации выберем множество узлов, совпадающее с множеством узлов аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируются системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{aligned} \frac{1-\alpha_\Omega}{2} \bar{u}_i^m + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} \bar{u}_j^{\beta(k,l)} &= \sum_{k=1}^M B_{ij}^{m,k} \bar{t}_j^k, \\ \frac{1-\alpha_\Omega}{8} \bar{u}_i^m + \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^4 A_{ij}^{m,k,l} \bar{u}_j^{\beta(k,l)} &= \sum_{k=1}^M B_{ij}^{m,k} \bar{t}_j^k, \\ A_{ij}^{m,k,l} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [R_l(\xi) \bar{T}_{ij}(x^m, y^k(\xi), s) - \delta_{\beta(k,l),m} \bar{T}_{ij}^S(x^m, y^k(\xi_1, \xi_2))] J^k(\xi) d\xi_1 d\xi_2, \\ B_{ij}^{m,k} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{U}_{ij}(x^m, y^k(\xi_1, \xi_2), s) J_k(\xi) d\xi_1 d\xi_2, \end{aligned}$$

где  $R_l(\xi)$  – линейные функции формы для четырехугольного элемента, уравнения записаны соответственно в узлах аппроксимации обобщенных граничных перемещений и обобщенных поверхностных сил. После соответствующих преобразований получаем разрешающую СЛАУ:

$$[A]\{X\} = \{B\},$$

где  $[A]$  – полностью заполненная несимметричная матрица;  $\{X\}$  – вектор неизвестных величин, в котором объединены все соответствующие компоненты искомых обобщенных граничных функций;  $\{B\}$  – вектор правой части. Для получения решения в явном времени применяется метод Дурбина численного обращения преобразования Лапласа.

**Обратное преобразование Лапласа.** Рассмотрим функцию  $f(t)$  действительного переменного  $t$ . Тогда прямое и обратное преобразования Лапласа определяются формулами:

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(s) e^{st} ds,$$

где  $s$  – комплексный параметр преобразования,  $\alpha$  – произвольное вещественное число, выбранное таким образом, что все особые точки функции  $\bar{f}(t)$  лежат левее прямой  $\text{Re } z = \alpha$ .

Пусть  $s = \alpha + i\omega$ , тогда обратное преобразование Лапласа по алгоритму Дурбина с переменным шагом по частоте запишется в виде:

$$\begin{aligned} f(0) &\approx \sum_{k=1}^n \frac{(F_{k+1} - F_k) \Delta_k}{2\pi}, \\ f(t) &\approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2} \sum_{k=1}^n \left[ \frac{F_{k+1} - F_k}{\Delta_k} (\cos \omega_{k+1} t - \cos \omega_k t) + \frac{G_{k+1} - G_k}{\Delta_k} (\sin \omega_{k+1} t - \sin \omega_k t) \right], \end{aligned}$$

где  $t > 0$ ,  $F_k = \text{Re} [\bar{f}(\alpha + i\omega_k)]$ ,  $G_k = \text{Im} [\bar{f}(\alpha + i\omega_k)]$ ,  $\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k$ .

### 3. Численные результаты

**Задача о слоистом полупространстве.** Рассмотрена задача о действии нагрузки в виде функции Хевисайда по времени на поверхность пороупругого слоя, расположенного на пороупругом основании (рис. 2).

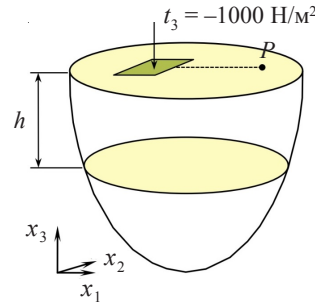


Рис. 2. Постановка задачи

Рассмотрены два варианта геометрии задачи – с толщиной слоя 5 и 10 м. На участке поверхности площадью  $1 \text{ м}^2$  задана вертикальная нагрузка  $t = -1000 \text{ Н/м}^2$ , остальная часть поверхности свободна от усилий и проницаема. На границе между слоем и полубесконечным основанием поток, усилия, перемещения и поровое давление приняты неизвестными функциями. Динамические отклики вертикальных перемещений  $u_3$  в точке  $P$ , расположенной на расстоянии 10 м от области приложения нагрузки, представлены на рис. 3–5.

Пороупругий материал слоя – почва с параметрами модели Био:  $K = 2,1 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ ,  $G = 9,8 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 1884 \text{ кг/м}^3$ ,  $\phi = 0,48$ ,  $K_s = 1,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_f = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $k = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/(\text{Н}\cdot\text{с})$ .

Пороупругий материал основания – скальная порода (песчаник Berea):  $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$ ,  $\phi = 0,66$ ,  $K_s = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_f = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $k = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н}\cdot\text{с})$ .

На рис. 3 сравниваются вертикальные перемещения, вычисленные при толщинах слоя 5 и 10 м соответственно. Также на рисунке представлены графики перемещений, вычисленных при тех же значениях параметров материала основания, что описывают материал слоя.

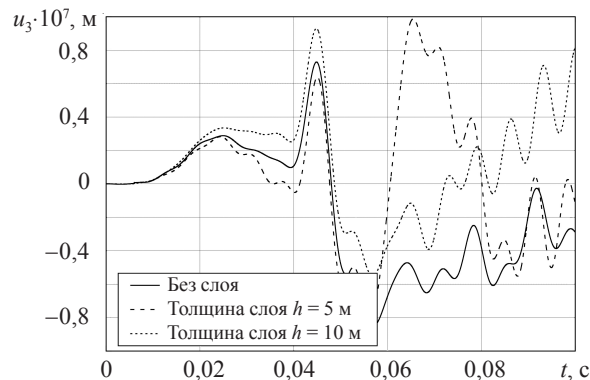


Рис. 3. Перемещения в точке  $P$  при разной толщине слоя

Видно, что до момента прибытия быстрой продольной волны (при  $t \sim 0,01 \text{ с}$ ) все три кривые на графике почти сливаются, однако далее наблюдаются количествен-

ные различия. В момент прибытия волны Рэлея  $t \sim 0,047$  с и до момента  $t \sim 0,057$  с амплитуда волны Рэлея при  $h = 10$  м меньше амплитуды волны Рэлея без слоя, и амплитуда волны Рэлея без слоя, в свою очередь, меньше амплитуды волны Рэлея при  $h = 5$  м. Момент времени  $t \sim 0,058$  с отмечен ростом перемещений, причем перемещения при толщине слоя 5 м возрастают значительно быстрее и по амплитуде превосходят перемещения при толщине слоя 10 м.

Наблюдаемый эффект объясняется влиянием отраженных от основания продольных волн и менее выражен в случае большей толщины слоя в силу значительной дисперсии волн в пористой среде.

На рис. 4, 5 продемонстрировано влияние вязкоупругих свойств скелета на динамический отклик вертикальных перемещений. На рисунках представлены вертикальные перемещения на поверхности поровязкоупругого слоя, расположенного на поровязкоупругом основании. Видно, что с ростом параметра  $\gamma$  вязкоупругое решение приближается к пороупругому, а с его снижением наблюдается уменьшение величины перемещений. Особенно заметно влияние диссипативных эффектов на поверхностные перемещения пятиметрового слоя, когда при  $\gamma = 100$  амплитуда перемещений волны Рэлея не превышает амплитуды перемещений продольной волны.

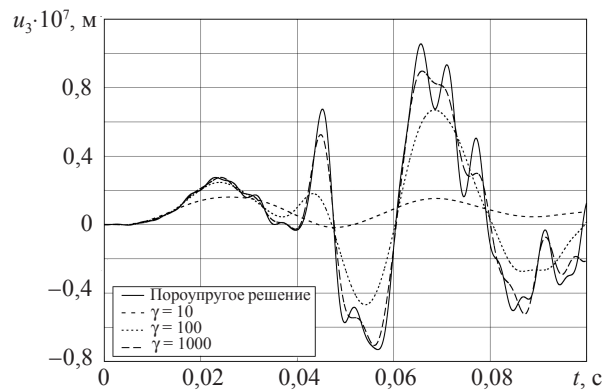


Рис. 4. Вертикальные перемещения  $u_3$  на поверхности поровязкоупругого слоя толщиной  $h = 5$  м

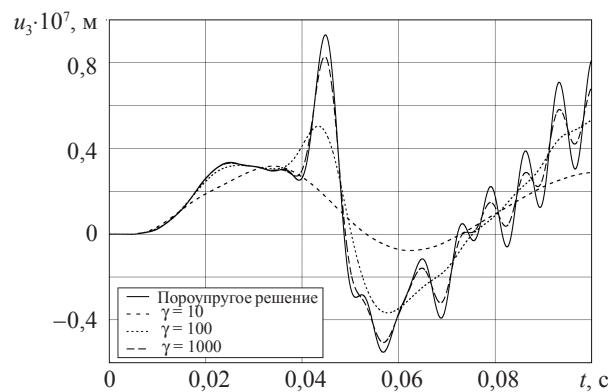


Рис. 5. Вертикальные перемещения  $u_3$  на поверхности поровязкоупругого слоя толщиной  $h = 10$  м

**Задача о полупространстве с полостью.** Решается задача о действии нагрузки в виде функции Хевисайда на поверхность полупространства с полостью. Рассмат-

риваются варианты кубической и сферической полостей. Сила  $P(t)$  действует на площадку  $S = 1 \text{ м}^2$  на поверхности полупространства:  $P(t) = P_0 f(t)$ ,  $f(t) = H(t)$ ,  $P_0 = 1000 \text{ Н/м}^2$ . Центр сферической полости находится на глубине  $h = 7,5 \text{ м}$ , радиус сферы  $R = 5 \text{ м}$  (рис. 6а). Центр кубической полости также находится на глубине  $h$ , сторона куба  $10 \text{ м}$  (рис. 6б).

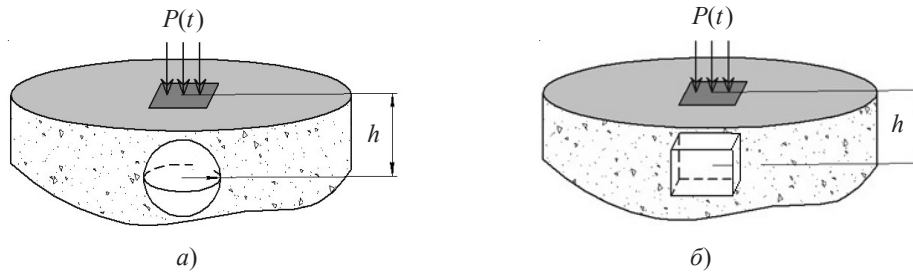


Рис. 6. Задача о полупространстве с полостями: а – сферической, б – кубической

Исследуются перемещения на дневной поверхности полупространства в точке  $Q(15 \text{ м}, 0, 0)$ , удаленной на  $15 \text{ м}$  от центра площадки нагружения.

Задача решается с учетом двух плоскостей симметрии, реальное интегрирование проводится только на четверти сетки. Параметры гранично-элементной сетки: 864 элемента для четверти полупространства и 150 элементов для четверти полости (рис. 7).

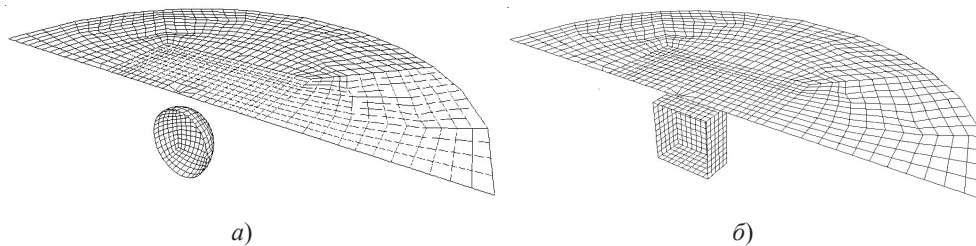


Рис. 7. Гранично-элементные сетки для задачи с полостями: а – сферической, б – кубической

Параметры пороупругого материала (песчаник Berea):  $K = 8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $G = 6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho = 2458 \text{ кг/м}^3$ ,  $\phi = 0,66$ ,  $K_s = 3,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $K_f = 3,3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $k = 1,9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$ .

На рис. 8, 9 представлены графики перемещений для задач с разными формами полости.

Наиболее интересным является влияние вязкости на амплитуду волны Рэлея, далее приведены решения только для  $u_3$ .

Поровязкоупругое решение строится на основе упругого решения с помощью принципа соответствия:

$$\bar{K}(s) = K^\infty \cdot \left[ (\theta - 1) \frac{s}{s + \gamma} + 1 \right], \quad \bar{G}(s) = G^\infty \cdot \left[ (\theta - 1) \frac{s}{s + \gamma} + 1 \right],$$

$$\chi = \frac{K^0}{K^\infty} = \frac{G^0}{G^\infty}.$$

Параметры модели стандартного вязкоупругого тела:  $\theta = 4$ ,  $\gamma = 1000, 100, 10$ .



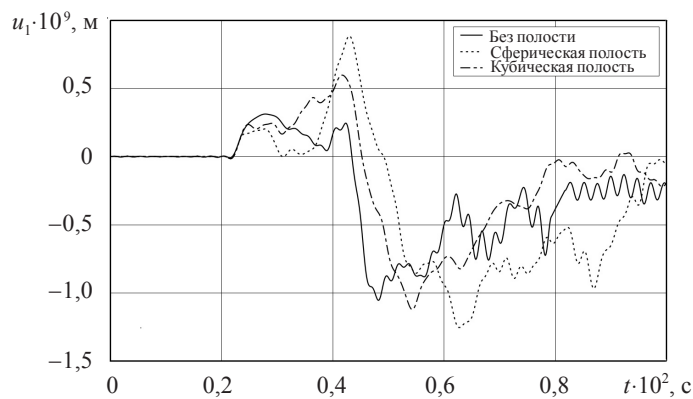


Рис. 8. Перемещения  $u_1$  для различных форм полости

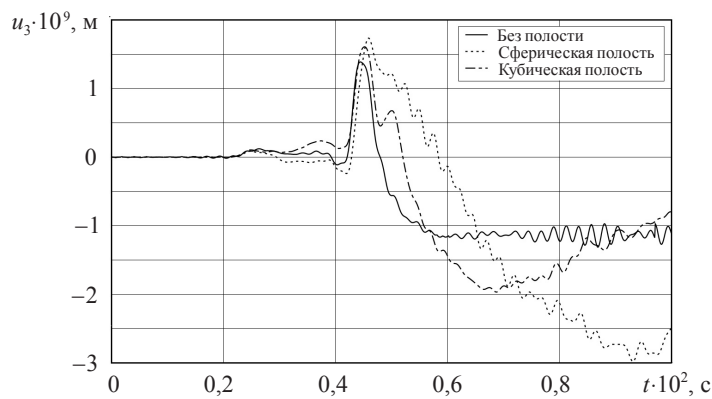


Рис. 9. Перемещения  $u_3$  для различных форм полости

На рис. 10, 11 представлены графики перемещений  $u_3$  для материалов с различной вязкостью и разными формами полости.

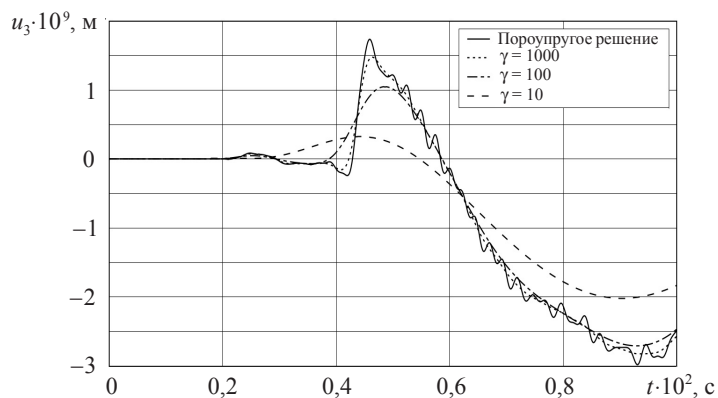


Рис. 10. Перемещения  $u_3$  при различной вязкости материала в случае кубической полости

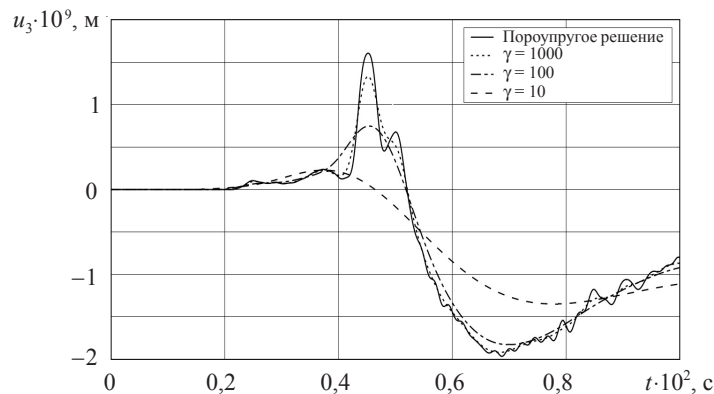


Рис. 11. Перемещения  $u_3$  при различной вязкости материала в случае сферической полости

### Заключение

Дано описание математической модели Био пороупругого материала. Записаны системы уравнений теории динамической пороупругости, постановки краевых задач в преобразованиях по Лапласу. Моделирование поровязкоупругого материала основано на теории пороупругости Био в сочетании с принципом соответствия упругой и вязкоупругой реакций. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов применяются для решения трехмерных краевых задач. Вязкие свойства скелета пористого материала описываются моделью стандартного вязкоупругого тела. Для анализа трехмерных поровязкоупругих задач была представлена МГЭ-формулировка в пространстве преобразований Лапласа, основанная на интегральных представлениях фундаментальных решений. Итоговое решение исходной задачи получено во времени с помощью алгоритма Дурбина численного обращения преобразования Лапласа.

Представлены результаты гранично-элементного моделирования задачи о действии вертикальной нагрузки на поверхность полупространства. Исследованы волновые поля перемещения для вариантов полупространства с кубической или сферической полостью. Решена задача о слое на пороупругом основании. Рассмотрены варианты пороупругого или поровязкоупругого слоя, в том числе исследовано влияние толщины и вязкоупругих свойств слоя на отклик перемещений. Исследовано влияние вязкоупругих свойств скелета пороупругого материала на вертикальные перемещения на поверхности слоя. Отмечено, что влияние на вид волновых картин главным образом оказывают диссипативные эффекты, обусловленные вязкоупругим поведением слоя.

### References

1. Chapelle D., Gerbeau J.-F., Sainte-Marie J., Vignon-Clementel I.E. A poroelastic model valid in large strains with applications to perfusion in cardiac modeling. *Comput. Mech.* 2010. Vol. 46. Iss. 1. P. 91–101. DOI: 10.1007/s00466-009-0452-x.
2. Phillips P.J., Wheeler M.F. A coupling of mixed and continuous Galerkin finite element methods for poroelasticity. I. The continuous in time case. *Computat. Geosci.* 2007. Vol. 11. Iss. 2. P. 131–144. DOI: 10.1007/s10596-007-9045-y.
3. Phillips P.J., Wheeler M.F. A coupling of mixed and continuous Galerkin finite element methods for poroelasticity. II. The discrete-in-time case. *Computat. Geosci.* 2007. Vol. 11. Iss. 2. P. 145–158. DOI: 10.1007/s10596-007-9044-z.

4. Phillips P.J., Wheeler M.F. A coupling of mixed and discontinuous Galerkin finiteelement methods for poroelasticity. *Computat. Geosci.* 2008. Vol. 12. Iss. 4. P. 417–435. DOI:10.1007/s10596-008-9082-1.
5. Causin P., Guidoboni G., Harris A., Prada D., Sacco R., Terragni S. A poroelastic model for the perfusion of the lamina cribrosa in the optic nerve head. *Math. Biosci.* 2014. Vol. 257. P. 33–41. DOI: 10.1016/j.mbs.2014.08.002.
6. Chapelle D., Gerbeau J.-F., Sainte-Marie J., Vignon-Clementel I.E. A poroelastic model valid in large strains with applications to perfusion in cardiac modeling. *Comput. Mech.* 2010. Vol. 46. Iss. 1. P. 91–101. DOI: 10.1007/s00466-009-0452-x.
7. Sobhaniragh B., Mansur W.J., Peters F.C. Three-dimensional investigation of multiple stage hydraulic fracturing in unconventional reservoirs. *J. Petrol. Sci. Eng.* 2016. Vol. 146. P. 1063–1078. DOI: 10.1016/j.petrol.2016.07.019.
8. Nazarova L.A., Nazarov L.A. Evolution of stresses and permeability of fractured-and-porous rock mass around a production well. *J. Mining Sci.* 2016. Vol. 52. Iss. 3. P. 424–431. <https://doi.org/10.1134/S106273911603061X>.
9. Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.* 1941. Vol.12. P. 155–164. DOI: 10.1063/1.1712886.
10. Jin B., Liu H. Horizontal vibrations of a disk on a poroelastic half-space. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2000. Vol. 19. Iss. 4. P. 269–275. DOI: 10.1016/S0267-7261(00)00014-2.
11. Jin B., Liu H. Rocking vibrations of rigid disk on saturated poroelastic medium. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2000. Vol. 19. Iss. 7. P. 469–472. [https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(00\)00031-2](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(00)00031-2).
12. Jin B. Liu, H. Vertical dynamic response of a disk on a saturated poroelastic halfspace. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 1999. Vol. 18. Iss. 6. P. 437–443. [https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(99\)00013-5](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(99)00013-5).
13. Gazetas G., Petrakis E. Offshore caissons on porous saturated soil. In: *Proceeding of International Conferences on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil.* Ed. S. Parkash. St. Louis. University of Missouri. 1981. P. 381–386. <https://scholarsmine.mst.edu/icrageesd>.
14. Degrande G., De Roeck G., Van Den Broeck P. Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media. *Int. J. Solids Struct.* 1998. Vol. 35. Iss. 34-35. P. 4753–4778. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00093-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00093-6).
15. Paul S. On the displacements produced in a porous elastic half-space by an impulsive line load (non-dissipative case). *Pure Appl. Geophys.* 1976. Vol. 114. Iss. 4. P. 605–614. <https://doi.org/10.1007/BF00875654>.
16. Paul S. On the disturbance produced in a semi-infinite poroelastic medium by a surface load. *Pure Appl. Geophys.* 1976. Vol. 114. Iss. 4. P. 615–627. <https://doi.org/10.1007/BF00875654>.
17. Philippacopoulos A.J. Axisymmetric vibrations of disk resting on saturated layered half-space. *J. Eng. Mech.* 1989. Vol. 115. Iss. 10. P. 2301–2322. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1989\)115:10\(2301\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:10(2301)).
18. Philippacopoulos A.J. Buried point source in a poroelastic half-space. *J. Eng. Mech.* 1997. Vol. 123. Iss. 8. P. 860–869. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1997)123:8(860).
19. Schanz M. Poroelastodynamics: linear models, analytical solutions and numerical methods. *Appl. Mech. Rev.* 2009. Vol. 62. Iss. 3. 030803. DOI:10.1115/1.3090831.
20. Gatmiri B., Kamalian M. On the fundamental solution of dynamic poroelastic boundary integral equations in time domain. *Int. J. Geomech.* 2002. Vol. 2. No 4. P. 381–398. DOI: 10.1080/15323640208500189.
21. Gatmiri B., Nguyen K.V. Time 2D fundamental solution for saturated porous media with incompressible fluid. *Comm. Numer. Meth. Eng.* 2004. Vol. 21. Iss. 3. P. 119–132. <https://doi.org/10.1002/cnm.732>.
22. Seyerafian S., Gatmiri B., Nourzad A. Green functions for a continuously non-homogenous saturated media. *Comput. Model. Eng. Sci.* 2006. Vol. 15. No 2. P. 115–125. <https://www.researchgate.net/publication/278899010>.
23. Gatmiri B., Eslami H. Scattering of harmonic waves by a circular cavity in a porous medium: Complex functions theory approach. *Int. J. Geomech.* 2007. Vol. 7. Iss. 5. P. 371–381. DOI:10.1061/(ASCE)1532-3641(2007)7:5(371).

24. Theodorakopoulos D.D., Beskosa D.E. Application of Biot's poroelasticity to some soil dynamics problems in civil engineering. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2006. Vol. 26. Iss. 6-7. P. 666–679. DOI:10.1016/j.soildyn.2006.01.016.
25. Dominguez J. *Boundary Elements in Dynamics*. Southampton. Computational Mechanics Publications. 1993. 705 p.
26. Albers B., Savidis S., Tasan H.E., Von Estroff O., Gehlken M. BEM and FEM results of displacements in a poroelastic column. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 2012. Vol. 22. Iss. 4. P. 883–896. DOI:10.2478/v10006-012-0065-y.
27. Igumnov L.A., Petrov A.N., Vorobtsov I.V. Analysis of 3D poroelastodynamics using BEM based on modified time-step scheme. In: *IOP Conference. Series Earth and Environmental Science*. 2017. Vol. 87. No 8. P. 1–7. DOI: 10.1088/1755-1315/87/8/082022.
28. Igumnov L., Ipatov A., Belov A., Petrov A. A combined application of boundary-element and Runge – Kutta methods in three-dimensional elasticity and poroelasticity. *EPJ Web of Conferences*. 2015. Vol. 94. DOI: 10.1051/epjconf/20159404026.
29. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N., Belov A.A. Boundary-element modeling of 3D poroelastic half-space dynamics. *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 1040. P. 881–885. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.1040.881.
30. Dineva P., Datcheva M., Schanz T. BIEM for seismic wave propagation in fluid saturated multilayered media. *Proceedings of the 6th European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*. 2006. P. 257–263.
31. Schanz M., Antes H. Waves in poroelastic half space: Boundary element analyses. In: *Porous Media*. Eds. W. Ehlers, J. Bluhm. Berlin. Heidelberg. Springer. 2002. P. 383–413.
32. Mow V.C., Lai W.M. Recent developments in synovial joint biomechanics. *SIAM Review*. 1980. Vol. 22. Iss. 3. P. 275–317. DOI:10.1137/1022056.
33. Mow V.C., Roth V., Armstrong C.G. Biomechanics of joint cartilage. In: *Basic Biomechanics of the Skeletal System*. Eds. V.H. Frankel, M.A. Nordin. Philadelphia. Lea and Febiger. 1980. 303 p. <https://doi.org/10.1002/art.1780241133>.
34. Ehlers W., Markert B. On the viscoelastic behaviour of fluid-saturated porous materials. *Granular Matter*. 2000. Vol. 2. No 3. P. 153–161. DOI: 10.1007/s100350050007.
35. Mak A.F. The apparent viscoelastic behaviour of articular cartilage - the contribution from the intrinsic matrix viscoelasticity and interstitial fluid flows. *J. Biomech. Engng.* 1986. Vol. 108. Iss. 2. P. 123–130. DOI:10.1115/1.3138591.
36. Banks H.T., Bekele-Maxwell K., Bociu L., Noorman M., Guidoboni G. Sensitivity analysis in poro-elastic and poro-visco-elastic models with respect to boundary data. *Q. Appl. Math.* 2017. Vol. 75. No 4. P. 697–735. DOI:10.1090/qam/1475.
37. Ipatov A.A., Igumnov L.A., Belov A.A. Boundary element method in three dimensional transient poroviscoelastic problems. *Springer Proceedings in Physics*. 2017. Vol. 193. P. 331–346. DOI: 10.1007/978-3-319-56062-5\_28.
38. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Belov A.A., Ipatov A.A. Boundary element formulation for numerical surface wave modelling in poroviscoelasticity. *Key Eng. Mater.* 2016. Vol. 685. P. 172–176. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.685.172.
39. Wuttke F., Dineva P., Fontara I.-K. Influence of poroelasticity on the 3D seismic response of complex geological media. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2017. Vol. 47. No 2. P. 34–60. DOI:10.1515/jtam-2017-0009.
40. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *Computer Journal*. 1974. Vol. 17. Iss. 4. P. 371–376. DOI:10.1093/comjnl/17.4.371.
41. Zhao X. An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate. *International Journal of Solids and Structures*. 2004. Iss. 13. Vol. 41. P. 3653–3674. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.01.006>.

## **BEM ANALYSIS OF WAVE PROPAGATION IN POROVISCOELASTIC LAYERED HALFSPACE AND HALFSPACE WITH CAVITY**

**Ipatov A.A.**

*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

The paper is dedicated to the wave propagation a porous-viscoelastic material. As a mathematical model of a fully saturated poroelastic medium, we consider the Biot model with four basic functions – pore pressure and skeleton movements. The Biot model is supplemented by the principle of elastic and viscoelastic reaction correspondence. The skeleton of a porous material is assumed to be viscoelastic material. A model of a standard viscoelastic solid is applied to describe the viscoelastic properties of a skeleton. The initial boundary-value problem is reduced to a boundary-value problem by formal application of the Laplace transform. To solve boundary integral equations, the boundary element method is performed. Quadrangular eight-node biquadratic elements are used for boundary element discretization. Numerical integration is carried out according to Gaussian quadrature formulas using algorithms for lowering the order and eliminating features. To obtain a solution in explicit time, numerical inversion of the Laplace transform is applied based on the Durbin algorithm with a variable frequency step.

This study is a development of the existing boundary-element technique for solving problems on layered porous-elastic half-spaces. This will allow you to take into account the heterogeneity of the soil in depth. The problem of the action of a vertical force in the form of the Heaviside function on the surface of a layered porous-elastic half-space and a half-space with a cavity is considered. Variants of a homogeneous and heterogeneous half-space are considered. Under the model of heterogeneity we understand the piecewise homogeneous solid. The responses of the boundary displacements on the surface of the half-space are presented. The effect of the viscoelastic material model parameter on the dynamic response of displacements is demonstrated. It is established that the viscosity parameters have a significant effect on the nature of the distribution of parameters of wave processes.

*Keywords:* poroelasticity, poroviscoelasticity, halfspace, boundary element method, Laplace transformation, boundary integral equations.