

УДК 539.2/.6

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-3-305-316

МОДЕЛЬ КРИВОЙ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТАЛИ 20ХГР И СТАЛИ 35

© 2020 г.

Головина Н.Я.¹, Белов П.А.²

¹Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Российская Федерация

²Институт прикладной механики РАН, Москва, Российская Федерация

ntgolovina@rambler.ru

Поступила в редакцию 26.08.2020

В большинстве случаев кривые деформирования, определяющие свойства упругопластических материалов, представляют собой эмпирические зависимости, интерполирующие определенную выборку экспериментальных точек. В то же время эмпирические кривые не дают представления о физике деформационных процессов в таких материалах. В качестве альтернативы предлагается построить кривые деформирования как решение дифференциального уравнения, каждый член которого имеет физический смысл и определяет соответствующий механизм деформации, свойственный каждому материалу. Строится дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами, собственными функциями которого являются полиномы и степенные функции, они обеспечивают преемственную связь этой модели с эмпирической моделью Рамберга – Осгуда. Показано, что оператор этого уравнения есть оператор Эйлера, он является произведением двух операторов второго порядка. Первый оператор определяет механизм линейного деформирования, а второй – механизм нелинейного деформирования материала. Параметры материала для обработки экспериментальных данных определены методами прикладной математики. Для сокращения объема вычислений предлагается метод сжатия двумерной (в координатах деформация–напряжение) области для нахождения характерной точки кривой деформирования – предела пропорциональности. Этот метод определения предела пропорциональности является формальным, математическим и лишен субъективизма, в отличие от метода, предписанного действующим ГОСТом. Сформулирована физически обоснованная непротиворечивая система четырех граничных условий на интервале нелинейной упругости кривой деформирования. Математическая модель построения кривых деформирования различных физически нелинейных материалов позволяет создавать математические модели ресурса таких материалов.

Ключевые слова: закон Рамберга – Осгуда, эмпирические кривые деформирования, математическая модель, обработка экспериментальных данных.

Введение

Оценка и прогнозирование состояния материала предполагает знание его механических свойств. Точная оценка механических характеристик может быть получе-

на в результате анализа кривой деформирования, записанной в координатах напряжение–деформация во время стандартного испытания на растяжение. Кривую деформирования можно разделить на две части: физически линейную и физически нелинейную.

В литературе сформулирован ряд моделей [1–12], описывающих эмпирические зависимости напряжение–деформация. Одной из самых известных моделей является модель Рамберга – Осгуда, которая популярна как среди ученых, занимающихся моделированием свойств материалов [13–17], так и среди инженеров, решающих задачи проектирования конструкций из пластичных материалов [18–21].

Классическая модель Рамберга – Осгуда [22] постулируется как трехпараметрическая функция деформации от напряжения и трех параметров среды:

$$\varepsilon = A\sigma + B\sigma^\eta, \quad (1)$$

где $\varepsilon = f(\sigma, A, B, \eta)$ – деформация, зависящая от напряжения σ и трех параметров A, B, η , отражающих свойства материала. Отметим, что параметр η – безразмерный, а параметры A, B имеют размерность.

При сравнительном анализе достоинств и недостатков моделей деформирования и для сопоставления с экспериментальными данными удобно использовать безразмерную форму записи закона деформирования. Для этого выберем точку абсолютного максимума напряжений из выборки экспериментальных точек и назовем ее точкой предела прочности с координатами $(\varepsilon_c, \sigma_c)$. Отбросим все точки, лежащие справа от точки предела прочности, как не отражающие свойств неразрушенных материалов. Нормируем напряжения σ на напряжение предела прочности σ_c :

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_c},$$

а деформации ε – на деформацию предела прочности ε_c :

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}.$$

Закон деформирования Рамберга – Осгуда (1) в безразмерных переменных:

$$\varepsilon^* = A^*\sigma^* + B^*(\sigma^*)^\eta, \quad (2)$$

его можно записать в виде

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{E_0^*} \left[1 + \alpha \left(\frac{\sigma^*}{\sigma_e^*} \right)^{\eta-1} \right].$$

В такой формулировке параметрами модели являются координаты $(\varepsilon_e^*, \sigma_e^*)$ характерной точки кривой деформирования, где σ_e^* – нормированный условный предел упругости,

$$\alpha = (E_0^* - 1)(\sigma_e^*)^{\eta-1},$$

$$\eta = \frac{\ln((E_0^*\varepsilon_e^* - \sigma_e^*)/(E_0^* - 1))}{\ln \sigma_e^*}.$$

Эмпирический закон Рамберга – Осгуда имеет два принципиально важных не-

достатка, ограничивающих его применение как при моделировании свойств материалов, так и при проектировании конструкций из них.

1. Возьмем дифференциал от соотношения (2):

$$d\varepsilon^* = [A^* + \eta B^*(\sigma^*)^{n-1}] d\sigma^*.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = \frac{1}{A^* + \eta B^*(\sigma^*)^{n-1}}. \quad (3)$$

Обратим внимание на то, что касательный модуль к инженерной кривой деформирования, соответствующий закону Рамберга – Осгуда, не может принимать нулевое значение и поэтому он несовместим с условием теоретической прочности:

$$\lim_{\varepsilon^* \rightarrow 1} \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = 0.$$

2. Из соотношения (3) следует, что касательный модуль является монотонно убывающей функцией и, следовательно, кривая деформирования, соответствующая закону Рамберга – Осгуда, не имеет линейного участка.

Статья посвящена построению кривой деформирования, свободной от указанных двух недостатков закона Рамберга – Осгуда.

1. Формулировка искомого дифференциального уравнения

В качестве альтернативы берется идея, высказанная в [1], что кривая деформирования имеет два принципиально разных участка (линейный и нелинейный), устраняющая второе противоречие закона Рамберга – Осгуда:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_e, \\ a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_m\varepsilon^m, & \varepsilon \geq \varepsilon_e. \end{cases}$$

Однако эта идея не уточняет вид кривой деформирования на втором участке, а ограничивается лишь констатацией факта, что это произвольная функция, которая может быть представлена в виде разложения в ряд Тейлора. Развивая эту идею, можно предположить, что кривая деформирования на нелинейном участке не просто определяется разложением в ряд Тейлора, а является решением некоторого дифференциального уравнения четвертого порядка, это позволяет устранить первый недостаток закона Рамберга – Осгуда, а именно: несовместимость с условием теоретической прочности (3).

На концах каждого участка можно сформулировать два условия, которым должна удовлетворять кривая деформирования. Действительно, на концах любого участка должны быть заданы напряжения и касательный модуль:

– при $\varepsilon^* = 0$

$$\begin{cases} \sigma^* \Big|_{\varepsilon^* = 0} = 0, \\ \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} \Big|_{\varepsilon^* = 0} = E_0^*; \end{cases} \quad (4)$$

– при $\varepsilon^* = \varepsilon_e^*$

$$\begin{cases} \sigma^* \Big|_{\varepsilon^* = \varepsilon_e^*} = E_0^* \varepsilon_e^*, \\ \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} \Big|_{\varepsilon^* = \varepsilon_e^*} = E_0^*; \end{cases} \quad (5)$$

– при $\varepsilon^* = 1$

$$\begin{cases} \sigma^* \Big|_{\varepsilon^* = 1} = 1, \\ \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} \Big|_{\varepsilon^* = 1} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Из этих условий следует, что кривая деформирования удовлетворяет некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка, для построения единственного решения которого требуется как раз по два условия на каждом конце интервала определения.

Исходя из структуры уравнения закона Рамберга – Осгуда (2) можно констатировать, что оно содержит линейную часть (первое слагаемое в правой части уравнения), соответствующую простому оператору второго порядка, пропорциональному второй производной по напряжениям. В рассматриваемом случае напряжения – это функции деформации на нелинейном участке. Тем не менее будем полагать, что линейный полином есть собственная функция искомого дифференциального уравнения четвертого порядка. Ограничимся пока моделированием кривых деформирования в рамках обратимых процессов. Тогда можно считать, что оператор искомого дифференциального уравнения является самосопряженным. Можно представить дифференциальный оператор четвертого порядка этого уравнения как произведение двух дифференциальных операторов второго порядка. С учетом того, что линейный полином является собственной функцией оператора второго порядка, можно утверждать, что один из этих двух операторов второго порядка определен. Вид второго оператора можно постулировать, опираясь на то, что в законе Рамберга – Осгуда помимо линейного полинома имеет место слагаемое, отражающее степенную зависимость. Оператором, собственные функции которого являются степенными функциями, должен быть оператор Эйлера. Таким образом, структура искомого дифференциального уравнения полностью определена, и оно может быть записано в следующем виде:

$$\varepsilon^{*2} \sigma^{*IV} + \varepsilon^* \sigma^{*''' } - (\eta - 2) \sigma^{*''} = 0, \quad (7)$$

где $(\eta - 2)$ – некоторый физический параметр, отражающий физические свойства материала. В принципе, при каждом слагаемом должен стоять свой множитель, отражающий физические свойства, однако в целях простоты ограничимся единственным механическим свойством в соответствии с (7).

2. Модифицированная модель как решение контактной задачи дифференциального уравнения четвертого порядка

В отличие от (2), в рассматриваемой модели напряжение является функцией деформации, а не наоборот. Соответственно кривая деформирования определяется линейной комбинацией фундаментальных решений уравнения (7) на каждом из двух участков кривой деформирования.

Решение имеет вид:

$$\sigma^*(\varepsilon^*) = \begin{cases} C_0 + C_1\varepsilon^* + C_2\varepsilon^{*\eta} + C_3\varepsilon^{*4-\eta}, & 0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^*, \\ c_0 + c_1\varepsilon^* + c_2\varepsilon^{*\eta} + c_3\varepsilon^{*4-\eta}, & \varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Касательный модуль:

$$\sigma^{*\prime}(\varepsilon^*) = \begin{cases} C_1 + C_2\eta\varepsilon^{*\eta-1} + C_3(4-\eta)\varepsilon^{*3-\eta}, & 0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^*, \\ c_1 + c_2\eta\varepsilon^{*\eta-1} + c_3(4-\eta)\varepsilon^{*3-\eta}, & \varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Граничные условия (4) при $\varepsilon^* = 0$ для решения на интервале линейности:

$$\begin{cases} \sigma^*(0) = C_0 = 0, \\ E^*(0) = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = C_1 = E_0^*. \end{cases}$$

Граничные условия (5) при $\varepsilon^* = \varepsilon_e^*$ для решения на интервале линейности:

$$\begin{cases} \sigma^*(\varepsilon_e^*) = E_0^*\varepsilon_e^* + C_2\varepsilon_e^{*\eta} + C_3\varepsilon_e^{*4-\eta} = E_0^*\varepsilon_e^*, \\ E^*(\varepsilon_e^*) = E_0^* + C_2\eta\varepsilon_e^{*\eta-1} + C_3(4-\eta)\varepsilon_e^{*3-\eta} = E_0^*. \end{cases}$$

Граничные условия (5) при $\varepsilon^* = \varepsilon_e^*$ для решения на интервале нелинейности:

$$\begin{cases} \sigma^*(\varepsilon_e^*) = c_0 + c_1\varepsilon_e^* + c_2\varepsilon_e^{*\eta} + c_3\varepsilon_e^{*4-\eta} = E_0^*\varepsilon_e^*, \\ E^*(\varepsilon_e^*) = c_1 + c_2\eta\varepsilon_e^{*\eta-1} + c_3(4-\eta)\varepsilon_e^{*3-\eta} = E_0^*. \end{cases}$$

Граничные условия (6) при $\varepsilon^* = 1$ для решения на интервале нелинейности:

$$\begin{cases} \sigma^*(1) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ E^*(1) = c_1 + c_2\eta + c_3(4-\eta) = 0. \end{cases}$$

Граничные условия на интервале линейности приводят к следующим значениям C_i :

$$C_0 = 0, \quad C_1 = E_0^*, \quad C_2 = C_3 = 0. \quad (10)$$

Удовлетворение граничным условиям на интервале нелинейности сводится к численному решению системы четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными постоянными интегрирования:

$$\begin{cases} c_0 + c_1\varepsilon_e^* + c_2\varepsilon_e^{*\eta} + c_3\varepsilon_e^{*4-\eta} = E_0^*\varepsilon_e^*, \\ c_1 + c_2\eta\varepsilon_e^{*\eta-1} + c_3(4-\eta)\varepsilon_e^{*3-\eta} = E_0^*, \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ c_1 + c_2\eta + c_3(4-\eta) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Подставляя полученные в результате решения системы (11) значения c_i и значения C_i в (8), получим формулу кривой деформирования.

3. Обработка экспериментальных данных и определение параметров модели

Используется методика обработки экспериментальных данных, основанная на численном поиске минимума суммарного квадратичного отклонения теоретичес-

кой кривой деформирования как функции трех параметров от выборки конечного числа n экспериментальных точек. На примере выборки из 30 экспериментальных точек для стали 20ХГР проведем анализ работоспособности и предсказательной силы предложенной теоретической модели.

Алгоритм обработки сводится к следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Каждая экспериментальная точка выбирается в качестве пробного предела пропорциональности. Для нее подбирается такой показатель η , чтобы суммарное квадратичное отклонение теоретической кривой деформирования, проходящей через эту выбранную точку, было минимальным. В результате ищется такая экспериментальная точка $(\epsilon_n^*, \sigma_n^*)$, для которой теоретическая кривая деформирования, проходящая через нее, имеет минимальное суммарное квадратичное отклонение от выборки экспериментальных точек по сравнению с другими точками, через которые проходят другие кривые деформирования с большим суммарным квадратичным отклонением (табл. 1).

Таблица 1

**Результаты обработки экспериментальных данных
с целью определения параметров материала**

Номер экспериментальной точки	n	2	3	4
Нормированные координаты точки предела пропорциональности на теоретической кривой	ϵ_e^*	0,018182	0,027273	0,036364
	σ_e^*	0,500000	0,850000	0,900000
Нормированный модуль упругости в точке предела пропорциональности	E_0^*	27,50000	31,16667	24,75000
Постоянные интегрирования в решении уравнения (7), определяемые из системы уравнений (11)	c_0	1,057464	0,968299	0,971444
	c_1	-0,049732	0,034834	0,030411
	c_2	0,007375	-0,003133	-0,001855
	c_3	-0,015107	0,000000	0,000000
Физический параметр, отражающий физические свойства материала	η	4,900000	11,12000	16,39000
Суммарное квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки экспериментальных точек	Δ	0,061819	0,015593	0,041460

Шаг 2. Пусть минимальное квадратичное отклонение имеет кривая деформирования, для которой пределом пропорциональности является экспериментальная точка $(\epsilon_n^*, \sigma_n^*)$ с номером n . Координаты ближайших к ней точек $(\epsilon_{n-1}^*, \sigma_{n-1}^*)$, $(\epsilon_{n+1}^*, \sigma_{n+1}^*)$ определяют прямоугольную область с координатами углов $(\epsilon_{n-1}^*, \sigma_{n-1}^*)$, $(\epsilon_{n+1}^*, \sigma_{n-1}^*)$, $(\epsilon_{n+1}^*, \sigma_{n+1}^*)$, $(\epsilon_{n-1}^*, \sigma_{n+1}^*)$, $n-1$ – номер ближайшей экспериментальной точки, лежащей ниже и левее предела пропорциональности; $n+1$ – номер ближайшей экспериментальной точки, лежащей выше и правее предела пропорциональности (табл. 2).

Таблица 2

**Координаты угловых точек области,
содержащей найденную точку в соответствии с шагом 1**

Первое приближение			
ϵ_{n-1}^*	0,018182	ϵ_{n+1}^*	0,036364
σ_{n-1}^*	0,500000	σ_{n+1}^*	0,900000

Покроем эту область прямоугольной сеткой $k \times k$. Каждый узел этой сетки будем считать пробным пределом пропорциональности и проводить через нее теоретическую кривую с таким параметром η , чтобы суммарное квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки экспериментальных точек было минимальным. В результате найдем точку, через которую можно провести теоретическую кривую с минимальным суммарным квадратичным отклонением от выборки экспериментальных точек. Соседние с найденной точкой узлы определяют новую прямоугольную область, линейные размеры которой в k раз меньше исходной области.

Через достаточно малое число итераций стороны стягивающейся области достигнут величин инструментальных погрешностей измерения деформаций и напряжений. Из таблицы 3 видно, что минимальное суммарное квадратичное отклонение соответствует точке с координатами: $\sigma^* = 0,74$ и $\epsilon^* = 0,025455$.

Таблица 3

Суммарные квадратичные отклонения для угловых точек области, содержащей точку предела пропорциональности теоретической кривой деформирования

$\sigma^* \backslash \epsilon^*$	0,021091	0,025455	0,029091
0,66	0,022461	0,031895	0,047255
0,74	0,016934	0,010095	0,027003
0,82	0,044345	0,027003	0,016147

Найденная точка предела пропорциональности и соответствующий ей показатель степени определяют все физические параметры теоретической кривой. Эти параметры представлены в таблице 4.

Таблица 4

Физические параметры теоретической кривой для стали 20ХГР

Физический параметр теоретической кривой	Обозначение	Значение
Нормированная координата точки предела пропорциональности на теоретической кривой	ϵ_e^*	0,025455
	σ_e^*	0,740000
Нормированный модуль упругости в точке предела пропорциональности	E_0^*	29,07142
Постоянные интегрирования в решении уравнения (7), определяемые из системы уравнений (11)	c_0	0,972413
	c_1	0,036302
	c_2	-0,000002
	c_3	-0,008712
Физический параметр, отражающий физические свойства материала	η	13,20000
Суммарное квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки экспериментальных точек	Δ	0,010095
Среднее квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки 30 экспериментальных точек	S	0,018344

Определив физические параметры, можно построить и саму кривую деформирования по формуле (8) (рис. 1).

Рисунок 1 показывает, что теоретическая кривая, построенная по изложенной методике, имеет высокую точность соответствия экспериментальным данным. Как видно из таблицы 4, для стали 20ХГР среднее квадратичное отклонение составило чуть более 1,8%. Аналогично определены параметры кривой деформирования для другого материала – стали 35. Значения параметров теоретической кривой для стали 35 приведены в таблице 5.

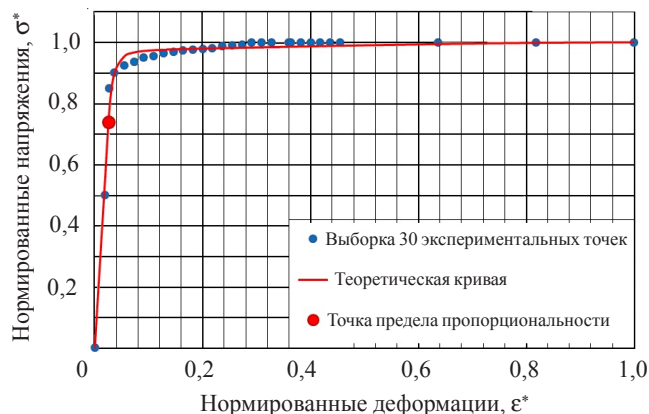


Рис. 1. Теоретическая кривая деформирования и экспериментальные данные для стали 20ХГР

Таблица 5

Физические параметры теоретической кривой для стали 35

Физический параметр теоретической кривой	Обозначение	Значение
Нормированные координаты точки предела пропорциональности на теоретической кривой	ϵ_e^*	0,009000
	σ_e^*	0,117904
Нормированный модуль упругости в точке предела пропорциональности	E_0^*	13,100437
Постоянные интегрирования в решении уравнения (7), определяемые из системы уравнений (11)	c_0	-0,182816
	c_1	-0,550845
	c_2	1,733660
Физический параметр, отражающий физические свойства материала	η	2,25000
Суммарное квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки экспериментальных точек	Δ	0,245425
Среднее квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки 582 экспериментальных точек	S	0,020535

Определив физические параметры, можно построить и саму кривую деформирования по формуле (8) (рис. 2).

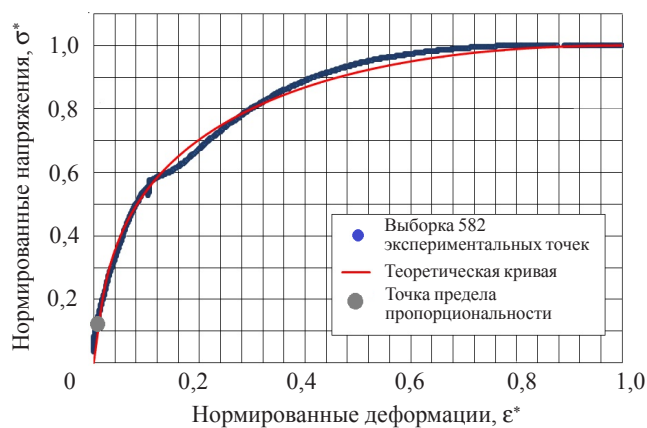


Рис. 2. Теоретическая кривая деформирования и экспериментальные данные для стали 35

Рисунок 2 показывает, что теоретическая кривая, построенная по изложенной методике, имеет высокую точность соответствия экспериментальным данным. Как видно из таблицы 5, для стали 35 среднее квадратичное отклонение составило чуть более 2%.

Заключение

Показано, что кривая деформирования удовлетворяет некоторому обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка, для построения единственного решения которого требуется задание напряжения и касательного модуля (по два условия) на каждом конце интервала определения. Представлен пример теоретического обоснования эмпирической кривой деформирования модифицированного закона Рамберга–Осгуда, устанавливающей, в отличие от классического закона Рамберга–Осгуда, степенную зависимость между напряжением и деформацией. Полученное решение обладает тем преимуществом, что удовлетворяет, в отличие от эмпирического закона Рамберга–Осгуда, условию теоретической прочности.

Полученная математическая модель апробирована на экспериментальных данных для стали 20ХГР и стали 35. Для стали 20ХГР среднее квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки из 30 экспериментальных точек составило 0,0183, для стали 35 среднее квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки из 582 экспериментальных точек составило 0,0205. Достигнутая точность математической модели вполне достаточна для инженерных приложений.

Список литературы

1. Mendelson A. *Plasticity: Theory and Application*. Malabar: Krieger, 1968. 353 с.
2. Ludwigson D.C. Modified stress-strain relation for FCC metals and alloys. *Metallurgical Transactions*. 1971. Vol. 2. Iss. 10. P. 2825–2828. DOI: 10.1007/BF02813258.
3. Ludwik P. *Elemente der technologischen Mechanik*. Berlin: Springer-Verlag, 1909. 57 s.
4. Swift H.W. Plastic instability under plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1952. Vol. 1. No 1. P. 1–18. DOI:10.1016/0022-5096(52)90002-1.
5. Voce E. The relationship between stress and strain for homogeneous deformation. *Journal of the Institute of Metals*. 1948. Vol. 74. No 7. P. 537–562.
6. Hertelé S., De Waele W., Denys R. A generic stress-strain model for metallic materials with two-stage strain hardening behaviour. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011. Vol. 46. Iss. 3. P. 519–531. DOI: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2010.12.004.
7. Quach W.M., Huang J.F. Stress-strain models for light gauge steels. *Procedia Engineering*. 2011. Vol. 14. P. 288–296. DOI: 10.1016/j.proeng.2011.07.035.
8. Walport F., Gardner L., Real E., Arrayago I., Nethercot D.A. Effects of material nonlinearity on the global analysis and stability of stainless steel frames. *Journal of Constructional Steel Research*. 2019. Vol. 152. P. 173–182. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2018.04.019>.
9. Gardner L., Yun X., Macorini L., Kucukler M. Hot-rolled steel and steel-concrete composite design incorporating strain hardening. *Structures*. 2017. Vol. 9. P. 21–28. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2016.08.005>.
10. Gardner L., Yun X., Fieber A., Macorini L. Steel design by advanced analysis: Material modeling and strain limits. *Engineering*. 2019. Vol. 5. Iss. 2. P. 243–249. <https://doi.org/10.1016/j.eng.2018.11.026>.
11. Yun X., Gardner L. The continuous strength method for the design of cold-formed steel non-slender tubular cross-sections. *Engineering Structures*. 2018. Vol. 175. P. 549–564. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.08.070>.
12. Papirno R., Meskall J., Hansen A. Fracture in axial compression tests of cylinders. In: *Compression Testing for Homogeneous Materials and Composites*. Eds. R. Cheate, R. Papirno. West Conshohocken, PA: ASTM International, 1983. P. 40–63. DOI: 10.1520/STP36195S.

13. Rasmussen K. Full-range stress-strain curves for stainless steel alloys. *Journal of Constructional Steel Research*. 2003. Vol. 59. Iss. 1. P. 47–61. doi.org/10.1016/S0143-974X(02)00018-4.
14. Gao H.S. Modeling stress strain curves for nonlinear analysis. *Materials Science Forum*. 2009. Vols. 575–578. P. 539–544. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.575-578.539.
15. Белов П.А., Лурье С.А., Гавриков М.Ю. Проблема экстраполяции малоциклового усталости ПКМ на ресурс. *Знание*. 2016. Т. 36. №7-1. С. 29–36.
16. Белов П.А., Лурье С.А., Гавриков М.Ю. Экстраполяция малоциклового усталости ПКМ на ресурс (вторая модель). *Sciences of Europe*. 2016. Vol. 2. No 6. P. 10–15.
17. Papirno R. Goodness of fit of the Ramberg – Osgood analytic stress-strain curve to tensile test data. *Journal of Testing and Evaluation*. 1982. Vol. 10. Iss. 6. P. 263–268. DOI: 10.1520/JTE10264J.
18. Головина Н.Я. Исследование вынужденных колебаний гибких металлических трубопроводов машин и агрегатов. *Дисс ... канд. техн. наук*. 05.02.13. Тюменский государственный нефтегазовый университет. Тюмень. 2002. 148 с.
19. Papirno R., Gerard G. Compression test of sheet materials at elevated temperatures. In: *Symposium on Elevated-Temperature Compression Testing of Sheet Materials*. Ed. H. Turner. West Conshohocken, PA: ASTM International, 1962 P. 12–32. DOI: 10.1520/STP46990S.
20. Skelton R.P., Maier H.J, Christ H.-J. The Bauschinger effect, Masing model and the Ramberg – Osgood relation for cyclic deformation in metals: *Materials Science and Engineering A*. 1997. Vol. 238. Iss. 2. P. 377–390. DOI: 10.1016/S0921-5093(97)00465-6.
21. Brondino G., Vicario G. An empirical comparison of estimating methods for the Ramberg – Osgood EIV model. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*. 2006. Vol. 35. Iss. 2. P. 407–417. DOI: 10.1080/03610910600591347.
22. Ramberg W., Osgood W.R. Description of stress-strain curves by three parameters. *National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note No 902*. Washington DC, 1943. 22 p.

References

1. Mendelson A. *Plasticity: Theory and Application*. Malabar. Krieger. 1968. 353 с.
2. Ludwigson D.C. Modified stress-strain relation for FCC metals and alloys. *Metallurgical Transactions*. 1971. Vol. 2. Iss. 10. P. 2825–2828. DOI: 10.1007/BF02813258.
3. Ludwik P. *Elemente der technologischen Mechanik*. Berlin. Springer-Verlag. 1909. 57 s.
4. Swift H.W. Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*. 1952. Vol. 1. No 1. P. 1–18. DOI: 10.1016/0022-5096(52)90002-1.
5. Voce E. The relationship between stress and strain for homogeneous deformation. *Journal of the Institute of Metals*. 1948. Vol. 74. No 7. P. 537–562.
6. Hertelé S., De Waele W., Denys R. A generic stress-strain model for metallic materials with two-stage strain hardening behaviour. *Int. J. NonLin. Mech*. 2011. Vol. 46. Iss. 3. P. 519–531. DOI: 10.1016/J.IJNONLINMEC.2010.12.004.
7. Quach W.M., Huang J.F. Stress-strain models for light gauge steels. *Procedia Engineering*. 2011. Vol. 14. P. 288–296. DOI: 10.1016/j.proeng.2011.07.035.
8. Walport F., Gardner L., Real E., Arrayago I., Nethercot D.A. Effects of material nonlinearity on the global analysis and stability of stainless steel frames. *J. Constr. Steel Res*. 2019. Vol. 152. P. 173–182. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2018.04.019>.
9. Gardner L., Yun X., Macorini L., Kucukler M. Hot-rolled steel and steel-concrete composite design incorporating strain hardening. *Structures*. 2017. Vol. 9. P. 21–28. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2016.08.005>.
10. Gardner L., Yun X., Fieber A., Macorini L. Steel design by advanced analysis: Material modeling and strain limits. *Engineering*. 2019. Vol. 5. Iss. 2. P. 243–249. <https://doi.org/10.1016/j.eng.2018.11.026>.
11. Yun X., Gardner L. The continuous strength method for the design of cold-formed steel non-slender tubular cross-sections. *Eng. Struct*. 2018. Vol. 175. P. 549–564. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.08.070>.
12. Papirno R., Meskall J., Hansen A. Fracture in axial compression tests of cylinders. In: *Compression Testing for Homogeneous Materials and Composites*. Eds. R. Cheate, R. Papirno. West Conshohocken, PA: ASTM International, 1983. P. 40–63. DOI: 10.1520 / STP36195S.

13. Rasmussen K. Full-range stress-strain curves for stainless steel alloys. *J. Constr. Steel Res.* 2003. Vol. 59. Iss. 1. P. 47–61. doi.org/10.1016/S0143-974X(02)00018-4.
14. Gao H.S. Modeling stress strain curves for nonlinear analysis. *Mater. Sci. Forum.* 2009. Vols. 575–578. P. 539–544. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.575-578.539.
15. Belov P.A., Lurie S.A., Gavrikov M.Yu. Problema ekstrapolyatsii malotsiklovoy ustalosti PKM na resurs [Problem of extrapolation of low-cyclic fatigue of PKM on the resource]. *Znanie.* 2016. Vol 36. No 7. P. 29–36. (In Russian).
16. Belov P.A., Lurie S.A., Gavrikov M.Yu. Ekstrapolyatsiya malotsiklovoy ustalosti PKM na resurs (vtoraya model) [Extrapolation of the low-cyclic fatigue of Polymeric composites on the resource (The second model)]. *Sciences of Europe.* 2016. Vol. 2. No 6. P. 10–15 (In Russian).
17. Papirno R. Goodness of fit of the Ramberg–Osgood analytic stress-strain curve to tensile test data. *J. Test. Eval.* 1982. Vol. 10. Iss. 6. P. 263–268. DOI: 10.1520/JTE10264J.
18. Golovina N.Yu. Issledovanie vynuzhdennykh kolebaniy gibkikh metallicheskich truboprovodov mashin i agregatov [Investigation of forced vibrations of flexible metal pipelines of machines and aggregates]. *Dissertatsiya ... kand. tekhn. nauk [PhD Thesis]*. Tyumen State Oil and Gas University. 2002. Tyumen. 148 p. (In Russian).
19. Papirno R., Gerard G. Compression test of sheet materials at elevated temperatures. In: *Symposium on Elevated-Temperature Compression Testing of Sheet Materials*. Ed. H. Turner. West Conshohocken, PA. ASTM Internationa. 1962. P. 12–32. DOI: 10.1520 / STP46990S.
20. Skelton R.P., Maier H.J, Christ H.-J. The Bauschinger effect, Masing model and the Ramberg–Osgood relation for cyclic deformation in metals: *Mat. Sci. Eng. A-Struct.* 1997. Vol. 238. Iss. 2. P. 377–390. DOI: 10.1016/S0921-5093(97)00465-6.
21. Brondino G. Vicario G. An empirical comparison of estimating methods for the Ramberg–Osgood EIV model. *Commun. Stat. – Simul.* 2006. Vol. 35. Iss. 2. P. 407–417. DOI: 10.1080/03610910600591347.
22. Ramberg W., Osgood W.R. Description of stress-strain curves by three parameters. *National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note No 902*. Washington DC. 1943. 22 p.

MODEL OF A CURVE OF NONLINEAR DEFORMATION OF STEEL 20HGR AND STEEL 35

Golovina N.Ya.¹, Belov P.A.²

¹*Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russian Federation*

²*Institute of Applied Mechanics of RAS, Moscow, Russian Federation*

In most cases the deformation curves that determine the properties of elastoplastic materials are empirical dependencies that interpolate a certain sample of experimental points. At the same time, empirical curves do not provide an idea of the physics of deformation processes in such materials. As an alternative, the article proposes to construct deformation curves as a solution to a differential equation, each term of which has a physical meaning and determines a certain deformation mechanism specific to each material. The offered differential equation is a fourth-order equation with variable coefficients, whose eigenfunctions are polynomials and power functions, which ensures the continuity of this model with the empirical Ramberg–Osgood model. It is shown that the operator of this equation is the Euler operator and is the product of two second-order operators. The first operator defines the mechanism of linear deformation, and the second - the mechanism of nonlinear deformation of the material. The parameters of the material for processing experimental data are determined by the methods of applied mathematics. To reduce the amount of calculations, a method of compressing a two-dimensional (in the coordinates of deformation–stress) region is proposed to find the characteristic point of the deformation curve, which is the proportionality limit. The proposed method for determining the proportionality limit is formal, mathematical and

devoid of subjectivity, in contrast to the method prescribed by the current GOST. A consistent physically substantiated system of four boundary conditions on the interval of nonlinear elasticity of the deformation curve is formulated. The mathematical model of building of deformation curves of various physically nonlinear materials allows to create mathematical models of the resource of such materials.

Keywords: Ramberg – Osgood law, empirical strain curves, mathematical model, experimental data processing.