

УДК 534.11:519.624.3

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НЕКОНСЕРВАТИВНОМ НАГРУЖЕНИИ

Ю.М. Темис, И.М. Федоров

Москва

Рассмотрены четыре численных метода исследования устойчивости стержней: метод конечных элементов, метод Бубнова–Галеркина, вариационно-разностный метод и обобщенный на случай неконсервативного нагружения метод сагиттарной функции. Исследована зависимость решения задачи устойчивости от параметров дискретизации названных численных методов. Показано, что математические модели, достаточно точные для анализа устойчивости стержней постоянного сечения, для переменного могут приводить к качественно неверным результатам.

1. Введение

Проблема анализа устойчивости стержней переменного поперечного сечения актуальна в большом числе приложений, например, при оптимизации формы колонн по критерию потери устойчивости.

В то время как многие задачи оптимизации формы колонн при консервативном нагружении допускают аналитическое исследование [1], в неконсервативном случае оптимизированные решения получают численно. Анализ устойчивости стержней переменного поперечного сечения, являющихся текущей конфигурацией колонны на каждом шаге оптимизационной процедуры, проводится с привлечением различных численных методов, каждый из которых имеет свои параметры дискретизации, влияющие на точность решения.

Метод Бубнова–Галеркина для решения задач устойчивости впервые предложен в рецензии И.Г. Бубнова на работу С.П. Тимошенко [2]. Впоследствии этот метод был развит Б.Г. Галеркиным [3] и успешно применяется, в том числе для решения задач устойчивости стержней (см., например, [4]).

Кроме метода Бубнова–Галеркина, для решения задач устойчивости стержней переменного сечения может быть использован метод конечных элементов [5], вариационно-разностный метод [6] и метод сагиттарной функции [7, 8]. Настоящая работа посвящена сравнению этих четырех методов при исследовании устойчивости стержней переменного сечения на примере двух широко известных расчетных схем неконсервативного нагружения: стержня, защемленного на одном конце и нагруженного на другом следящей силой, и свободного стержня, движущегося ускоренно под воздействием следящей силы, приложенной к одному из его торцов. Правильное решение задачи устойчивости для консольно закрепленного стержня постоянного сечения было найдено М. Беком [9]. Приближенное решение задачи устойчивости для свободного стержня постоянного сечения было впервые получено К.Н. Гопаком

[10], затем уточнено независимо Т. Белом [11] и В.И. Феодосьевым [12].

В качестве конфигураций стержней переменного сечения в настоящей статье используются оптимизированные формы, взятые из работ И. Сугиямы [5] (для консольного стержня) и О.Н. Кириллова [13] (для свободного стержня). Следует также отметить, что в настоящей работе не принимается во внимание эффект дестабилизации неконсервативной системы диссипативными силами [14–16], учет которого может приводить к существенному изменению границы области устойчивости стержней. При этом предполагается, что сделанное допущение не скажется на результатах проводимого сравнения эффективности численных методов анализа устойчивости.

2. Математическая постановка задачи

В силу сделанных допущений, запишем линеаризованное уравнение динамики стержня без диссипативных членов [17]:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(EJ(\xi) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(N(\xi) \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \rho F(\xi) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad \xi \in [0, L], \quad (1)$$

$\xi \in [0, L]$, где L – длина стержня, $y(\xi, t)$ – его перемещение в поперечном направлении, $EJ(\xi)$ – жесткость стержня на изгиб, ρ – плотность материала стержня, $F(\xi)$ – площадь его поперечного сечения, $N(\xi)$ – осевая нагрузка. Будем искать решение в виде:

$$y(\xi, t) = Y(\xi) e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(EJ(\xi) \frac{d^2 Y}{d\xi^2} \right) + \frac{d}{d\xi} \left(N(\xi) \frac{dY}{d\xi} \right) - \rho F(\xi) \omega^2 Y = 0. \quad (3)$$

Далее рассмотрим уравнение (3) в форме:

$$(s(x)u'')'' + (n(x)u')' - \omega^2 m(x)u = 0, \quad (4)$$

$x = \xi/L$, $0 \leq x \leq 1$, $u(x) = Y(xL)$, $s(x) = EJ(xL)/L^4 \rho$ характеризует жесткость, $n(x) = N(xL)/L^2 \rho$ – осевую нагрузку, $m(x) = F(xL)$ – линейную плотность стержня. По аналогии с [5, 13] в настоящей работе при проведении расчетов предполагалось, что $s(x)$ численно равно $m^2(x)$; для стержней постоянного сечения m принималось равным 1. Для задач Бека и Феодосьева уравнение (4) соответственно принимает вид:

$$(s(x)u'')'' + pu'' - \omega^2 m(x)u = 0, \quad (5)$$

$$(s(x)u'')'' + p \left(u' \int_x^1 m(\zeta) d\zeta \right)' - \omega^2 m(x)u = 0, \quad (6)$$

так как в первом случае распределенные силы отсутствуют и осевая нагрузка совпадает с величиной следящей силы p , а во втором вклад в осевую нагрузку вносят силы инерции. Уравнение движения стержня в виде (5) приводится авторами

[5], вида (6) – в работе [13]. Граничные условия для двух рассмотренных задач приведены ниже:

$$\begin{aligned} u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(1) = 0, \quad u'''(1) = 0 & \text{ – для задачи Бека,} \\ u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 0, \quad u''(1) = 0, \quad u'''(1) = 0 & \text{ – для задачи Феодосьева.} \end{aligned} \quad (7)$$

В задаче Феодосьева интерес представляет исследование колебаний стержня в системе отсчета, движущейся вместе с ним. Для этого к граничным условиям необходимо добавить условия отсутствия смещения и поворота стержня как жесткого целого [13]:

$$\int_0^1 um(x) dx = 0, \quad \int_0^1 xum(x) dx = 0. \quad (8)$$

Под решением задачи устойчивости подразумевается определение зависимости собственных частот колебаний стержня от величины приложенной нагрузки. График такой зависимости в координатах нагрузка (p) – квадрат частоты (ω^2) носит название частотной диаграммы. Различные виды потери устойчивости подробно описаны в монографии [14]. Для уравнения (5) (или (6)) обращение собственной частоты в 0 при некоторой нагрузке $p = P_{cr}$ означает исчезновение члена $\omega^2 m(x)u$, следовательно, выполнение уравнения статики и существование нового положения равновесия для стержня, что характеризует его статическую неустойчивость (дивергенцию). Если при некоторой величине нагрузки существует значение $\omega = \alpha - i\beta$, где $\beta > 0$, то, согласно выражению (2), это соответствует появлению формы колебаний с нарастающей амплитудой – динамической неустойчивости (флаттера). Возникновение динамической неустойчивости в рассматриваемых задачах будет соответствовать нагрузке, при которой происходит совпадение двух ветвей собственных частот на частотной диаграмме, сопровождающееся появлением комплексно сопряженной пары $\omega = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$ [9, 12, 14, 18].

Последующий анализ устойчивости зачастую будет приводить к рассмотрению стержней с сильно изменяющимся поперечным сечением и анализу высших собственных частот их колебаний. Будем предполагать, что все гипотезы, необходимые для использования уравнений динамики в виде (1)–(3), выполнены в любом случае. В частности, скорость движения стержня при колебаниях по соответствующим собственным формам много меньше скорости распространения упругих волн в материале стержня. Отметим, что из-за демпфирования в материале стержня потеря устойчивости по высшим формам в реальных условиях не реализуется. Так как использование численных методов для решения задачи устойчивости предполагает дискретизацию задачи, под устойчивостью в дальнейшем подразумевается устойчивость по ограниченному набору степеней свободы, выбор которых определяется применяемой дискретизацией.

3. Методы решения

3.1. Вариационно-разностный метод. Рассмотрим применение вариационно-разностного метода [6] к решению задачи об устойчивости консольного стержня. Преобразуем уравнение (5), умножив его на весовую функцию $w(x) \in C_{[0,1]}^2$, удовлетворяющую всем граничным условиям, накладываемым на $u(x)$, и проинтегрируем полученное уравнение:

$$\int_0^1 (w(s(x)u''')'' + wpu'' - wum(x)\omega^2) dx = 0. \quad (9)$$

После двукратного интегрирования по частям, учитывая граничные условия для $u(x)$ и $w(x)$, получим

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 w}{dx^2} s(x) \frac{d^2 u}{dx^2} + wp \frac{d^2 u}{dx^2} - wum(x)\omega^2 \right) dx = 0. \quad (10)$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на $N-1$ отрезков длиной h и заменим производные в уравнении (10) разностными отношениями второго порядка аппроксимации для сеточных функций $u_i, w_i, i = \overline{1, N}$, а интеграл – интегральной суммой по формуле прямоугольников, трапеций или по формуле Симпсона. Группируя слагаемые при w_i , получаем из (10):

$$w_1 f_1(u_1, u_2, \dots, u_N) + \dots + w_N f_N(u_1, u_2, \dots, u_N) = 0, \quad (11)$$

где f_i являются линейными функциями своих аргументов. Так как $w(x)$, за исключением границ, является произвольной функцией, выражение в левой части (11) равно 0, если $f_1 = f_2 = \dots = f_N = 0$, что приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно u_1, \dots, u_N :

$$\begin{cases} f_1(u_1, \dots, u_N) = 0, \\ \dots \\ f_n(u_1, \dots, u_N) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

которая всегда допускает представление в виде

$$\mathbf{A}\mathbf{U} + \omega^2 \mathbf{B}\mathbf{U} = 0. \quad (13)$$

Здесь \mathbf{U} – вектор перемещений всех узлов стержня, матрица \mathbf{A} характеризует его жесткость и зависит от величины приложенной нагрузки p , \mathbf{B} отражает инерционные характеристики стержня. Матрицы не зависят от ω^2 . Теперь собственные частоты ω^2 колебаний стержня можно определить как собственные числа в обобщенной проблеме собственных значений (13).

3.2. Методы Бубнова–Галеркина и конечных элементов. Пусть $v(x)$ – решение задач, сопряженных к (5)–(7). Легко убедиться, что решения прямых и сопряженных задач устойчивости консольного стержня $u(x), v(x)$ соответствуют стационарной точке функционала

$$J[u, v] = \int_0^1 (s(x)u''v'' - pv(1)u'(1) - pu'v' - m(x)\omega^2 uv) dx, \quad (14)$$

свободного стержня –

$$J[u, v] = \int_0^1 \left(s(x)u''v'' - pv(0)u'(0)m(x) - pu'v' \int_0^1 m(\zeta) d\zeta - m(x)\omega^2 uv \right) dx. \quad (15)$$

Приведенные выражения для функционалов можно найти, в частности, в работах [5, 13].

Остановимся на процедуре метода Бубнова–Галеркина в применении к рассматриваемой задаче. Ищем решения в виде разложений по N базисным функциям

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i u_i(x), \quad v(x) = \sum_{i=1}^N \beta_i u_i(x). \quad (16)$$

В качестве базисных функций могут выступать полиномы вида:

$$\begin{aligned} - u_i(x) &= x^2 + \sum_{k=2}^{i+2} C_i^k x^{k+1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \text{– для задачи Бека;} \\ - u_i(x) &= 1 + C_i^1 x + \sum_{k=2}^{i+3} C_i^k x^{k+4}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \text{– [13] для задачи Феодосьева;} \end{aligned}$$

– либо, как в [19], собственные формы колебаний консольного стержня постоянной толщины, которые можно найти аналитически.

Для полиномиальных базисных функций за счет выбора констант \tilde{N}_i^j удовлетворяются граничные условия и условия ортогональности базисных полиномов. Подстановка разложений (16) в функционалы (14), (15) и запись условий стационарности также приводит к системе вида (13) с иными матрицами \mathbf{A} , \mathbf{B} [13].

Метод конечных элементов используется для анализа устойчивости стержней переменного сечения, в частности, в работе [5]. На стержне вводится сетка из N конечных элементов. Решение прямой и сопряженной задач аппроксимируется на элементах кубическими полиномами с использованием эрмитова представления:

$$u(\eta) = \left(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \frac{\eta - 2\eta^2 + \eta^3}{N}, 3\eta^2 - 2\eta^3, \frac{-\eta^2 + \eta^3}{N} \right) U_e = N_e U_e, \quad (17)$$

$\eta \in [0, 1]$ на каждом элементе безразмерной длины $1/N$, составляющем модель стержня. Здесь U_e – вектор перемещений и поворотов в узлах элемента. Для учета граничных условий в данном случае удобно применить метод множителей Лагранжа. В результате подстановки аппроксимации решения в функционал и записи условия его стационарности приходим к задаче (13).

3.3. Метод сагиттарной функции. Применим к исследованию устойчивости стержня переменного сечения метод сагиттарной функции, предложенный в работах Акуленко, Нестерова [7, 8]. Будем рассматривать дифференциальное уравнение задачи устойчивости консольного стержня (5) с граничными условиями

$$u(0) = u'(0) = u''(l) = u'''(l) = 0. \quad (18)$$

При $l = 1$ задача совпадает с рассмотренной ранее. Рассуждения для летящего стержня проводятся аналогично.

Перепишем (5) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u' = k, \\ k' = z/s(x), \\ z' = w, \\ w' + pz/(s(x)) - \omega^2 m(x)u = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$u(0) = k(0) = z(l) = w(l) = 0, \quad (20)$$

и воспользуемся процедурой метода пристрелки. Зададимся некоторой $\omega^2 = \omega_*^2$ и рассмотрим две задачи Коши, состоящие из системы (19) при $\omega^2 = \omega_*^2$ и граничных условий $u(0) = k(0) = w(l) = 0; z(l) = 1$ и $u(0) = k(0) = z(l) = 0; w(l) = 1$ соответственно. Найдем решения этих систем $u_1(x), u_2(x)$ разностным методом (например, методом Рунге–Кутты 4-го порядка) и составим их линейную комбинацию:

$$u(x) = u_1(x) + \mu u_2(x).$$

Будем удовлетворять граничным условиям на правом конце стержня (20) при некотором $x = l^*$. Из условия $z_1(l^*) + \mu z_2(l^*) = 0$ имеем $\mu = -z_1(l^*)/z_2(l^*)$. Рассмотрим функцию рассогласования оставшегося граничного условия (сагиттарную функцию):

$$s(l^*) = w_1(l^*) + \mu w_2(l^*) = w_1(l^*) z_2(l^*) - w_2(l^*) z_1(l^*). \quad (21)$$

Если $s(l^*) = 0$ для некоторого $l = l^*$, то стержень безразмерной длины l^* имеет собственную частоту ω_*^2 , так как для него выполнены условия (20). Располагая приближением к собственному значению задачи (19), (20), можно судить о его точности по значению $s(l)$. При изменении ω_*^2 и контроле за величиной $s(l)$, метод сагиттарной функции позволяет уточнять приближение к некоторой собственной частоте. Более того, если при малом изменении ω_*^2 происходит изменение знака $s(l)$, мы получаем двустороннюю оценку собственной частоты стержня. Пример использования этого критерия будет дан ниже.

Четыре рассмотренных способа анализа устойчивости имеют существенные различия. Решая задачу методом конечных элементов или методом Бубнова–Галеркина, мы задаемся видом искомого решения; в отличие от них, в вариационно-разностном методе и методе сагиттарной функции приближенное решение определено только в узлах конечноразностной сетки и его точность связана с аппроксимацией разностной схемой исходного уравнения. В силу сказанного можно надеяться, что если при некоторых параметрах дискретизации рассмотренные методы дают сходные результаты, решение приближается к точному.

4. Результаты анализа устойчивости

В табл. 1 приведены значения критической нагрузки и частоты, совпадение которых вызывает потерю устойчивости для каждой расчетной схемы (в скобках). Наиболее точные значения критической нагрузки, найденные каждым из методов, выделены полужирным шрифтом.

Зависимости частот колебаний стержней от величины нагрузки, полученные вариационно-разностным методом, приведены на рис. 1 (a, b – соответственно решения для оптимизированных консольного и свободного стержней, полученные на 5000 точек разностной схемы). Здесь и далее на частотных диаграммах приводится нормированная безразмерная площадь сечения рассматриваемого стержня

$$a^* = \frac{m(x)}{\max_{x \in [0,1]} m(x)} \quad (22)$$

по длине $x = \xi/L$. Отметим обнаруженную вариационно-разностным методом потерю устойчивости на высших частотах для консольно закрепленного стержня оптимизированной формы.

Таблица 1

	Задача Бека, постоянное сечение	Задача Бека, переменное сечение	Задача Гопака, постоянное сечение	Задача Гопака, переменное сечение
Метод Бубнова–Галеркина, 2 базисные функции	20,33849 (1 ^я , 2 ^я)	55,770 (1 ^я , 2 ^я)	116,9482 (1 ^я , 2 ^я)	185,945 (1 ^я , 2 ^я)
Метод Бубнова–Галеркина, 8 базисных функций	20,05693 (1 ^я , 2 ^я)	60,405 (1 ^я , 2 ^я)	109,6899 (1 ^я , 2 ^я)	258,339 (1 ^я , 2 ^я)
Метод Бубнова–Галеркина, 12 базисных функций	20,05252 (1 ^я , 2 ^я)	51,735 (1 ^я , 2 ^я)	109,6899 (1 ^я , 2 ^я)	272,682 (1 ^я , 2 ^я)
МКЭ, 5 элементов	20,07149 (1 ^я , 2 ^я)	127,203 (1 ^я , 2 ^я)	110,5939 (1 ^я , 2 ^я)	235,748 (1 ^я , 2 ^я)
МКЭ, 10 элементов	20,05234 (1 ^я , 2 ^я)	123,759 (1 ^я , 2 ^я)	109,7695 (1 ^я , 2 ^я)	262,698 (1 ^я , 2 ^я)
МКЭ, 20 элементов	20,05105 (1 ^я , 2 ^я)	127,360 (1 ^я , 2 ^я) 70,787 (9 ^я , 10 ^я)	109,6948 (1 ^я , 2 ^я)	271,097 (1 ^я , 2 ^я)
МКЭ, 40 элементов	20,05096 (1 ^я , 2 ^я)	126,898 (1 ^я , 2 ^я) 57,548 (10 ^я , 11 ^я)	109,6896 (1 ^я , 2 ^я)	272,577 (1 ^я , 2 ^я)
МКЭ, 80 элементов	20,05095 (1 ^я , 2 ^я)	126,860 (1 ^я , 2 ^я) 56,501 (10 ^я , 11 ^я)	109,6893 (1 ^я , 2 ^я)	272,647 (1 ^я , 2 ^я)
Вариационно- разностный метод, 500 узлов	20,03693 (1 ^я , 2 ^я)	126,709 (1 ^я , 2 ^я) 56,121 (10 ^я , 11 ^я)	109,1998 (1 ^я , 2 ^я)	238,110 (1 ^я , 2 ^я)
Вариационно- разностный метод, 1000 узлов	20,04392 (1 ^я , 2 ^я)	126,834 (1 ^я , 2 ^я) 56,231 (10 ^я , 11 ^я)	109,4306 (1 ^я , 2 ^я)	249,709 (1 ^я , 2 ^я)
Вариационно- разностный метод, 2000 узлов	20,04741 (1 ^я , 2 ^я)	126,847 (1 ^я , 2 ^я) 56,303 (10 ^я , 11 ^я)	109,5561 (1 ^я , 2 ^я)	259,990 (1 ^я , 2 ^я)
Вариационно- разностный метод, 5000 узлов	20,04954 (1 ^я , 2 ^я)	126,856 (1 ^я , 2 ^я) 56,338 (10 ^я , 11 ^я)	109,6355 (1 ^я , 2 ^я)	267,627 (1 ^я , 2 ^я)
Вариационно- разностный метод, 15000 узлов	20,05065 (1 ^я , 2 ^я)	126,846 (1 ^я , 2 ^я) 56,344 (10 ^я , 11 ^я)	109,6794 (1 ^я , 2 ^я)	272,782 (1 ^я , 2 ^я)
Метод сагиттарной функции (10000 шагов метода Рунге–Кутта)	20,05095 (1 ^я , 2 ^я)	126,859 (1 ^я , 2 ^я) 56,351 (10 ^я , 11 ^я)	109,6893 (1 ^я , 2 ^я)	272,800 (1 ^я , 2 ^я)
Тестовые решения	20,05 [9] (1 ^я , 2 ^я)		109,69 [12] (1 ^я , 2 ^я)	

При использовании метода Бубнова–Галеркина выяснилось, что увеличение числа базисных функций приводит к нарастанию неоднородности коэффициентов базисных полиномов. Поэтому, несмотря на ортогональность базиса, повышению точности решения за счет увеличения числа базисных функций препятствует плохая обусловленность системы линейных алгебраических уравнений, решаемой для определения коэффициентов полиномов.

Численный эксперимент, выполненный в настоящей работе, позволил установить, что максимально допустимое число таких базисных функций около 12.

В работе [13] использовалось 7-8 базисных функций. С другой стороны, при анализе устойчивости стержня Бека оптимизированной формы небольшого числа базисных полиномов оказалось недостаточно для получения сколько-нибудь удовлетворительного приближения к собственным частотам и критической силе. Это, по-видимому, связано с существенным изменением размера поперечного сечения стержня по его длине. При рассмотрении свободного стержня оптимизированной формы с увеличением числа базисных функций изменяется характер динамической потери устойчивости. Вместо динамической потери устойчивости при совпадении 1-й и 2-й собственных частот, выявляемой при использовании от 2 до 10 базисных функций, для 11-ти и 12-ти смыкаются 2-я и 3-я частоты, что противоречит результатам, полученным с помощью остальных методов.

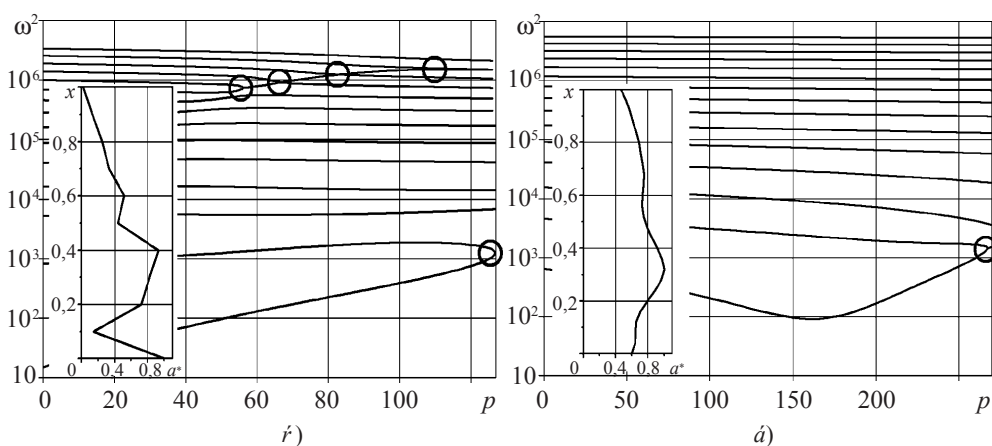


Рис. 1

Из табл. 1 легко видеть, что результаты, полученные методом конечных элементов и вариационно-разностным методом, с увеличением параметра дискретизации стремятся совпасть друг с другом и с результатами, полученными при помощи метода сагиттарной функции. Однако конечно-элементная модель позволяет предсказать потерю устойчивости на высших частотах лишь при числе элементов более 14 (рис. 2 – частотная диаграмма для консольно закрепленного стержня оптимизированной формы с использованием 10 КЭ). Необходимо отметить, что в работе [5] в основном рассматривается математическая модель стержня, состоящая из 10 КЭ. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что при использовании такого количества элементов может быть пропущено явление потери устойчивости на высших частотах.

Проиллюстрируем зависимость численных решений от параметров дискретизации на примере консольно закрепленного стержня постоянного сечения, для которого все методы дают сходные результаты (рис. 3).

С увеличением числа базисных функций метод Бубнова–Галеркина демонстрирует сходимость результатов, однако, вследствие описанной потери обусловленности, более 12 базисных функций использовать не удастся. Вариационно-разностный метод имеет различную точность в зависимости от применяемой схемы численного интегрирования и позволяет получить сравнительно грубое приближение при небольшом числе точек разностной схемы (порядка сотен). Для получения точных решений необходимо существенное увеличение параметра дискретизации (до

5–15 тысяч точек). Заметное снижение скорости сходимости для различных реализаций вариационно-разностного метода с ростом числа точек разностной схемы, по-видимому, объясняется накоплением вычислительных погрешностей при работе с матрицами больших размерностей. Метод конечных элементов демонстрирует наиболее высокую скорость сходимости.

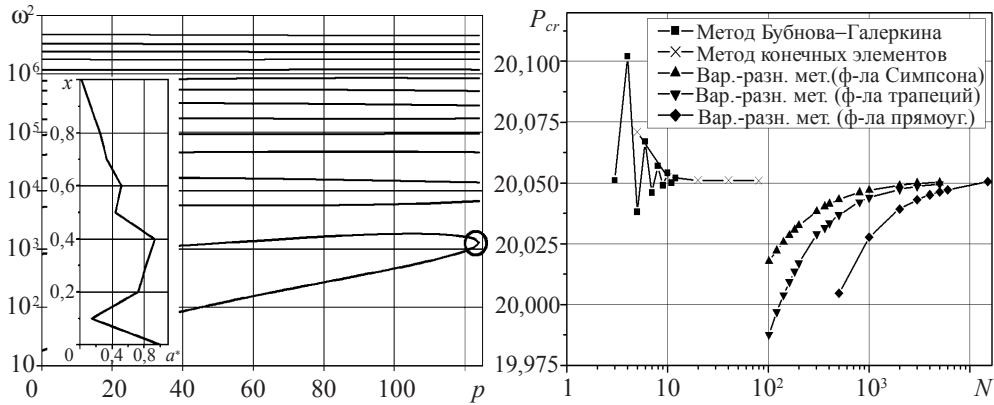


Рис. 2

Рис. 3

Основным назначением метода сагиттарной функции является оценка точности нахождения собственных частот. Чтобы продемонстрировать принцип его использования, рассмотрим задачу определения собственных частот колебаний стержня Бека оптимизированного сечения. На рис. 4,а приведен график зависимости собственных частот стержня от его высоты при постоянной величине следящей нагрузки, равной 56,35 – критической нагрузке, при которой совпадают высшие собственные частоты.

Этот график был получен вариационно-разностным методом для 5000 точек разностной схемы. Совпадение 10-й и 11-й собственных частот (см. рис. 1,а) соответствует длине стержня $l = 1$. На рис. 4,б приведены графики $s(l)$ (21) для различных частот ω^2 такого стержня. Видно, что когда на рис. 4,а прямая $\omega^2 = \text{const}$ при некотором $l = l^*$ пересекает частотную кривую, соответствующую ей $s(l)$ на рис. 4,б обращается в ноль, так как данная ω^2 является собственной частотой консольного стержня длины l^* .

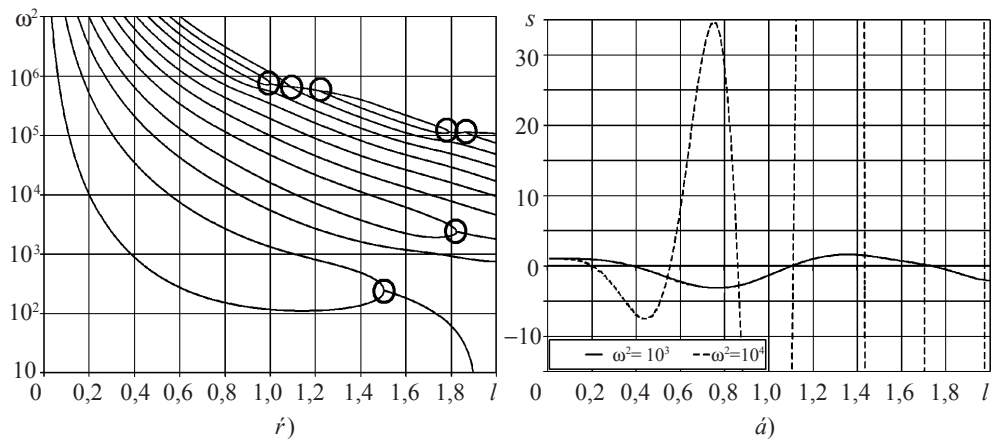


Рис. 4

На рис. 5 приведены значения $s(l)$ при $l = 1$, различных нагрузках и частотах ω^2 , близких к точке совпадения ветвей 10-й и 11-й собственных частот (см. рис. 1, $\omega^2 \approx 740000$) для консольного стержня оптимизированной формы. Как было отмечено, смене знака $s(l)$ при небольшом изменении ω^2 соответствует получение двусторонней оценки собственной частоты. Для нагрузки 56,26 таких смен знака в окрестности $\omega^2 \approx 740000$ две, что соответствует 10-й и 11-й собственным частотам стержня. При нагрузке 56,36 $s(1)$ знака не меняет, что вызвано отсутствием чисто действительных значений квадратов собственных частот в рассматриваемой окрестности после потери устойчивости. Из условия кратности собственных частот методом сагиттарной функции находим критическую нагрузку 56,351, что подтверждает факт потери устойчивости на высших частотах, обнаруженный вариационно-разностным и конечно-элементными методами.

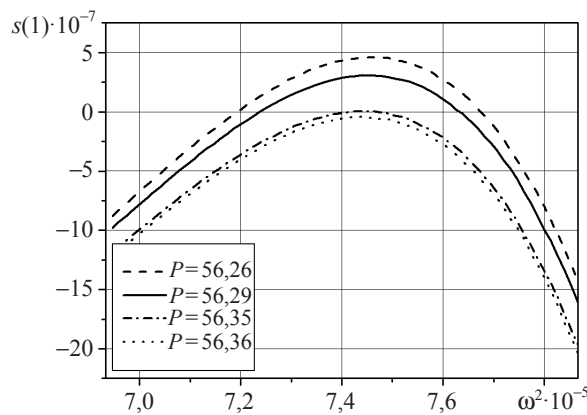


Рис. 5

Наконец, в табл. 2 приведена зависимость нагрузки потери устойчивости от параметра дискретизации метода сагиттарной функции – числа шагов Рунге–Кутты. Уже при $N = 500$ дальнейшее увеличение N не оказывает существенного влияния на точность определения P_{cr} .

Таблица 2

N	P_{cr}
500	56,3508
1000	56,3510
10000	56,3512

Рассмотрим аналогичные представленным на рис. 5 результаты, полученные для свободного стержня оптимизированной формы. Собственные частоты при потере устойчивости, найденные для оптимальной конфигурации летящего стержня методом конечных элементов (80 элементов), это $\omega_1 = \omega_2 = 1587$; $\omega_3 = 3300$. Метод сагиттарной функции подтверждает эти результаты, и при нагрузке $P_{cr} = 272,800$ свободный стержень оптимизированной формы теряет устойчивость с частотами $\omega_1 = \omega_2 = 1594$ и $\omega_3 = 3281$.

5. Выводы

Сравнив результаты анализа устойчивости стержней переменного сечения при неконсервативном нагружении четырьмя распространенными методами, можно сделать вывод о степени их применимости. Метод Бубнова–Галеркина с рассмот-

ренными полиномиальными базисными функциями хуже всего подходит для анализа устойчивости стержней с сильно меняющимся поперечным сечением, его применение требует внимания и критического анализа результатов. Вариационно-разностный метод и метод конечных элементов продуктивны и приводят к сходным результатам при числе конечных элементов более 40 и более 5000 точек разностной схемы. Метод сагиттарной функции показал высокую эффективность при проверке точности получаемых решений и должен использоваться как критерий качества результатов оптимизации стержней.

Литература

1. Сейранян, А.П. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны / А.П. Сейранян // Успехи механики. – 2003. – Т. 2, №2. – С. 45–96.
2. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971. – 807с.
3. Галеркин, Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок / Б.Г. Галеркин // Вестник инженеров. – 1915. – Т. 1, №19. – С. 897–908.
4. Светлицкий, В.А. Механика стержней. В 2-х ч. / В.А. Светлицкий. – М.: Высшая школа, 1987. – 433с.
5. Langthjem, M.A. Optimum Design of Cantilevered Columns Under the Combined Action of Conservative and Nonconservative Loads / M.A. Langthjem, Y. Sugiyama // Computers and Structures. – 2000. – №74. – P. 385–398.
6. Темис, Ю.М. Вариационно-разностный метод расчета упругопластических круглых пластинок / Ю.М. Темис // Изв. вузов. Машиностроение. – 1974. – №7. – С. 16–21.
7. Akulenko, L.D. High precision methods in eigenvalue problems and their applications / L.D. Akulenko, S.V. Nesterov. – Chapman&Hall/CPS, 2005. – 255с.
8. Акуленко, Л.Д. Собственные поперечные колебания неоднородного стержня / Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров // МТТ. – 2003. – №3. – С. 179–191.
9. Beck, M. Die Knicklast des Einseitig Eingespannten, Tangential Gedruckten Stabes / M. Beck // ZAMP. – 1952. – V. 3, №3. – P. 225–228.
10. Гопак, К.Н. Потеря устойчивости свободным стержнем, ускоренно движущимся под действием следящей силы / К.Н. Гопак // Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – №4. – С. 136–137.
11. Beal, T.R. Dynamic Stability of a Flexible Missile Under Constant and Pulsating Thrusts / T.R. Beal // AIAA Journ. – 1965. – V. 3, №3. – P. 486–494.
12. Феодосьев, В.И. Об одной задаче устойчивости / В.И. Феодосьев // ПММ. – 1965. – Вып. 2. – С. 391–392.
13. Кириллов, О.Н. Оптимизация устойчивости летящего стержня / О.Н. Кириллов // Вестник молодых ученых. – 1999. – №1. – С. 64–78.
14. Болотин, В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 341 с.
15. Bolotin, V.V. Effect of damping on stability of elastic systems subjected to non-conservative forces / V.V. Bolotin, N.I. Zhinzher // Int. J. of Solids and Structures. – 1969. – V. 5, №9. – P. 965–989.
16. Денисов, Г.Г. Об устойчивости упругих систем с малым внутренним трением / Г.Г. Денисов, В.В. Новиков // МТТ. – 1978. – №3. – С. 211–218.
17. Алфутов, А.Н. Устойчивость движения и равновесия / А.Н. Алфутов, К.С. Колесников. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 254 с.
18. Аринчев, С.В. Теория колебаний неконсервативных систем / С.В. Аринчев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 464 с.
19. Pedersen, P. Sensitivity Analysis for Problems of Dynamic Stability / P. Pedersen, A.P. Seyranian // Int. J. of Solids and Structures. – 1983. – V. 19, №4. – P. 315–335.

[28.07.2006]

**COMPARING THE METHODS FOR ANALYSING THE STABILITY
OF RODS OF A VARIABLE CROSS-SECTION
UNDER NON-CONSERVATIVE LOADING**

Yu.M. Temis, I.M. Fyodorov

Four numerical methods for investigating the stability of rods are considered: FEM, Boubnov–Galerkin method, the variational-difference method, and the sagittal function method generalized for the case of non-conservative loading. Dependence of the solution of the stability problem on the discretization parameters in the above numerical methods is studied. It is shown that the mathematical models accurate enough for analyzing the stability of rods of constant cross-section may give qualitatively erroneous results in the case of variable cross-sections.