

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-244-251

ВЫПУЧИВАНИЕ СЖАТОЙ УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ*

© 2020 г.

Пешхоев И.М., Соболев Б.В.

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

peshkhoev@rambler.ru, b.sobol@mail.ru

Поступила в редакцию 14.05.2020

Исследуется влияние малой поперечной нагрузки на устойчивость сжатой в одном направлении упругой прямоугольной пластины со свободными продольными краями, лежащей на нелинейно-упругом основании. Пластина содержит источники внутренних напряжений в виде непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций или другие источники, например тепловые. Реакция нелинейно-упругого основания учитывается в виде многочлена третьей степени от прогиба. Сжимающая нагрузка равномерно распределена по двум противоположным краям пластины, которые свободно защемлены или шарнирно оперты. Два других края пластины свободны. Рассматривается нелинейная краевая задача для модифицированной системы нелинейных уравнений Кармана, учитывающих внутренние напряжения. Заменой переменных задача сводится к последовательности двух задач, из которых линейная краевая задача определяет функцию напряжений, вызванных наличием внутренних источников, а другая, нелинейная, определяет прогиб пластины и функцию напряжений, обусловленных действием сжимающей нагрузки. С помощью метода Ляпунова – Шмидта исследуется ветвление решений модифицированной системы нелинейных уравнений Кармана. Критические значения параметра нагрузки определяются из линеаризованной на тривиальном решении задачи. При этом для решения линеаризованной задачи применяется вариационный метод в сочетании с конечно-разностным методом. Коэффициенты системы уравнений разветвления метода Ляпунова – Шмидта определяются с помощью численного метода. Исследовано после-критическое поведение пластины и выведены асимптотические формулы для новых состояний равновесия в окрестности критических нагрузок. Для различных значений параметров сжимающих нагрузок и параметра внутренних напряжений установлены соотношения между значениями параметров основания, при которых сохраняется ее несущая способность в окрестности классического значения критической нагрузки.

Ключевые слова: упругая пластина, критические нагрузки, внутренние напряжения, нелинейно-упругое основание, метод Ляпунова – Шмидта, уравнение разветвления.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-08-00074).

Введение

Система нелинейных уравнений Кармана равновесия упругих пластин с внутренними источниками напряжений была модифицирована Л.М. Зубовым [1] и исследовалась в статье [2]. В [3] в случае бесконечной пластины с малыми несовершенствами рассматривалась задача о влиянии нелинейно-упругого основания на послекритическое поведение безмоментного плоско-напряженного состояния. В статье [4] проведено исследование задачи об устойчивости двухслойной круговой пластины с предварительно напряженным слоем. В [5] рассматривались бесконечно малые деформации пластины из гиперупругих материалов с учетом неоднородно распределенных начальных напряжений. В статье [6] исследованы изгибные деформации трехслойной пластины с учетом поверхностных и межфазных напряжений и выведены формулы для параметров жесткости пластины. Метод Ляпунова – Шмидта для изучения ветвления решений нелинейных уравнений был развит в публикациях В.А. Треногина, Л.С. Срубщика и других [7–11]. В статье [12] исследованы критические нагрузки сжатой упругой пластины с дислокациями и дисклинациями. В [13] исследовано выпучивание сжатой упругой прямоугольной пластины с внутренними напряжениями, лежащей на нелинейно-упругом основании, для случаев краевых условий свободного защемления или подвижного шарнирного опирания краев. В настоящей статье рассматривается аналогичная [13] задача для случаев, когда сжимающая нагрузка равномерно распределена по двум противоположным краям, которые свободно защемлены или шарнирно оперты, при этом два других края пластины свободны.

1. Постановка задачи

Пусть тонкая упругая прямоугольная пластина, содержащая в плоском состоянии ансамбли непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций, лежит на нелинейно-упругом основании и находится под действием малой нормальной нагрузки интенсивностью $\xi G(X, Y)$ и внешнего краевого давления, действующего вдоль оси X . Начало системы координат расположено в центре пластины, и оси X, Y параллельны ее краям. Тогда система уравнений равновесия [1] с учетом реакции основания и некоторых преобразований [12] в безразмерных переменных может быть записана в виде двух задач:

$$\Delta_a^2 F_\mu = \bar{\mu}, \quad (x, y) \in \Omega \text{ и } F_\mu = (F_\mu)_n = 0 \text{ на границе } \Omega, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta_a^2 w + p\alpha w_{xx} + k_1 w - k_3 w^3 = \alpha[w, F] + r\alpha[w, F_\mu] + \xi g, \\ \Delta_a^2 F + \alpha[w, w]/2 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

$$\Delta_a(\cdot) = (\cdot)_{yy} + \alpha(\cdot)_{xx}, \quad \Delta_a^2 = \Delta_a \Delta_a, \quad [w, F] = w_{xx} F_{yy} + w_{yy} F_{xx} - 2w_{xy} F_{xy},$$

с краевыми условиями одного из типов

$$\begin{cases} w = w_x = F = F_x = 0, & |x| = 1/2, |y| < 1/2, \\ w_{yy} + \nu\alpha w_{xx} = w_{yyy} + (2 - \nu)\alpha w_{xy} = F = F_y = 0, & |y| = 1/2, |x| < 1/2, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} w = w_{xx} = F = F_x = 0, & |x| = 1/2, |y| < 1/2, \\ w_{yy} + \nu\alpha w_{xx} = w_{yyy} + (2 - \nu)\alpha w_{xy} = F = F_y = 0, & |y| = 1/2, |x| < 1/2. \end{cases} \quad (4)$$

Условия при $|x| = 1/2$ отвечают в (3) жесткому защемлению краев, а в (4) – подвижной шарнирной опоре. Условия при $|y| = 1/2$ в (3) и (4) соответствуют свободным краям. Безразмерные функции напряжений F_μ и F вызваны внутренними источниками и внешними нагрузками соответственно. Связь с безразмерными переменными выражается формулами:

$$X = ax, \quad Y = by, \quad W(X, Y) = w(x, y) \frac{h}{\gamma}, \quad \Phi(X, Y) = D\bar{F}(x, y), \quad \bar{F} = F + F_\mu, \quad P = \frac{Dp}{b^2},$$

$$K_1 = \frac{Dk_1}{\alpha^2 a^4}, \quad K_3 = \frac{\gamma^2 E h k_3}{\alpha^2 a^4}, \quad G(X, Y) = \frac{h D g(x, y)}{\gamma b^4},$$

$$D = \frac{E h^3}{\gamma^2}, \quad \alpha = \frac{b^2}{a^2}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu \gamma^2}{h^2 b^4}, \quad \gamma^2 = 12(1 - \nu^2).$$

Здесь a, b – размеры пластины; P – сила, действующая на единицу длины сжимаемого края пластины; $r\mu(X, Y)$ – скалярная мера несовместности, которая выражается через плотности дислокаций и дисклинаций, число r назовем параметром интенсивности внутренних напряжений; $W(X, Y)$ – прогиб пластины; $\Phi(X, Y)$ – функция напряжений Эри; h – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга; ξ – малый числовой параметр; $K_1 W^2 - K_3 W^3$ – реакция упругого основания (Амазиго [14] и Хансен [15]); $K_1 > 0$. При $K_3 > 0$ основание называется размягченным, а в случае $K_3 < 0$ – упрочняющимся. Предполагается, что энергия деформации упругого основания положительна, то есть

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{K_1 W^2}{2} - \frac{K_3 W^3}{4} \right) dx dy > 0.$$

2. Метод решения

Нелинейная задача (2) с краевыми условиями (3) или (4) исследуется с использованием результатов из [16–18] методом Ляпунова – Шмидта в сочетании с численными методами, аналогично [13], в которой исследована задача (2) с краевыми условиями жесткого защемления или шарнирного опирания всех краев. Можно показать, что все выкладки из [13] справедливы и для случая краевых условий (3) и (4), а также обосновать вариационные методы решения возникающих при этом задач на собственные значения. Поэтому приведем только формулы, определяющие систему уравнений разветвления метода Ляпунова – Шмидта для случая ветвления по двум собственным формам:

$$\Phi_1(\mu_1, \mu_2) = (a_1 \mu_1^2 + b_1 \mu_2^2 + \Lambda_1) \mu_1 + d_1 \xi = 0, \quad \Phi_2(\mu_1, \mu_2) = (a_2 \mu_1^2 + b_2 \mu_2^2 + \Lambda_2) \mu_2 = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$a_1 = L_{30000}^{(1)}, \quad b_1 = L_{12000}^{(1)}, \quad \Lambda_1 = L_{10100}^{(1)} \lambda_1 + L_{10010}^{(1)} \lambda_2, \quad d_1 = L_{00001}^{(1)},$$

$$a_2 = L_{21000}^{(2)}, \quad b_2 = L_{03000}^{(2)}, \quad \Lambda_2 = L_{01100}^{(2)} \lambda_1 + L_{01010}^{(2)} \lambda_2, \quad \lambda_1 = p - p_0, \quad \lambda_2 = r - r_0,$$

$$L_{10000}^{(1)} = a_1 \iint_{\Omega} \omega_1^2 dx dy = 1, \quad L_{01000}^{(2)} = a_2 \iint_{\Omega} \omega_2^2 dx dy = 1, \quad L_{00001}^{(1)} = \iint_{\Omega} g \omega_1 dx dy,$$

$$L_{10100}^{(1)} = \alpha \iint_{\Omega} (\omega_{1,x})^2 dx dy, \quad L_{21000}^{(2)} = L_{120000}^{(1)}, \quad L_{10010}^{(1)} = \iint_{\Omega} [\omega_1, F_\mu] \omega_1 dx dy,$$

$$\begin{aligned}
L_{01100}^{(2)} &= \alpha \iint_{\Omega} (\omega_{2,x})^2 dx dy > 0, & L_{01010}^{(2)} &= \iint_{\Omega} [\omega_2, F_{\mu}] \omega_2 dx dy, \\
L_{12000}^{(1)} &= -\alpha \iint_{\Omega} (\Delta_{\alpha} \Psi_{11000})^2 dx dy - 2\alpha \iint_{\Omega} \Delta_{\alpha} \Psi_{20000} \Delta_{\alpha} \Psi_{02000} dx dy, \\
L_{30000}^{(1)} &= -\alpha \iint_{\Omega} (\Delta_{\alpha} \Psi_{20000})^2 dx dy + k_3 \iint_{\Omega} \omega_1^4 dx dy, \\
L_{03000}^{(2)} &= -\alpha \iint_{\Omega} (\Delta_{\alpha} \Psi_{02000})^2 dx dy + k_3 \iint_{\Omega} \omega_2^4 dx dy,
\end{aligned}$$

где $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ – собственные функции, отвечающие наименьшему двукратно-му собственному значению p_0 при $r = r_0$ задачи

$$\Delta_{\alpha}^2 \omega + k_1 \omega - r\alpha[\omega, F_{\mu}] = -p\alpha\omega_{xx} \quad (6)$$

с одним из следующих краевых условий

$$\begin{cases} \omega = \omega_x = 0, & |x|=1/2, |y|<1/2, \\ \omega_{yy} + \nu\alpha\omega_{xx} = \omega_{yyy} + (2-\nu)\alpha\omega_{xxy} = 0, & |y|=1/2, |x|<1/2, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_{xx} = 0, & |x|=1/2, |y|<1/2, \\ \omega_{yy} + \nu\alpha\omega_{xx} = \omega_{yyy} + (2-\nu)\alpha\omega_{xxy} = 0, & |y|=1/2, |x|<1/2. \end{cases} \quad (8)$$

Если функция $\bar{\mu}$ четная, то в силу симметрии краевых условий задач (1) и (6) можно считать, что $\omega_1(x, y)$ – четная по обеим переменным и $\omega_2(x, y)$ – нечетная по одной переменной и четная или нечетная по другой переменной. Функции Ψ_{200000} , Ψ_{020000} , Ψ_{110000} определяются из краевых задач

$$-\Delta_{\alpha}^2 \Psi_{200000} = \frac{\alpha[\omega_1, \omega_1]}{2}, \quad -\Delta_{\alpha}^2 \Psi_{020000} = \frac{\alpha[\omega_2, \omega_2]}{2}, \quad -\Delta_{\alpha}^2 \Psi_{110000} = \alpha[\omega_2, \omega_2]$$

с краевыми условиями $\Psi = \Psi_n = 0$ на границе прямоугольника Ω .

3. Результаты численных расчетов

Рассмотрим задачу (1)–(3) при $\bar{\mu} = 1$, $g(x, y) = (1 - 4x^2)(1 - 4y^2)$ (прямоугольная пластина с размерами $a = 1$ м, $b = 2$ м, $h = 0,05$ м). В результате численных расчетов получено решение задачи (1), которое показывает форму функции напряжений F_{μ} (рис. 1), вызванных наличием внутренних источников с постоянной функцией несовместности $\bar{\mu} = 1$.

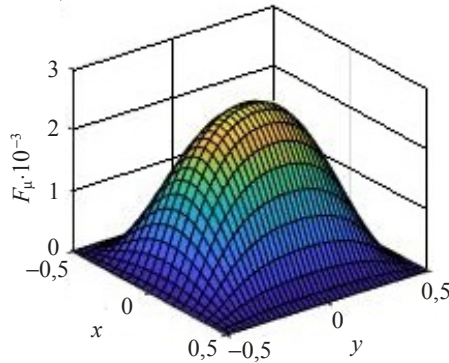


Рис. 1. График функции напряжений F_{μ}

Для значения параметра интенсивности внутренних напряжений $r = 1646,3$ и коэффициента постели основания $k_1 = 500$ в задаче (6), (7) получено двукратное собственное значение $p_0 = 65,5$, которому отвечают две собственные функции ω_1, ω_2 (рис. 2).

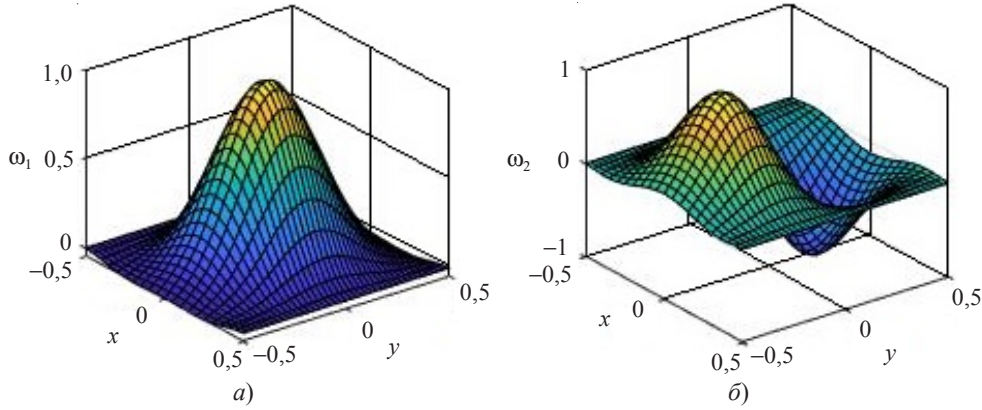


Рис. 2. Графики собственных функций ω_1 (а), ω_2 (б)

Коэффициенты системы уравнений разветвления (5): $a_1 = -0,251 + 0,125k_3, b_1 = -5,687, \Lambda_1 = 3,545\lambda_1 - 0,0418\lambda_2, d_1 = -2,24, a_2 = -5,687, b_2 = -6,488 + 0,177k_3, \Lambda_2 = 4,835\lambda_1 - 0,113\lambda_2$. Используя условие потери устойчивости [9, 10]

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_1} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_2} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_1} = 0,$$

имеем с учетом (5) три уравнения для определения четырех параметров μ_1, μ_2, λ_1 и λ_2 .

Для определенности примем дополнительное условие $\Lambda_1 = \Lambda_2$, из которого следует $\Lambda_2 = c\lambda_1$, где $c = 18,118$. Обозначим через $u = (w, F)$ вектор-функцию – решение нелинейной системы уравнений (2). Выведем формулы для критического значения $\lambda_1 = p_s - p_0$ и асимптотические представления новых решений системы (2):

1) $\lambda_1 = p_s - p_0 = -(3/c)\sqrt[3]{a_1 d_1^2 \xi^2 / 4}, u = \pm \sqrt{-c\lambda_1 / (3a_1)} \varphi_1 + \xi u_{00001} + O(\lambda_1)$, при этом если $k_3 < 2,008$ ($k_3 > 2,008$), то $p_s > p_0$ ($p_s < p_0$);

2) $\lambda_1 = (3/(b_1 - b_2))\sqrt[3]{d_1^2 \xi^2 b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) / 4}$, формулы новых решений приведены в таблице 1, где $\tau_1 = (b_1 - b_2) / (3(a_1 b_2 - a_2 b_1)), \tau_2 = (2a_2 b_1 - 3a_1 b_2 + a_2 b_2) / (3b_2(a_1 b_2 - a_2 b_1))$.

Таблица 1

| № | Интервалы k_3 | Знак λ_1 | Асимптотические формулы новых решений |
|---|--------------------|------------------|--|
| 1 | $< -28,18$ | + | $u = \pm \sqrt{\tau_1 \lambda_1} \varphi_1 \pm \sqrt{\tau_2 \lambda_1} \varphi_2 + \xi u_{00001} + O(\lambda_1)$ |
| 2 | $(-28,18; -22,64)$ | + | $u = \pm \sqrt{\tau_1 \lambda_1} \varphi_1 + \xi u_{00001} + O(\lambda_1)$ |
| 3 | $(-22,64; 4,52)$ | - | $u = \pm \sqrt{\tau_1 \lambda_1} \varphi_1 + \xi u_{00001} + O(\lambda_1)$ |
| 4 | $(4,52; 36,65)$ | + | $u = \pm \sqrt{\tau_1 \lambda_1} \varphi_1 \pm \sqrt{\tau_2 \lambda_1} \varphi_2 + \xi u_{00001} + O(\lambda_1)$ |
| 5 | $(36,65; 51,68)$ | + | $u = \pm \sqrt{\tau_1 \lambda_1} \varphi_1 + \xi u_{00001} + O(\lambda_1)$ |
| 6 | $(51,68; 61,31)$ | + | $u = \pm \sqrt{\tau_1 \lambda_1} \varphi_1 \pm \sqrt{\tau_2 \lambda_1} \varphi_2 + \xi u_{00001} + O(\lambda_1)$ |
| 7 | $> 61,31$ | - | $u = \pm \sqrt{\tau_1 \lambda_1} \varphi_1 \pm \sqrt{\tau_2 \lambda_1} \varphi_2 + \xi u_{00001} + O(\lambda_1)$ |

Здесь $\varphi_1 = (\omega_1, r_0, F_\mu)$, $\varphi_2 = (\omega_2, r_0, F_\mu)$, $u_{00001} = (w_{00001}, 0)$, функция w_{00001} определяется как решение задачи $\Delta_\alpha^2 w = g$ с краевыми условиями (3). Отрицательный знак λ_1 означает, что критическое значение p_s , на которое влияет наличие малого нормального давления ξg ($\xi \ll 1$), меньше классического критического значения p_0 потери устойчивости сжатой пластины ($\xi = 0$). Койтер [19], Будянский и Хатчинсон [20, 21] заметили, что при $\xi \neq 0$ точка бифуркации p_0 переходит в критическую точку p_s .

Заключение

Рассмотрена задача о ветвлении равновесий сжатой в одном направлении упругой пластины с внутренними напряжениями, лежащей на нелинейно-упругом основании. Исследовано влияние малой поперечной нагрузки на критические значения сжимающего давления, построены асимптотические формулы новых равновесий, найдены соотношения между параметрами основания, при которых несущая способность сжатой пластины не снижается.

Список литературы

1. Зубов Л.М. Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями. *Доклады РАН*. 2007. Т. 412. №3. С. 343–346.
2. Зубов Л.М., Фам Т.Х. Сильный изгиб круглой пластинки с непрерывно распределенными дисклинациями. *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2010. №4. С. 28–33.
3. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Studies in Applied Mathematics*. 1970. Vol. XLIX. No 1. P. 45–57. <https://doi.org/10.1002/sapm197049145>.
4. Ereemeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a twolayered circular plate with a prestressed layer. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 22. Iss. 4. P. 773–781. DOI: 10.1177/1081286515612527.
5. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.
6. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov. Singapore: Springer, 2018. P. 1–10. DOI: 10.1007/978-981-10-6895-9_1.
7. Треногин В. А. Разветвление решений нелинейных уравнений в банаховом пространстве. *Успехи математических наук*. 1958. Т. XIII. Вып. 4. С. 197–203.
8. Срубщик Л. С., Треногин В. А. О выпучивании гибких пластин. *Прикладная математика и механика*. 1968. Т. 32. Вып.4. С. 721–727.
9. Срубщик Л.С. Краевой эффект и выпучивание тонких пластин на нелинейно-упругом основании. *Дифференциальные уравнения*. 1985. Т. 21. №10. С. 1790–1794.
10. Срубщик Л.С. *Выпучивание и послекритическое поведение оболочек*. Ростов-н-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1981. 96 с.
11. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov – Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. In: *Mathematics and its Applications*. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publisher, 2002. 568 p. DOI: 10.1007/978-94-017-2122-6.
12. Пешхоев И.М. О критических нагрузках сжатой упругой прямоугольной пластины с дислокациями и дисклинациями. *Вестник ДГТУ*. 2016. №1 (84). С. 43–51. <https://doi.org/10.12737/18157>.
13. Пешхоев И.М., Соболев Б.В. Выпучивание и послекритическое поведение сжатой прямоугольной пластины с внутренними напряжениями, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №2. С. 137–145. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-137-145.

14. Amasigo J.S., Frank D. Dynamic buckling of an imperfect column on nonlinear foundation. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1973. Vol. 31. No 1. P. 1–9.
15. Hansen J.S. Some two-mode buckling problems and their relation to catastrophe theory. *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15. No 11. P. 1638–1644. <https://doi.org/10.2514/3.7463>.
16. Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек*. М.: Наука, 1989. 376 с.
17. Морозов Н.Ф. К нелинейной теории тонких пластин. *Докл. АН СССР*. 1957. Т. 114. №5. С. 968–671.
18. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*. М.: Наука, 1969. 527 с.
19. Koiter W.T. Elastic stability and post-buckling behavior. *Nonlinear Problems: Proceeding of Symposium*. Madison: University of Wisconsin Press, 1963. P. 257–275.
20. Budiansky B. Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structures. *Advances in Applied Mechanics*. 1974. Vol. 14. P. 1–65. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70030-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70030-9).
21. Budiansky B., Hutchinson J.W. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4. P. 1505–1510. <https://doi.org/10.2514/3.3727>.

References

1. Zubov L.M. Uravneniya Karmana dlya uprugoy plastinki s dislokatsiyami i disklinatsiyami [Von Karman equations for an elastic plate with dislocations and disclinations]. *Doklady RAN [Proceedings of the Russian Academy of Sciences]*. 2007. Vol. 412. No 1. P. 67–70 (In Russian).
2. Zubov L.M., Fam T.Kh. Silnyy izgib krugloy plastinki s nepreryvno raspredelennymi disklinatsiyami [Strong deflections of circular plate with continuously distributed disclinations]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki [News of Universities. North Caucasus Region. Natural Sciences]*. 2010. No 4. P. 28–33 (In Russian).
3. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Stud. Appl. Math.* 1970. Vol. XLIX. No 1. P. 45–57. <https://doi.org/10.1002/sapm197049145>.
4. Eremeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a twolayered circular plate with a prestressed layer. *Math. Mech. Solids*. 2017. Vol. 22. Iss. 4. P. 773–781. DOI: 10.1177/1081286515612527.
5. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *Int. J. NonLin. Mech.* 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.
6. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov. Singapore. Springer. 2018. P. 1–10. DOI: 10.1007/978-981-10-6895-9_1.
7. Trenogin V.A. Razvetvlenie resheniy nelineynykh uravneniy v banakhovom prostranstve [Branching of solutions of non-linear equations in Banach space]. *Uspekhi matematicheskikh nauk [Russian Mathematical Surveys]*. 1958. Vol. 13. Iss. 4. P. 197–204 (In Russian).
8. Srubshchik L.S., Trenogin V.A. O vypuchivanii gibkikh plastin [About bucking flexible plates]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech.]*. 1968. Vol. 32. Iss. 4. P. 721–727 (In Russian).
9. Srubshchik L.S. Kraevoy effekt i vypuchivanie tonkikh plastin na nelineyno-uprugom osnovanii [Edge effect and bulging of thin plates on a non-linear elastic base]. *Differentsialnye uravneniya [Differential Equations]*. 1985. Vol. 21. No 10. P. 1790–1794 (In Russian).
10. Srubshchik L.S. *Vypuchivanie i poslekriticheskoe povedenie obolochek [Bulging and Post-Critical Behavior of Shells]*. Rostov-on-Don. Rostov University Publ. 1981. 96 p. (In Russian).
11. Sidorov N., Loginov B., Sinityn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt methods in non-linear analysis and applications. In: *Mathematics and its Applications*. Dordrecht. Boston. London. Kluwer Academic Publisher. 2002. 568 p. DOI: 10.1007/978-94-017-2122-6.
12. Peshkoev I.M. O kriticheskikh nagruzkakh szhatoy uprugoy pryamougolnoy plastiny s dislokatsiyami i disklinatsiyami [On critical loads of a compressed elastic rectangular plate with dislocations and disclinations]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo universiteta [Bulletin of the Don State Technical University]*. 2016. Vol. 16. No 1(84). P. 43–51 (In Russian).
13. Peshkoev I.M., Sobol B.V. Vypuchivanie i poslekriticheskoe povedenie szhatoy pryamo-

ugolnoy plastiny s vnutrennimi napryazheniyami, lezhashchey na nelineynno-uprugom osnovanii [Buckling and postbuckling behavior compressed of the rectangular plate with internal stresses, lying on non-linear elastic foundation]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 2. P. 137–145. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-137-145 (In Russian).

14. Amasigo J.S., Frank D. Dinamic buckling of on imperfect column on nonlinear foundation. *Q. Appl. Math.* 1973. Vol. 31. No 1. P. 1–9.

15. Hansen J.S. Some two-mode buckling problems and their relation to catastrophe theory. *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15. No 11. P. 1638–1644. <https://doi.org/10.2514/3.7463>.

16. Vorovich I.I. *Matematicheskie problemy nelineynoy teorii plogikh obolochek [Mathematical Problems of the Non-Linear Theory of Shallow Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1989. 376 p. (In Russian).

17. Morozov N.F. K nelineynoy teorii tonkikh plastin [On the non-linear theory of thin plates]. *Doklady AN SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Science]*. 1957. Vol. 114. No 5. P. 968–671 (In Russian).

18. Vaynberg M.M., Trenogin V.A. *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy [Theory of Solutions of Non-Linear Equations]*. Moscow. Nauka Publ. 1969. 527 p. (In Russian).

19. Koiter W.T. Elastic stability and post-buckling behavior. *Nonlinear Problems: Proceeding of Symposium*. Madison. University of Wisconsin Press. 1963. P. 257–275.

20. Budiansky B. Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structures. *Adv. Appl. Mech.* 1974. Vol. 14. P. 1–65. [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70030-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70030-9).

21. Budiansky B., Hutchinson J.W. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4. P. 1505–1510. <https://doi.org/10.2514/3.3727>.

BUCKLING A COMPRESSED ELASTIC RECTANGULAR PLATE WITH FREE EDGES

Peshkhoev I.M., Sobol B.V.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

The influence of a small transverse load on the stability of an elastic rectangular plate compressed in one direction with free longitudinal edges, lying on a nonlinear elastic base, is studied. The plate contains internal stress sources in the form of continuously distributed edge dislocations and disclinations, or other sources, such as heat. The reaction of a nonlinear elastic base is taken into account in the form of a polynomial of the third degree of deflection. The compressive load is evenly distributed along the two opposite edges of the plate, which are freely pinched or pivotally supported. The other two edges of the plate are free. We consider a nonlinear boundary value problem for a modified system of nonlinear Karman equations that take into account internal stresses. By replacing variables, the problem is reduced to a sequence of two problems, of which the linear boundary value problem determines the function of stresses caused by the presence of internal sources, and the other, nonlinear, determines the deflection of the plate and the function of stresses caused by the compressive load. Using the Lyapunov–Schmidt method, the branching of solutions of a modified system of nonlinear Karman equations is investigated. The critical values of the load parameter are determined from a linearized problem based on a trivial solution. In this case, the variational method in combination with the finite-difference method is used to solve the linearized problem. The coefficients of the system of branching equations of the Lyapunov–Schmidt method are calculated numerically. The post-critical behavior of the plate is investigated and asymptotic formulas for new equilibria in the vicinity of critical loads are derived. For different parameter values of compressive loads and internal stresses the relations between the values of the parameters of the base, which preserve its load-bearing capacity in the vicinity of the classical critical load.

Keywords: elastic plate, critical load, internal stresses, nonlinear elastic base, Lyapunov–Schmidt method, ramification equation.