

УДК 531.37:532.5.032:537.84 DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-3-317-327

ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ШАРОВЫХ ВЕКТОРОВ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

© 2020 г. Новиков В.В., Февральских Л.Н.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

vvnovikov2007@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.02.2020

Демонстрируется подход к решению задач динамики распределенных механических систем, обладающих сферической симметрией, основанный на применении аппарата шаровых векторов. Приводится ряд задач динамики твердого деформируемого тела, вязкой жидкости и магнитной гидродинамики, для которых получено аналитическое решение, позволяющее выявить качественные особенности динамики изучаемых объектов.

Рассмотрена задача о свободных угловых движениях деформируемого тела, близкого по форме к шару. На примере квазишара, обладающего кубической симметрией формы тела и квазишаровым тензором инерции в недеформированном состоянии, демонстрируется возможность глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения (полюса). Эффект обусловлен тем, что при вращении тела с большой скоростью определяющая роль в его динамике принадлежит упругим свойствам. Со временем угловая скорость вращения уменьшается и на движении тела в возрастающей степени начинает сказываться его эллипсоидальность.

Изучено движение несжимаемой вязкой жидкости в пространстве между вращающимися неконцентричными сферой и эллипсоидом. Показано, что асимметрия потока приводит к возникновению радиального течения жидкости. Наличие такого течения в случае проводящей жидкости является необходимым условием генерации магнитного поля. Предполагая жидкость проводящей, на основе полученного течения в рамках кинематического подхода проведено исследование возможности генерации магнитного поля. Найдено наименьшее значение магнитного числа Рейнольдса, при переходе через которое возникает экспоненциально растущее магнитное поле.

Полученные результаты могут быть полезны для изучения динамики Земли, планет Солнечной системы и механизма генерации геомагнитного поля.

Ключевые слова: сферическая симметрия, аппарат шаровых векторов, упругий квазишар, проводящая вязкая жидкость, квазишаровой слой, магнитное динамо.

Введение

В настоящее время актуальной остается проблема поиска математического аппарата, с помощью которого удалось бы выявить общие закономерности динамики твердых тел и жидкостей. Существует класс задач, объектом исследования которых

являются тела, обладающие сферической симметрией. Существенно упрощает решение задач в сферических областях аппарат шаровых векторов [1], широко применяемый в квантовой механике [2, 3]. В сочетании с асимптотическими методами использование шаровых векторов позволяет получить приближенное аналитическое решение, способное выявить некоторые особенности динамики сплошной среды, или значительно упростить численное решение задачи.

Применение аппарата шаровых векторов в задачах механики впервые встречается в работах Г.И. Петрашеня [1] по теории упругости. Эта методика получила дальнейшее развитие в работах, посвященных динамике вязкоупругих деформируемых тел [4–6] и гидродинамике проводящей вязкой жидкости [7–10].

В [4] получено аналитическое решение квазистатической задачи о деформировании изотропного упругого квазишара. На примере квазишара с кубической симметрией, обладающего в недеформированном состоянии квазишаровым тензором инерции, показана динамика тела при различных скоростях собственного вращения. В рамках этой модели предложен возможный механизм глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения [5].

В [9] найдено аналитическое решение задачи о движении вязкой жидкости между неконцентрическими сферами, в [8] получено решение нестационарной задачи о течении жидкости между соосно вращающимися сферой и эллипсоидом. Показано [8, 9], что сдвиг внутренней поверхности относительно внешней в направлении, перпендикулярном осям вращения, и малая эллипсоидальность внутренней поверхности приводят к возникновению радиального течения, представляющего интерес в теории магнитного динамо [11–21].

В [7, 10] изучен вопрос о возможности возбуждения магнитного поля течением [8, 9]. Используя представления векторов скорости и напряженности магнитного поля в виде ряда по шаровым векторам, удалось избавиться от нелинейности и свести задачу к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных радиальных функций. Вопрос о возникновении магнитного динамо решается исследованием наличия собственных значений с положительной действительной частью, отвечающих экспоненциально растущему магнитному полю.

В настоящей статье представлены задачи, решение которых получено авторами с использованием аппарата шаровых векторов, и основные результаты, позволяющие выявить качественные особенности динамики среды.

1. Аппарат шаровых векторов

Шаровыми векторами на единичной сфере называют полную систему линейно независимых вектор-функций:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) &= (l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)\mathbf{e}_r - \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) &= lY_{lm}(\theta, \varphi)\mathbf{e}_r + \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\theta - \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\varphi, \\ l &= 1, 2, \dots, \quad m = -l, \dots, l, \end{aligned} \quad (1)$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ – сферические функции. Этот аппарат получил развитие в связи с изучением квантово-механического строения вещества [2, 3]. Применение шаровых векторов в задачах динамики сплошных сред позволяет свести векторную задачу к задачам для скалярных радиальных функций [1].

2. Свободные угловые движения квазишара

Рассмотрим задачу о деформировании изотропного упругого квазишара, совершающего свободные угловые движения.

Разложим уравнение поверхности тела в ряд по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ и ограничимся N членами разложения:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left(1 + \delta \sum_{l=2, |m| \leq l}^N \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \right), \quad \delta \ll 1.$$

Свяжем с телом систему координат $Ox_1x_2x_3$, вращающуюся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$. Смещение элемента объема относительно $Ox_1x_2x_3$ будем характеризовать вектором $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

Введем обозначения:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \varepsilon = \frac{\rho R_0^2}{\mu t_*^2},$$

где ρ – плотность тела, R_0 – характерный размер тела, t_* – характерное время движения тела как целого, λ и μ – упругие постоянные.

Вязкость тела считается малой и учитывается лишь как причина затухания угловых движений. Это позволяет искать вектор перемещений в виде ряда по малому параметру ε :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \mathbf{u}''(\mathbf{r}, t) + \dots$$

Запишем уравнения движения элемента объема V и условия отсутствия напряжений на поверхности S в связанной системе:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}' + (\kappa + 1) \text{grad div } \mathbf{u}' &= [\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]] \text{ в } V, \\ [k u'_i \delta_{ij} + 2u'_{ij}] n_j &= 0 \text{ на } S, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где u'_{ij} – тензор малых деформаций, n_j – компоненты вектора нормали к поверхности S ; δ_{ij} – символ Кронекера.

Считается, что параметры ε и δ , характеризующие упругие свойства и малое отклонение поверхности тела от сферы, связаны неравенством:

$$\varepsilon \ll \delta \ll 1.$$

Вектор перемещений \mathbf{u}' ищется в виде ряда по шаровым векторам (1)

$$\mathbf{u}'(\mathbf{r}, t) = \sum_{l, m, \zeta} (\zeta f_{lm}^0(r) + \delta \zeta f_{lm}^1(r)) \mathbf{Y}_{lm}^\zeta(\theta, \varphi),$$

в котором радиальные функции $\zeta f_{lm}^0(r)$ отвечают деформациям изотропного упругого шара, а $\zeta f_{lm}^1(r)$ обусловлены малым отклонением поверхности тела от сферы ($\zeta = 0, +1, -1$). Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ определяется в результате решения уравнения для кинетического момента \mathbf{K}

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{K}] = 0,$$

где в рассматриваемом приближении $K_i = [I_{ij}^0 + \varepsilon(I'_{ij} + \delta I''_{ij})]\omega_j$. Здесь I_{ij}^0 – компоненты тензора инерции тела до его деформирования, а I'_{ij}, I''_{ij} – поправки тензора инерции, связанные с учетом упругих свойств тела [4, 5].

Возможность глобального перемещения в теле оси устойчивого стационарного вращения продемонстрирована на примере упругого тела, обладающего кубической симметрией формы поверхности [5]. В этом случае в уравнении поверхности тела будет присутствовать четвертая гармоника:

$$R(\theta, \varphi) = 1 + \delta[\alpha_{40}Y_{40}(\theta, \varphi) + \alpha_{44}(Y_{44}(\theta, \varphi) + Y_{4,-4}(\theta, \varphi))].$$

Система главных осей $Ox_1x_2x_3$ выбрана так, чтобы ось Ox_3 проходила через главную диагональ «куба». В $Ox_1x_2x_3$ тензор инерции недеформированного квазишара имеет вид:

$$I_{ij}^0 = (I_0 + \Delta_i)\delta_{ij}, \quad I_0 = \frac{2}{5}, \quad \Delta_i \ll I_0.$$

Считается, что Ox_3 – ось среднего по величине момента инерции:

$$\Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_1.$$

Тело приведено в быстрое вращение вокруг оси Ox_3 с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + (\Omega + \omega_3)\mathbf{e}_3, \quad \omega_i \ll \Omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

Перемещение в теле оси устойчивого стационарного вращения описывается геометрически с помощью изображения годографа вектора кинетического момента \mathbf{K} на сфере $\mathbf{K}^2 = \text{const}$.

При большой скорости вращения качество динамики тела определяется четвертой гармоникой формы (рис. 1). С уменьшением угловой скорости Ω до некоторого значения Ω_1 область притяжения устойчивого вращения уменьшается (рис. 2).

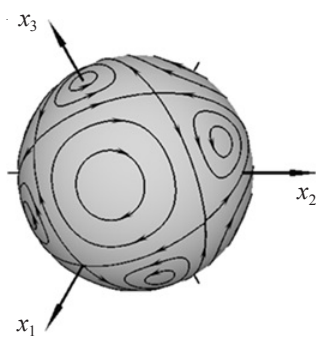


Рис. 1

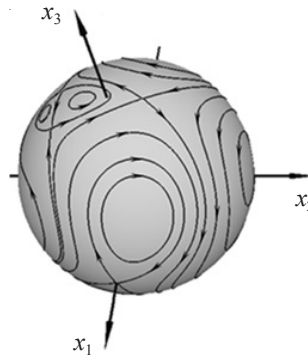


Рис. 2

При $\Omega = \Omega_1$ область притяжения вместе с примыкающей к ней ячейкой исчезает, ее место заполняют траектории, охватывающие ось наименьшего момента инерции Ox_2 (рис. 3). При дальнейшем замедлении вращения седло будет двигаться к положению оси Ox_3 . Уменьшение угловой скорости до Ω_2 приводит к исчезновению неустойчивых фокусов, заключенных в петлях сепаратрис седловой точки в положении оси наибольшего момента инерции Ox_1 , и рождению в окрестности этой

оси устойчивого фокуса. С этого момента эллипсоид инерции тела в недеформированном состоянии полностью определяет качество его динамики (рис. 4).

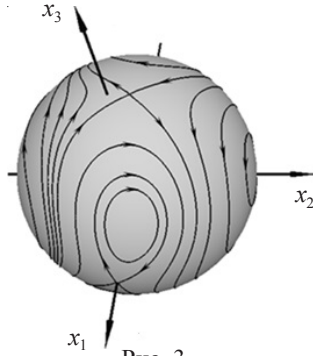


Рис. 3

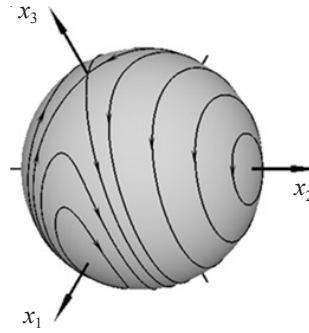


Рис. 4

В рассмотренной модели внутренняя диссипация не приводит к качественному изменению динамики тела. Иначе обстоит дело, когда наряду с внутренней диссипацией энергии присутствует и малое внешнее сопротивление движению тела. Кинетический момент не сохраняется, но его изменение ввиду малости можно не принимать в расчет. Внешнее сопротивление уменьшает угловую скорость тела и со временем изменяет соотношение между факторами, определяющими динамику тела. В результате при $\Omega = \Omega_*$ ось устойчивого стационарного вращения смещается в теле в новое положение. В рассмотренной задаче минимум кинетической энергии «перемещается» от Ox_3 к направлению Ox_1 .

3. Течение жидкости между сферической и квазисферической поверхностями

Рассмотрим задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости в пространстве между вращающимися сферической и квазисферической поверхностями. Под квазисферичностью понимается наличие малого постоянного смещения внутренней поверхности относительно внешней и малой эллипсоидальности внутренней поверхности.

Пусть эллипсоид является эллипсоидом вращения с полуосями a, b , ориентированным согласно рис. 5. Эллипсоид вращается вокруг оси O_1z_1 неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$ с постоянной угловой скоростью ω_1 , а внешняя сфера с радиусом r_2 — относительно оси O_2z_2 неподвижной системы $O_2x_2y_2z_2$ с постоянной скоростью ω_2 . Считается, что центр симметрии эллипсоида O_1 сдвинут относительно центра внешней сферы O_2 на малое расстояние

$$\delta = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_z^2}, \quad \delta_x, \delta_z \ll 1,$$

таким образом, что центр O_1 в системе $O_2x_2y_2z_2$ имеет координаты $O_1(\delta_x, 0, \delta_z)$.

Для описания движения жидкости используется сферическая система координат, согласованная с системой $O_2x_2y_2z_2$. Уравнение внутренней поверхности в сферической системе координат с точностью до членов первого порядка по параметрам сдвига δ_x, δ_z и параметру эллипсоидальности μ имеет вид:

$$r = a + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta + \mu a \sin^2 \theta \sin^2 (\varphi - \omega_1 t).$$

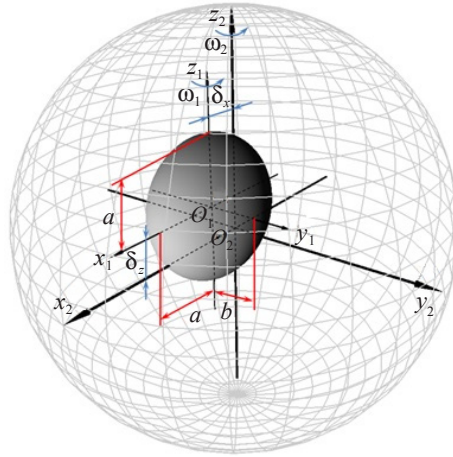


Рис. 5

Задача решается в предположении малости числа Рейнольдса. В этом случае поле скорости определяется из решения уравнений Навье–Стокса после исключения из него градиента давления и уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \operatorname{rot} \Delta \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

совместно с условиями прилипания жидкости к ограничивающим ее поверхностям, где ν – кинематическая вязкость.

Решение уравнений (2) ищется в виде ряда по шаровым векторам (1):

$$\mathbf{v}(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{l=0, |m| \leq l} (K_{lm}(r, t) \mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + P_{lm}(r, t) \mathbf{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + M_{lm}(r, t) \mathbf{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi)).$$

На рис. 6, 7 изображены векторные поля скорости \mathbf{v} без осесимметричной составляющей \mathbf{v}_0 , отвечающей решению задачи о движении жидкости в пространстве между дифференциально вращающимися концентрическими сферами.

Рисунок 6 иллюстрирует влияние сдвига δ_x внутренней поверхности относительно внешней в экваториальной плоскости при отсутствии эллипсоидальности $\mu = 0$. Линии векторного поля $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ можно разделить на три типа: линии, концы которых лежат на внешней сфере (зеленый цвет), линии с концами на внутренней сфере (красный цвет) и замкнутые линии, расположенные внутри пространства между сферами (синий цвет). Каждая линия лежит в определенной полуплоскости с границей вдоль оси $O_2 y_2$. Области, содержащие замкнутые линии, уменьшаются при повороте полуплоскости относительно $O_2 y_2$ от $\{\theta = \pi/2, \pi/2 < \varphi < 3\pi/2\}$ к $\{\theta = \pi/2, -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$, в которой замкнутые линии отсутствуют.

Рисунок 7 отвечает случаю отсутствия сдвига внутренней эллипсоидальной поверхности относительно внешней ($\delta_x = \delta_z = 0$). В этом случае вблизи внутренней поверхности располагаются замкнутые линии векторного поля. В верхней и нижней частях полости, разделенных экваториальной плоскостью, линии красного цвета представляют собой изогнутые кривые, не лежащие на семействе плоскостей или сферических поверхностей. В экваториальной плоскости имеются центрально-симметричные линии синего цвета, вытянутые вдоль оси $O_2 x_2$, которые являются

суперэллиптическими кривыми (кривыми Ламе). Вблизи внешней поверхности присутствуют незамкнутые линии (зеленого цвета), соприкасающиеся со сферой в двух точках.

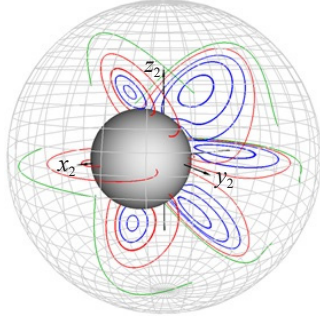


Рис. 6

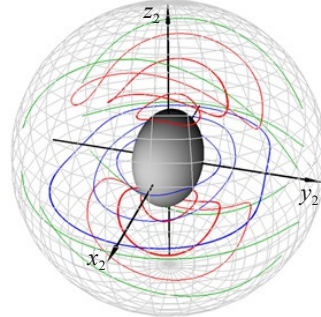


Рис. 7

Таким образом, осевая асимметрия потока в рассмотренных моделях приводит к возникновению радиального течения, необходимого для генерации магнитного поля. Наличие замкнутых траекторий векторного поля $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ представляет интерес при изучении конвекционных течений [12].

4. О генерации магнитного поля

Рассмотрим задачу о генерации магнитного поля течением, описанным в п. 3. Полная система уравнений магнитной гидродинамики в безразмерном виде [12, 18]:

$$\varepsilon \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = s \operatorname{rot} (\mathbf{H}, \nabla) \mathbf{H} + \operatorname{rot} \Delta \mathbf{v},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = R_m \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] + \Delta \mathbf{H},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{4}$$

где

$$t_* = \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2}, \quad \varepsilon = \frac{c^2}{4\pi\sigma\nu}, \quad s = \frac{I^2\sigma}{\rho\nu c^2}, \quad R_m = \frac{4\pi\sigma\nu_* R^2}{c^2}$$

– безразмерные параметры; R – масштаб длины, t_* – масштаб времени, I – масштаб силы тока, ν_* – характерная скорость потока, R_m – магнитное число Рейнольдса, ρ – плотность жидкости, ν – кинематическая вязкость жидкости.

Условия, налагаемые на параметры $\varepsilon \ll 1$, $s \ll 1$, позволяют искать решение системы (3), (4) в виде разложения по степеням ε , s :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + s \mathbf{v}_2 + \dots, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \varepsilon \mathbf{H}_1 + s \mathbf{H}_2 + \dots$$

В качестве начального приближения \mathbf{v}_0 берется стационарная составляющая решения, полученного из задачи гидродинамики (3). Напряженность магнитного поля \mathbf{H}_0 , создаваемого течением \mathbf{v}_0 в пространстве между сферами, находится из уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_0}{\partial t} = R_m \operatorname{rot} [\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_0] + \Delta \mathbf{H}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0. \quad (5)$$

Решение нестационарной задачи (5) в пространстве между вращающимися поверхностями ищется в виде ряда по шаровым векторам (1):

$$\mathbf{H}_0(r, \theta, \varphi, t) = e^{\lambda t} \sum_{l=1, 2, \dots, |m| \leq l} (\Psi_{lm}^0(r) \mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + \Psi_{lm}^+(r) \mathbf{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + \Psi_{lm}^-(r) \mathbf{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi)).$$

Векторное произведение $[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_0]$ представляется в виде разложения:

$$[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_0] = e^{\lambda t} \sum_{l=1, 2, \dots, |m| \leq l} (\Phi_{lm}^0(r) \mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + \Phi_{lm}^{+1}(r) \mathbf{Y}_{lm}^{+1}(\theta, \varphi) + \Phi_{lm}^{-1}(r) \mathbf{Y}_{lm}^{-1}(\theta, \varphi)),$$

в котором функции $\Phi_{lm}^\zeta(r)$ являются линейными комбинациями неизвестных радиальных функций $\Psi_{lm}^\zeta(r)$, $\zeta = 0, +1, -1$.

Подстановка разложений \mathbf{H}_0 и $[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_0]$ в уравнения (5) и группировка коэффициентов перед шаровыми векторами с одинаковыми индексами позволяет свести задачу к решению бесконечномерной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных радиальных функций $\Psi_{lm}^\nu(r)$.

После замены производных разностными аналогами задача сводится к нахождению собственных значений λ_k матрицы усеченной системы. Значения λ_k будут зависеть от величины магнитного числа Рейнольдса R_m , выступающего в качестве параметра в модели. Если действительные части всех собственных чисел отрицательны, поле \mathbf{H}_0 , создаваемое течением \mathbf{v}_0 , со временем будет затухать. Если при некотором значении R_m действительная часть хотя бы одного λ_k становится положительной, соответствующее ему магнитное поле начинает экспоненциально нарастать, что означает возникновение динамо. Интерес представляет собственное значение с наибольшей действительной частью $\operatorname{Re} \lambda^* = \max \operatorname{Re} \lambda_k$.

Для оценки величины $\operatorname{Re} \lambda^*$ в расчетах использовались усредненные характеристики Земли [19, 20, 22] и учитывалось опережающее вращение твердого ядра относительно мантии. Для значений $L = 1, 2$, определяющих наивысший порядок гармоник в разложении вектора \mathbf{H}_0 , получена зависимость $\operatorname{Re} \lambda^*$ от магнитного числа Рейнольдса. Показано, что при $R_m > R_m^{\text{кр}}(L)$ действительная часть $\operatorname{Re} \lambda^*$ становится положительной. При $L = 1$ критическое значение магнитного числа Рейнольдса равно $R_m^{\text{кр}} \approx 32$, при $L = 2 - R_m^{\text{кр}} \approx 29$.

По сравнению с оценками R_m для жидкого ядра Земли полученное число $R_m^{\text{кр}}$ оказывается меньше. Таким образом, в рамках рассмотренной модели возможно возбуждение экспоненциально растущего магнитного поля.

Заключение

Используемый подход, основанный на применении аппарата шаровых векторов, может быть полезен при решении задач механики, обладающих сферической симметрией. В ряде случаев этот аппарат позволяет найти аналитическое решение уравнений или значительно упростить их численное решение. Полученные авторами качественные результаты [4–10], свидетельствующие о возможности глобального перемещения полюсов упругого деформируемого тела [4, 5], наличии радиального течения жидкости в пространстве между вращающимися квазисферическими поверхностями [8, 9] и связанной с ним возможности возбуждения магнитного поля

[7, 10], представляют интерес для изучения динамики Земли и механизма магнитного динамо.

Список литературы

1. Петрашень Г.И. Решения векторных предельных задач математической физики в случае шара. *ДАН СССР*. 1945. Т. 46. №7. С. 291–294.
2. Берестецкий В.Б. Электромагнитные поля мультиполей. *ЖЭТФ*. 1947. Т. 17. С. 12–18.
3. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975. 439 с.
4. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободных движениях деформируемого твердого тела, близкого к шару. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1983. №3. С. 43–50.
5. Новиков В.В., Февральских Л.Н. К задаче о свободных угловых движениях деформируемого твердого тела, близкого по форме к шару. *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2014. Т. 156. Кн. 1. С. 109–116.
6. Новиков В.В., Февральских Л.Н. К вопросу о затухании свободной прецессии астероидов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №2. С. 227–237.
7. Novikov V.V., Fevral'skikh L.N. On a certain laminar dynamo model. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. Vol. 918. No 1. 012025. DOI: 10.1088/1742-6596/918/1/012025.
8. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О течении жидкости между вращающимися поверхностями. *Прикладная механика и техническая физика*. 2011. Т. 52. №1. С. 40–46.
9. Новиков В.В., Февральских Л.Н. Течение жидкости между неконцентрическими сферами, совершающими дифференциальное вращение. *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2016. Т. 158. Кн. 1. С. 129–140.
10. Новиков В.В., Февральских Л.Н. О возможности генерации магнитного поля жидкостью между неконцентрическими вращающимися сферами. *XXVIII Международ. инновационно-ориентированной конф. молодых ученых и студентов (МИКМУС – 2016)*: Сб. тр. конф. Москва, 07–09 дек. 2016. М.: ИМАШ РАН, 2017. С. 152–154.
11. Christensen U., Aubert J. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophysical Journal International*. 2006. Vol. 166. Iss. 1. P. 97–114. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03009.x>.
12. Cowling T.G. The magnetic field of sunspots. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 1933. Vol. 94. Iss. 1. P. 39–48. <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/94.1.39>.
13. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1995. Vol. 91. Iss. 1–3. P. 63–75. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(95\)03049-3](https://doi.org/10.1016/0031-9201(95)03049-3).
14. Moffat H.K. *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 342 p.
15. Ruzmaikin A.A., Shukurov A.M., Sokoloff D.D., Starchenko S.V. Maximally-efficient-generation approach in the dynamo theory. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*. 1990. Vol. 52. Iss. 1–3. P. 125–139. DOI: 10.1080/03091929008219843./
16. Schriinner M., Schmitt D., Cameron R., Hoynig P. Saturation and time dependence of geodynamo models. *Geophysical Journal International*. 2010. Vol. 182. Iss. 2. P. 675–681. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04650.x>.
17. Spence E. J., Reuter K., Forest C. B. A spherical plasma dynamo experiment. *The Astrophysical Journal*. 2009. Vol. 700. No 1. P. 470–478. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/700/1/470>.
18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1982. 624 с.
19. Монин А.С. *Теоретические основы геофизической гидродинамики*. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.
20. Монин А.С. *Вращение Земли и климат*. Л.: Гидрометеоиздат, 1972. 112 с.
21. Шерклиф Д. *Курс магнитной гидродинамики*. М.: Мир, 1967. 320 с.
22. Song X., Richards R.G. Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core. *Nature*. 1996. Vol. 382. No 6588. P. 221–224. DOI: 10.1038/382221a0.

References

1. Petrashen G.I. Resheniya vektornykh predelnykh zadach matematicheskoy fiziki v sluchae shara [Solutions of vector limit problems of mathematical physics in the case of a sphere]. *Doklady Akademii nauk SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Sciences]*. 1945. Vol. 46. No 7. P. 291–294 (In Russian).
2. Berestetskiy V.B. Elektromagnitnye polya multipoley [Electromagnetic fields of multipoles]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki [J. Exp. Theor. Phys.]*. 1947. Vol. 17. P. 12–18 (In Russian).
3. Varshalovich D.A., Moskalev A.N., Khersonskiy V.K. *Kvantovaya teoriya uglovogo momenta [Quantum Theory of Angular Momentum]*. Leningrad. Nauka Publ. 1975. 439 p. (In Russian).
4. Denisov G.G., Novikov V.V. O svobodnykh dvizheniyakh deformiruемого tverdogo tela, blizkogo k sharu [On free movements of a deformable solid body close to a sphere]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1983. No 3. P. 43–50 (In Russian).
5. Novikov V.V., Fevralskikh L.N. K zadache o svobodnykh uglovykh dvizheniyakh deformiruемого tverdogo tela, blizkogo po forme k sharu [To the problem of free angular motions of a deformable solid body, close to form a ball]. *Uchenye zapiski Kazanskogo unersiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]*. 2014. Vol. 156. Book 1. P. 109–116 (In Russian).
6. Novikov V.V., Fevralskikh L.N. K voprosu o zatukhanii svobodnoy pretsessii asteroidov [To the problem of the damping of the free precession of asteroids]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2018. Vol. 80. No 2. P. 227–237 (In Russian).
7. Novikov V.V., Fevralskikh L.N. On a certain laminar dynamo model. *J. Phys. Conf.* 2017. Vol. 918. No 1. 012025. DOI: 10.1088/1742-6596/918/1/012025.
8. Denisov G.G., Novikov V.V. O techenii zhidkosti mezhdu vrashchayushchimisya poverkhnostyami [On the flow of fluid between rotating surfaces]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [J. Appl. Mech. Tech. Phys.]*. 2011. Vol. 52. No 1. P. 40–46 (In Russian).
9. Novikov V.V., Fevralskikh L.N. Techenie zhidkosti mezhdu nekonsentricheskimi sferami, sovershayushchimi differentsialnoe vrashchenie [The flow of liquid between concentrates on areas, performing a differential rotation velocities]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]*. 2016. Vol. 158. Book 1. P. 129–140 (In Russian).
10. Novikov V.V., Fevralskikh L.N. O vozmozhnosti generatsii magnitnogo polya zhidkostyu mezhdu nekonsentricheskimi vrashchayushchimisya sferami [On the possibility of generating a magnetic field by a liquid between non-concentric rotating spheres]. *XVIII Mezhdunarodnaya innovatsionno-orientirovannoy konferentsiya molodykh uchenykh i studentov (MIKMUS – 2016): Sbornik trudov. Moskva, 07–09 Dek. 2016. [Proceedings of the XXVIII International Innovation-Oriented Conference of Young Scientists and Students (MICMUS-2016)]*. Moscow. Dec. 07–09, 2016. Moscow. IMASH RAN Publ. 2017. P. 152–154 (In Russian).
11. Christensen U., Aubert J. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophys. J. Int.* 2006. Vol. 166. Iss. 1. P. 97–114. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03009.x>.
12. Cowling T.G. The magnetic field of sunspots. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1933. Vol. 94. Iss. 1. P. 39–48. <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/94.1.39>.
13. Glatzmaier G.A., Roberts P.H. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Phys. Earth Planet. Inter.* 1995. Vol. 91. Iss. 1–3. P. 63–75. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(95\)03049-3](https://doi.org/10.1016/0031-9201(95)03049-3).
14. Moffat H.K. *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*. Cambridge. Cambridge University Press. 1978. 342 p.
15. Ruzmaikin A.A., Shukurov A.M., Sokoloff D.D., Starchenko S.V. Maximally-efficient-generation approach in the dynamo theory. *Geophys. Astroph. Fluid Dyn.* 1990. Vol. 52. Iss. 1–3. P. 125–139. DOI: 10.1080/03091929008219843.
16. Schriener M., Schmitt D., Cameron R., Hoyng P. Saturation and time dependence of geodynamo models. *Geophys. J. Int.* 2010. Vol. 182. Iss. 2. P. 675–681. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04650.x>.

17. Spence E.J., Reuter K., Forest C.B. A spherical plasma dynamo experiment. *Astrophys. J.* 2009. Vol. 700. No 1. P. 470–478. <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/700/1/470>.
18. Landau L.D., Lifshits E.M. *Elektrodinamika sploshnykh sred [Electrodynamics of Continuous Media]*. Moscow. Nauka Publ. 1982. 624 p. (In Russian).
19. Monin A.S. *Teoreticheskie osnovy geofizicheskoy gidrodinamiki [Theoretical Foundations of Geophysical Hydrodynamics]*. Leningrad. Gidrometeoizdat Publ. 1988. 424 p. (In Russian).
20. Monin A.S. *Vrashchenie Zemli i klimat [Rotation of the Earth and Climate]*. Leningrad. Gidrometeoizdat Publ. 1972. 112 p. (In Russian).
21. Shercliff Y.A. A textbook of magnetohydrodynamics. Oxford, New York. Pergamon Press. 1965. 265 p.
22. Song X., Richards R.G. Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core. *Nature*. 1996. Vol. 382. No 6588. P. 221–224. DOI: 10.1038/382221a0.

APPLICATION OF THE APPARATUS OF BALL VECTORS IN PROBLEMS OF MECHANICS

Novikov V.V., Fevralskikh L.N.

*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

An approach to solving problems of dynamics of distributed mechanical systems with spherical symmetry based on the use of the ball vector apparatus is demonstrated. A number of problems of the dynamics of a solid deformable body, liquid fluid, and magnetic hydrodynamics are presented, for which an analytical solution is obtained that allows us to identify qualitative features of the dynamics of the studied objects.

The problem of free angular movements of a deformable body close in shape to a ball is considered. The example of almost of ball possessing cubic symmetry, body shape and almost spherical the inertia tensor in the undeformed condition, demonstrates the ability of the global movement in the body axis of steady rotation (pole). The effect is due to the fact that when a body rotates at high speed, the elastic properties play a decisive role in its dynamics. Over time, the angular velocity of the drag decreases and the movement of the body is increasingly affected by its ellipsoidicity. The motion of an incompressible viscous fluid in the space between a rotating non-concentric sphere and an ellipsoid is studied. It is shown that the asymmetry of the flow leads to the appearance of a radial flow of the liquid. The presence of such a flow in the case of a conducting liquid is a necessary condition for generating a magnetic field.

Assuming that the liquid is conductive, a study of the possibility of generating a magnetic field is carried out on the basis of the obtained flow in the framework of the kinematic approach. The smallest value of the Reynolds magnetic number is found, which creates an exponentially growing magnetic field when passing through it.

The results obtained can be useful for studying the dynamics of the Earth and the planets of the Solar system and the mechanism of generating a geomagnetic field.

Keywords: spherical symmetry, apparatus of spherical vectors, elastic quasiball, conducting viscous liquid, quasispherical layer, magnetic dynamo.