

УДК 539.37

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-225-243

**ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
О НАГРУЖЕНИИ ДАВЛЕНИЯМИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА
ИЗ НЕЛИНЕЙНО НАСЛЕДСТВЕННОГО МАТЕРИАЛА
В СЛУЧАЕ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ**

© 2020 г.

Хохлов А.В.

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация
АО «Композит», Королев, Московская обл., Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 13.04.2020

Исследовано построенное автором общее точное решение квазистатической задачи о напряженно-деформированном состоянии нагруженной давлениями толстостенной трубы из изотропного несжимаемого материала, подчиняющегося нелинейному определяющему соотношению вязкоупругости Работнова с двумя произвольными материальными функциями (функцией ползучести и функцией нелинейности), содержащее интегральные операторы от материальных функций и функции времени, которая определяется из функционального уравнения, зависящего от истории изменения внешнего и внутреннего давлений и материальных функций. Решение доведено до простых алгебраических формул для деформаций и напряжений в любой точке трубы в случае выбора степенной материальной функции нелинейности с произвольным показателем в результате точного решения функционального уравнения и вычисления всех интегральных операторов, входящих в общее представление для полей перемещений, деформаций и напряжений. Для произвольных функции сдвиговой ползучести и показателя функции нелинейности аналитически изучены качественные свойства напряженно-деформированного состояния трубы (в постановке задачи, опирающейся на допущения о несжимаемости материала и плоской деформации). Доказано, что напряжения не зависят от функции ползучести (от наследственных свойств моделируемого материала), а зависят лишь от мгновенных значений давлений (в отличие от деформаций, зависящих от функции ползучести) и совпадают с напряжениями в трубе из упругопластического материала со степенной функцией упрочнения. Исследованы интервалы и условия возрастания или убывания напряжений и деформаций по радиальной координате в зависимости от отношения радиусов трубы, величин давлений и показателя функции нелинейности. Для произвольной функции ползучести аналитически исследованы свойства построенных полей напряжений и деформаций в случае нагружения трубы внутренним давлением, растущим с постоянной скоростью, выведено уравнение семейства диаграмм нагружения материала трубы по измерениям окружной деформации на внешней или внутренней поверхностях трубы.

Ключевые слова: нелинейная вязкоупругость, упругопластичность, определяющее соотношение Работнова, функция нелинейности, несжимаемый материал, свойства поля напряжений, семейство кривых нагружения, ползучесть, продольная сила.

Введение

Квазистатические задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) толстостенной трубы под действием внутреннего и внешнего давлений в рамках теории упругости (задача Ламе) и разных вариантов упругопластичности являются классическими из-за обилия приложений их результатов (расчет артиллерийских стволов, газопроводов, обделок туннелей, шлангов, скважин, шахт, процессов запрессовки и т.п.) и благодаря возможности построить точное решение (при тех или иных упрощающих допущениях) или хотя бы достаточно простой и аналитически проработанный алгоритм приближенного решения. Эти задачи хорошо исследованы в случае упругопластического материала без упрочнения и с линейным упрочнением [1–7] и в теории установившейся ползучести (как правило, для степенной зависимости скорости ползучести от напряжения) [6, 8–10]. Строились и решения в рамках линейной вязкоупругости, но, как правило, не для произвольных функций релаксации (ползучести), а только для их конкретных классов, задаваемых конечным набором параметров (например, суммами экспонент, рядами Прони) и в пространстве преобразований Лапласа (или Лапласа – Карсона) [11–14]; качественные свойства построенных полей деформаций и напряжений не подвергались системному аналитическому исследованию в общем виде при произвольных материальных функциях, а, как правило, рассчитывались на компьютерах для конкретных функций релаксации.

В настоящей статье задача об определении и анализе НДС толстостенной трубы исследуется (в квазистатической постановке) для изотропного материала, подчиняющегося нелинейному определяющему соотношению (ОС) вязкоупругости Ю.Н. Работнова:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2}\Phi(L(t))\sigma^{-1}(t)[\sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}] + \frac{1}{3}\Phi_0(L_0(t))\delta_{ij}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$L(t) = \Pi\sigma, \quad L_0(t) = \Pi_0\sigma_0, \quad \Pi y = \int_0^t \Pi(t-\tau)dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau)dy(\tau). \quad (2)$$

Соотношение содержит четыре произвольные материальные функции (МФ) $\Pi(t)$, $\Phi(x)$, $\Pi_0(t)$, $\Phi_0(x)$ (Π и Π_0 – функции сдвиговой и объемной ползучести, Φ и Φ_0 – функции нелинейности) и описывает изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений $\sigma(t)$ и малых деформаций $\varepsilon(t)$ в произвольной точке тела; $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$ – среднее напряжение (первый инвариант $\sigma(t)$), $\sigma = (1,5s_{ij}s_{ij})^{0,5}$ – интенсивность напряжений (второй инвариант девиатора $\mathbf{s} = \sigma - \sigma_0\mathbf{I}$). Напряжение и время предполагаются безразмерными.

ОС (1) – один из простейших вариантов обобщения одноосного соотношения Работнова [9, 13, 15–21] с двумя материальными функциями φ , Π ($\varphi = \Phi^{-1}$):

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)\varphi'(\varepsilon(\tau))d\varepsilon(\tau), \quad t > 0, \quad (3)$$

на сложное напряженное состояние в предположениях изотропности и тензорной линейности материала, отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров (независимости объемной деформации $\theta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t)$ от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций – от σ_0) и пренебрежения влиянием их третьих инвариантов.

Настоящая статья продолжает цикл работ [22–27] по системному аналитическому исследованию ОС (1) с целью выявления комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его материальных функций и феноменологических ограничений на них, разработки способов идентификации, верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (3) приведены в публикациях [23–26].

Основные задачи статьи: 1) получить выражение для полей деформаций и напряжений в полом цилиндре из реономного материала, подчиняющегося ОС (1) со степенной функцией нелинейности $\Phi(x)$, при нагружении внутренним и внешним давлениями, достаточно медленно меняющимися во времени, существенно упростить в этом случае построенное автором в [27] общее решение задачи для произвольных МФ ОС (1), довести его до простых алгебраических формул; 2) аналитически изучить качественные свойства НДС трубы при произвольной функции сдвиговой ползучести ОС и произвольном показателе функции нелинейности, в частности, характер зависимости от времени и условия возрастания или убывания напряжений и деформаций по радиальной координате в зависимости от отношения радиусов трубы, величин давлений и показателя функции нелинейности; 3) вывести уравнение семейства диаграмм нагружения материала трубы по испытаниям с постоянной скоростью роста внутреннего давления; 4) подготовить фундамент для анализа НДС многослойных труб и для исследования решений динамической задачи о нагружении переменными давлениями (в частности в условиях виброползучести).

1. ОС Работнова и ограничения на его материальные функции

Одноосный вариант ОС (3) был предложен Ю.Н. Работновым [9, 13, 15–18] для описания нелинейной ползучести как обобщение одномерного линейного ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) = \mathbf{\Pi}\sigma, \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau) = \mathbf{R}\varepsilon, \quad t > 0, \quad (4)$$

посредством введения дополнительной МФ $\varphi(u)$. В (4) и (3) функции ползучести и релаксации $\Pi(t)$, $R(t)$ связаны интегральным уравнением [11]

$$\mathbf{R}\mathbf{\Pi} = \mathbf{h}(t) \quad \text{или} \quad \mathbf{\Pi}\mathbf{R} = \mathbf{h}(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

$\mathbf{h}(t)$ – функция Хевисайда, выражающим условие взаимной обратности операторов (4) и (3)). В англоязычных работах ОС (3) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости (QLV), а его автором считается Y.C. Fung [28–37]. В публикациях [9, 13, 15–21] и др. ОС (3) применялось к описанию одномерного поведения графита, металлов и сплавов, композитов, а в [28–37] – связок, сухожилий и других биологических тканей.

В одномерном случае (3) обратное ОС имеет вид $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ (композиция опера-

тора действия функции φ и линейного оператора \mathbf{R} из (4)). Обращение трехмерного ОС (1) для любых возрастающих МФ Φ и Φ_0 записывается в виде:

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0\varphi_0(\theta), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon), \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon^{-1}(t)e_{ij}(t), \quad (6)$$

где $\varphi = \Phi^{-1}$, $\varphi_0 = \Phi_0^{-1}$, $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0\mathbf{I}$ и $\varepsilon = (2/3e_{ij}e_{ij})^{0,5}$ – девиатор и интенсивность деформаций, а функции релаксации $R(t)$, $R_0(t)$ связаны с Π и Π_0 уравнениями вида (5). Из трех МФ φ , Π , R в ОС (3) лишь две независимы, а в ОС (1) – четыре независимых МФ.

На функции ползучести и релаксации в ОС (3) и (1) налагаем те же минимальные ограничения, что и в линейной теории вязкоупругости [38–40]: $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$, $R(t)$, $R_0(t)$ предполагаются положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, функции Π и Π_0 – возрастающими и выпуклыми вверх, а R и R_0 – убывающими и выпуклыми вниз на $(0; \infty)$, $R(t)$ и $R_0(t)$ могут иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в точке $t = 0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$, $\delta(t)$ – дельта-функция). Из этих условий следует существование предела $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$ ($y(0) = y(0+)$ – предел функции $y(t)$ справа в точке $t = 0$). На МФ φ и φ_0 в ОС (3) и (6) и на МФ $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ в ОС (1) налагаем следующие минимальные требования [23–26]: функция $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(0; \omega)$, $\omega > 0$, а $\varphi_0(u)$ – на множестве $(\omega_-; 0) \cup (\omega_+; 0)$ (где $\omega_- \omega_+ < 0$), причем $\varphi(0+) = 0$ и $\varphi_0(0+) = \varphi_0(0-) = 0$ (иначе процессу $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = 0$ соответствует ненулевой отклик $\boldsymbol{\sigma}(t)$). Из возрастания $\varphi(u)$ и $\varphi_0(u)$ следует существование обратных функций $\Phi(x) = \varphi^{-1}$, $x \in (0; X)$, $X = \sup \varphi(u)$, и $\Phi_0(x) = \varphi_0^{-1}$, $x \in (\underline{x}; \bar{x})$, где $\underline{x} = \varphi_0(\omega_- + 0)$, $\bar{x} = \varphi_0(\omega_+ - 0)$, и обратимость ОС (1). Примеры семейств функций, которые удобно использовать для задания МФ Φ , Φ_0 или φ , φ_0 , приведены в [23–26].

Если задать ФП постоянной (пренебречь сдвиговой ползучестью), то ОС (1) для несжимаемого материала вырождается в ОС для упрочняющегося упругопластического несжимаемого материала (без наследственности) с произвольной МФ $\Phi(x)$, связывающей интенсивности напряжений и деформаций в точности так, как в деформационной теории пластичности. Тогда построенное решение задачи о НДС трубы из наследственного материала, подчиняющегося ОС (1), превратится в классическое решение [1–5].

2. Постановка и решение задачи о НДС толстостенной трубы для нелинейного ОС (1) с произвольными материальными функциями

Рассмотрим задачу об определении напряжений и деформаций в полем цилиндре из наследственного несжимаемого материала, подчиняющегося нелинейному ОС Работнова (1), под действием давлений $p_1(t)$ и $p_2(t)$, заданных на внутренней и внешней поверхностях цилиндра при $t > 0$. Считаем, что давления меняются медленно, так, что влиянием инерционных членов в уравнениях движения можно пренебречь (квазистатическая постановка). Используем цилиндрическую систему координат, ось z направим вдоль оси цилиндра. Пусть r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы ненагруженного цилиндра. Тогда краевые условия запишутся в виде:

$$\sigma_r|_{r_1} = -p_1(t), \quad \sigma_r|_{r_2} = -p_2(t), \quad \sigma_{r\theta}|_{r_1} = \sigma_{rz}|_{r_1} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{r_2} = \sigma_{rz}|_{r_2} = 0. \quad (7)$$

Задача осесимметрична, и потому в любой точке (r, θ, z) в любой момент времени все компоненты перемещений, деформаций и напряжений не зависят от угла θ и

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta z} = 0, \quad u_\theta = 0, \quad \varepsilon_\theta(r, t) = r^{-1}(u_{\theta, \theta} + u_r) = r^{-1}u_r, \\ \varepsilon_r(r, t) = u_{r, r}, \quad \varepsilon_z(r, t) = u_{z, z}. \end{aligned} \quad (8)$$

Предполагаем, что труба закреплена на торцах так, что $u_z = 0$ и касательные напряжения на торцах отсутствуют: $\sigma_{z\theta} = 0$ и $r_{rz} = 0$. Тогда труба находится в состоянии плоской деформации, u_r и σ_z не зависят от z и (помимо (8)) справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = 0, \quad \varepsilon_{z\theta} = 0, \quad \varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \varepsilon_z = 0, \quad u_z = 0, \\ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}(u_{r, z} + u_{z, r}) = 0, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}(u_{\theta, z} + r^{-1}u_{z, \theta}) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) следует, что тензоры деформаций и напряжений диагональны:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{diag}\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z\},$$

а зависимости ненулевых компонент от координат имеют вид: $u_r(r, t)$, $\varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta(r, t)$, $\sigma_z(t)$. Будем считать материал несжимаемым. Тогда $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{s} = \mathbf{diag}\{\sigma_r - \sigma_0, \sigma_\theta - \sigma_0, \sigma_z - \sigma_0\}$, а ОС (1) (и обратное ему ОС (6)) сводится к одномерному ОС $\varepsilon = \Phi(\Pi\sigma)$ с двумя МФ (Φ и Π или φ и R), связывающему интенсивности напряжений и деформаций, и условию пропорциональности девиаторов (6):

$$s_{ij}(t) = 2/3\sigma(t)\varepsilon^{-1}(t)e_{ij}(t), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$$

(первое уравнение ОС (6) не используется, и среднее напряжение σ_0 находится из решения краевой задачи, как обычно бывает при использовании условия несжимаемости).

В статье [27] (в предположениях плоской деформации трубы и однородности, изотропности и несжимаемости материала) поля перемещений, деформаций и напряжений в трубе из материала, подчиняющегося ОС (1) с двумя произвольными МФ $\Pi(t)$ и $\Phi(x)$ (или $R(t)$ и $\varphi(x)$ в (6)), выражены через одну (искомую) функцию времени $y(t)$:

$$u_r(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(t)\frac{r_1}{r}, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = 0; \quad (10)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2}y(t)r^{-2}, \quad \varepsilon_r(r, t) = -\varepsilon_\theta(r, t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}y(t)r^{-2}, \quad \varepsilon_z = 0; \quad (11)$$

$$\sigma_r(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\left[F(|y(t)|) - F\left(\frac{|y(t)|}{r^2}\right)\right], \quad (12)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\left[F(|y(t)|) - F\left(\frac{|y(t)|}{r^2}\right) + 2\varphi\left(\frac{|y(t)|}{r^2}\right)\right], \quad (13)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\left[F(|y(t)|) - F\left(\frac{|y(t)|}{r^2}\right) + \varphi\left(\frac{|y(t)|}{r^2}\right)\right]. \quad (14)$$

При этом $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ и $\sigma_0 = \sigma_z$, а интенсивности деформаций и напряжений имеют вид:

$$\varepsilon(r, t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 = \frac{|y(t)|}{\bar{r}^2}, \quad \sigma(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta| = \mathbf{R}\varphi\left(\frac{|y(t)|}{\bar{r}^2}\right). \quad (15)$$

В формулах (10)–(15) $\bar{r} = r/r_1 \in [1, r_2/r_1]$, $z(t) = \text{sgn } p(t)$, $p(t) = p_1(t) - p_2(t)$,

$$F(s) = \int_0^s \varphi(x) x^{-1} dx, \quad s > 0, \quad (16)$$

из $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$ следует возрастание $F(s)$, а функция $y(t)$ – решение уравнения

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R}[F(|y(t)|) - F(q|y(t))]$$

(конечно, функция y зависит не только от времени, но и от параметра q и от материальных функций ОС), или

$$F(Y(t)) - F(qY(t)) = P(t), \quad P(t) = \sqrt{3} \mathbf{\Pi}[zp(t)] = \sqrt{3} \mathbf{\Pi}|p(t)|, \quad t > 0. \quad (17)$$

Здесь $Y = |y(t)|$, $q = (r_1/r_2)^2 \in (0; 1)$, а $P(t)$ – известная функция, если задана функция ползучести и разность давлений $p(t)$. Из (15) и (11) следует, что $Y(t) = \varepsilon(t, r_1) = \varepsilon(t, r_2)/q$ – интенсивность деформаций, а $y(t)$ – измеряемая в испытаниях физическая величина, пропорциональная окружной деформации на поверхности трубы: $y(t) = 2/\sqrt{3}(\varepsilon_\theta(r_2, t)/q)$. В настоящей статье исследуются свойства найденного НДС трубы (11)–(14).

Решение уравнения (17) $Y(t)$ существует (в окрестности любой точки (t, Y) , $t, Y > 0$) по теореме о неявной функции, ибо производная функции $f(t, Y) = F(Y) - F(qY) - P(t)$ по Y существует и отлична от нуля для $t, Y > 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = F'(Y) - qF'(qY) = [\varphi(Y) - \varphi(qY)]Y^{-1} > 0,$$

так как $F'(s) = \varphi(s)/s$, а из возрастания $\varphi(x)$ следует, что $\varphi(Y) - \varphi(qY) > 0$ при $Y > 0$. Из уравнения (17) следует, что функция $Y(t, q)$ дифференцируема по t и по параметру q :

$$\frac{\partial Y}{\partial q} = q^{-1} Y \varphi(qY) [\varphi(Y) - \varphi(qY)]^{-1} > 0, \quad \dot{Y} = Y [\varphi(Y) - \varphi(qY)]^{-1} \dot{P}(t). \quad (18)$$

После определения $y(t)$ из уравнения (17) (в общем случае приближенного, хотя далее получено и аналитическое решение для важного класса МФ) можно вычислить поля перемещений и напряжений (10)–(14). Вместо функционального уравнения (17) можно решать задачу Коши для дифференциального уравнения (18).

Продольная сила вычисляется интегрированием напряжения (14) по сечению трубы:

$$N = \pi r_2^2 [qp_1(t) - p_2(t)] \quad (19)$$

(преобразования интегралов опущены). Знак продольной силы (19) совпадает со знаком разности $qp_1 - p_2$, она равна нулю лишь в случае $p_2 = qp_1$. Примечательно, что *продольная сила (в отличие от напряжений) не зависит от предыстории изменения нагрузки и от МФ ОС (1), а только от мгновенных значений давлений и радиусов трубы, и совпадает с силой, найденной из решения задачи Ламе для линейно-упругого несжимаемого материала.*

При динамической постановке задачи (при учете инерционных членов в уравнении равновесия) это уже не так. Формулы для напряжений отличаются от формул (12)–(14) лишь одинаковым слагаемым $\sqrt{3}/2\rho r_1^2 \ddot{y}(t) \ln \bar{r}$, где ρ – плотность; формулы для деформаций (10), (11) и для интенсивностей деформаций и напряжений сохранятся, но функция $Y(t)$ (входящая и в интегральные слагаемые формул (12)–(14)) будет другой, поскольку изменится уравнение (17) для нее (оно станет интегродифференциальным и будет содержать $\ddot{y}(t)$). Продольная сила отличается от статической силы (19) слагаемым с $\ddot{y}(t)$:

$$N = \pi r_2^2 (q p_1 - p_2) + \pi r_2^2 \mu \ddot{y}(t), \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{4} \rho r_1^2 (q - \ln q - 1).$$

Очевидно, что $\mu > 0$ при любых $\rho, r_1, r_2 > 0$, поскольку $\ln x + 1 < x$ при $x > 0$, и потому знак второго (динамического) слагаемого совпадает со знаком $\ddot{y}(t)$ в любой момент времени. Примечательно, что динамическая продольная сила, в отличие от квазистатического случая, теперь зависит не только от мгновенных значений $p_1(t)$ и $p_2(t)$ и радиусов цилиндра, но и от предыстории изменения нагрузки и от МФ, так как она содержит слагаемое с $\ddot{y}(t)$, а $y(t)$ зависит от предыстории изменения нагрузки и от МФ в силу уравнения (17).

3. Специфика НДС трубы для моделей со степенными функциями нелинейности

Рассмотрим произвольное квазистатическое нагружение трубы из материала, следующего ОС (1) с произвольной функцией ползучести и функцией нелинейности вида

$$\varphi(x) = Ax^\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (20)$$

Эта модель обеспечивает классическую степенную зависимость кривых ползучести и скорости ползучести от уровня напряжения (от его интенсивности при трехосном нагружении) [23, 25] и степенную аппроксимацию диаграмм деформирования [26]. По (16) $F(s) = A\alpha^{-1}s^\alpha$, уравнение (17) принимает вид $A\alpha^{-1}(1 - q^\alpha)|y(t)|^\alpha = P(t)$, и его решение $y(t)$ находится аналитически для произвольной функции ползучести и любого нагружения $p_i(t)$:

$$y(t) = z(t)aP(t)^{1/\alpha}, \quad a = [A^{-1}\alpha(1 - q^\alpha)^{-1}]^{1/\alpha}, \quad P(t) = \sqrt{3}\Pi |p(t)|, \quad t > 0. \quad (21)$$

Подстановка $y(t)$ в формулы (10), (11) дает выражения для перемещений и деформаций:

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} ar_1 \bar{r}^{-1} z(t) P(t)^{1/\alpha}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} a \bar{r}^{-2} z(t) P(t)^{1/\alpha}; \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta, \quad \varepsilon = a \bar{r}^{-2} P(t)^{1/\alpha}, \quad (22)$$

где $q = (r_1/r_2)^2 \in (0; 1)$, $\bar{r} = r/r_1 \in [1, r_2/r_1]$. Зависимость деформаций от времени полностью определяется функцией $P(t)^{1/\alpha}$, зависящей от программы нагружения $p(t)$ и ФП. Влияние относительной толщины трубы характеризуется множителем $a(q, \alpha)$, возрастающим по параметру q . При фиксированном t модули всех деформаций (22) – убывающие функции r .

Однородность МФ (20) и $F = \varphi(x)/\alpha$ позволяет вычислить все интегральные операторы в формулах (12)–(14) и получить для напряжений в любой точке трубы

простые алгебраические формулы. Сначала необходимо вычислить функции, на которые действует интегральный оператор \mathbf{R} в формулах (12)–(14):

$$F(|y(t)|) = A\alpha^{-1}[A^{-1}\alpha(1-q^\alpha)^{-1}P(t)] = w(q, \alpha)P(t), \quad w = (1-q^\alpha)^{-1},$$

$$F(|y|/\bar{r}^2) = w\bar{r}^{-2\alpha}P(t), \quad \varphi(|y|/\bar{r}^2) = aw\bar{r}^{-2\alpha}P(t), \quad F(|y|) - F(|y|/\bar{r}^2) = w(1-\bar{r}^{-2\alpha})P(t),$$

$$F(|y|) - F(|y|/\bar{r}^2) + 2\varphi(|y|/\bar{r}^2) = w(1-\bar{r}^{-2\alpha} + 2\alpha\bar{r}^{-2\alpha})P(t).$$

Все эти функции пропорциональны $P(t) = \sqrt{3}\mathbf{\Pi}|p(t)|$, и потому вычисление всех интегральных операторов по времени в (12)–(14) сводится к $\mathbf{R}P(t) = \sqrt{3}\mathbf{R}\mathbf{\Pi}|p(t)| = \sqrt{3}|p(t)|$ (поскольку $\mathbf{R}\mathbf{\Pi} = \mathbf{I}$). Поэтому формулы (12)–(14) принимают вид (поскольку $z|p| = p$):

$$\sigma_r(r, t) = -p_1(t) + p(t)w(q, \alpha)[1 - \bar{r}^{-2\alpha}], \quad (23)$$

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_1(t) + p(t)w(q, \alpha)[1 + (2\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha}], \quad (24)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_1(t) + p(t)w(q, \alpha)[1 + (\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha}], \quad (25)$$

где $q = (r_1/r_2)^2 \in (0; 1)$, $\bar{r}^{-2\alpha} \in [q^\alpha; 1] \subset (0; 1]$ и $w = (1 - q^\alpha)^{-1} > 1$ при всех $\alpha > 0$.

Примечательно, что ФП не входит в формулы для напряжений (23)–(25), то есть напряжения не зависят от наследственных свойств материала и предыстории нагружения, а зависят лишь от величин давлений $p_i(t)$ в данный момент времени (напряжения такие же, как в квазистатической задаче для трубы из нелинейно-упругого материала).

Характер зависимости напряжений (23)–(25) от r в любой фиксированный момент времени полностью определяется знаком разности $p(t) = p_1 - p_2$ и величиной α .

Если в текущий момент времени $p(t) > 0$, то второе слагаемое в каждой из формул (23)–(25) положительно (так как $1 + (2\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha} > 1 + (\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha} > 1 - \bar{r}^{-2\alpha} > 0$), справедливо неравенство $\sigma_\theta(r, t) > \sigma_z(r, t) > \sigma_r(r, t)$, напряжение $\sigma_r(r)$ возрастает при всех $\alpha > 0$ и $-p_1(t) \leq \sigma_r(r) \leq -p_2(t) \leq 0$ (и потому $|\sigma_r(r)|$ убывает), окружное напряжение $\sigma_\theta(r)$ возрастает при $\alpha \in (0; 0,5)$, убывает при $\alpha > 0,5$ и не зависит от координат при $\alpha = 0,5$, а осевое напряжение $\sigma_z(r)$ возрастает при $\alpha \in (0; 1)$, убывает при $\alpha > 1$ и постоянно по сечению лишь при $\alpha = 1$ (то есть в случае линейно-вязкоупругого материала).

Если $p(t) < 0$ в текущий момент времени, то второе слагаемое в каждой из формул (23)–(25) отрицательно, справедливо неравенство $\sigma_\theta(r, t) < \sigma_z(r, t) < \sigma_r(r, t)$, напряжение $\sigma_r(r)$ убывает при всех $\alpha > 0$ и $-p_2(t) \leq \sigma_r(r, t) \leq -p_1(t) \leq 0$ (и потому $|\sigma_r(r)|$ возрастает), окружное напряжение $\sigma_\theta(r)$ убывает при $\alpha \in (0; 0,5)$, возрастает при $\alpha > 0,5$ и не зависит от координат при $\alpha = 0,5$, а осевое напряжение $\sigma_z(r)$ убывает при $\alpha \in (0; 1)$, возрастает при $\alpha > 1$ и постоянно по сечению лишь при $\alpha = 1$.

Если в некоторый момент времени $p_1(t) = p_2(t)$, то все напряжения не зависят от r и одинаковы: $\sigma_\theta(r, t) = \sigma_z(r, t) = \sigma_r(r, t) = -p_1(t)$.

Если $p_2(t) = 0$, то $\sigma_\theta > 0$ и $\sigma_z > 0$ при $r \in [r_1, r_2]$ в те моменты времени, когда $p_1(t) > 0$. Если же $p_2(t) > 0$, то окружное напряжение (24) и осевое (25) не обязательно положительны: при малом $p = p_1 - p_2$ второе слагаемое в каждой из формул (23)–(25) мало, и $\sigma_\theta(r, t) < 0$, $\sigma_z(r, t) < 0$. Знак продольной силы (19) совпадает со знаком величины $qp_1(t) - p_2(t)$.

Так как при любом $\alpha > 0$ в любой момент времени $\sigma_\theta(r, t)$ и $\sigma_z(r, t)$ монотонны

по r , то наибольшее значение они принимают при $r = r_1$ или $r = r_2$, то есть при $\bar{r}^{-2} = 1$ или $\bar{r}^{-2} = q$:

$\sigma_\theta(r_1, t) = -p_1(t) + 2\alpha(1 - q^\alpha)^{-1}p(t)$, $\sigma_\theta(r_2, t) = -p_1(t) + p(t)[1 + 2\alpha q^\alpha(1 - q^\alpha)^{-1}]$;
 $\sigma_\theta(r_1, t) > 0$ равносильно $p_2(t)/p_1(t) < 1 - 0,5(1 - q^\alpha)\alpha^{-1}$, или $p_1(t) > \alpha[\alpha - 0,5 \times (1 - q^\alpha)]^{-1}p_2(t)$; $\sigma_\theta(r_2, t) > 0$ равносильно $p_2/p < 2\alpha q^\alpha(1 - q^\alpha)^{-1}$, то есть $p_1(t) > \alpha^{-1}[\alpha + 0,5(q^\alpha - 1)]p_2(t)$.

Из точной оценки $q^\alpha \leq \bar{r}^{-2\alpha} \leq 1$ следует, что $1 - \bar{r}^{-2\alpha} \leq 1 - q^\alpha$ и по (23) и (24) имеем

$$\tau_{\max}(r, t) = 0,5 |\sigma_\theta - \sigma_r| = \alpha \bar{r}^{-2\alpha} w(q, \alpha) |p(t)|,$$

$$\alpha q^\alpha w(q, \alpha) |p| \leq \tau_{\max}(r, t) \leq \alpha w(q, \alpha) |p|.$$

Интенсивность напряжений выражается по (15):

$$\sigma(r, t) = \sqrt{3} \tau_{\max}(r, t) = \sqrt{3} \alpha w(q, \alpha) |p(t)| \bar{r}^{-2\alpha}. \quad (26)$$

В любой момент времени, кроме тех случаев, когда $p(t) = 0$, интенсивность напряжений (как и $\tau_{\max}(r, t)$) убывает по r при любом $\alpha > 0$ и максимальна на внутренней границе трубы.

При $\alpha = 1$ (то есть в случае линейно-вязкоупругого материала) все компоненты тензора напряжений (23)–(25) совпадают с решением задачи Ламе для несжимаемого линейно-упругого материала, в частности σ_z не зависит от r . Отметим, что ОС (1) с $\Phi(x) = x$, $\Phi_0(x) = x$ в трехмерном случае не совпадает с линейным ОС вязкоупругости для изотропных сред, так как последнее не обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров деформаций и напряжений в случае сложных нагружений. Эти два ОС совпадают только на множестве простых процессов нагружения или деформирования, когда линейное ОС вязкоупругости обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров. Из формул (11) следует, что в рассматриваемой задаче о НДС трубы имеет место процесс простого деформирования, и потому решение задачи для ОС (6) с МФ $\varphi(x) = Ax$ действительно совпадает с решением для линейно-вязкоупругого несжимаемого материала.

При $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\alpha/(1 - q^\alpha) \rightarrow -1/\ln q = 0,5/\ln(r_2/r_1)$ и $(1 - \bar{r}^{-2\alpha})/(1 - q^\alpha) \rightarrow -2 \ln \bar{r} / \ln q$, и потому поле напряжений (23)–(25) стремится при $\alpha \rightarrow 0$ к классическому предельному распределению напряжений для идеально пластического материала [1–3], характеризующемуся постоянством интенсивности напряжений $\sigma(r) = \sigma_T$:

$$\sigma_r = -p_1 - \frac{2p_*}{\ln q} \ln \bar{r}, \quad \sigma_\theta = -p_1 - \frac{2p_*}{\ln q} (\ln \bar{r} + 1),$$

$$\sigma_z = -p_1 - \frac{2p_*}{\ln q} (\ln \bar{r} + 0,5), \quad \sigma = -\sqrt{3} \frac{|p_*|}{\ln q},$$

где предельная разность давлений p_* находится из условия $\sigma = \sigma_T$:

$$|p_*| = -\sigma_T \frac{\ln q}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_T \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

На рис. 1а приведены графики напряжений (23)–(25) в зависимости от координаты $\bar{r} = r/r_1$ для трубы с $r_1/r_2 = 4/5$ (то есть $q = 0,64$, $\bar{r} \in [1; 5/4]$) в тот момент, когда $p_1 = 1$ и $p_2 = 0$ ($p = 1$), в предположении, что материал описывается ОС (1) со степенной МФ (20) с $A = 1$ и разными показателями $\alpha = 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$ (кри-

вые 1–5). Эпюры $-\sigma_r(\bar{r})$ показаны синим цветом, $\sigma_z = \sigma_0$ – голубым, $\sigma_\theta(\bar{r})$ – красным, эпюры интенсивности напряжений (26) – черные штриховые линии 1–5. Эпюры для $\alpha = 1$ помечены стрелками (кривые 3). Отметим, что σ_θ и σ в несколько раз превышают приложенное давление.

На рис. 1б приведены графики напряжений (23)–(26) в зависимости от \bar{r} для более толстой трубы с $r_1/r_2 = 0,5$ (то есть $q = 0,25$, $\bar{r} \in [1; 2]$) при той же нагрузке ($p_1 = 1, p_2 = 0$) и для тех же моделей (20) с $\alpha = 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0$ (кривые 1–5). Отличие от рис. 1а – существенное снижение модулей σ_θ , σ и $\sigma_z = \sigma_0$ (так как площадь поперечного сечения увеличилась в 2 раза: отношение площадей равно $(1 - q_2)/(1 - q_1) = 0,75/0,36$) и снижение σ_θ по сравнению с σ .

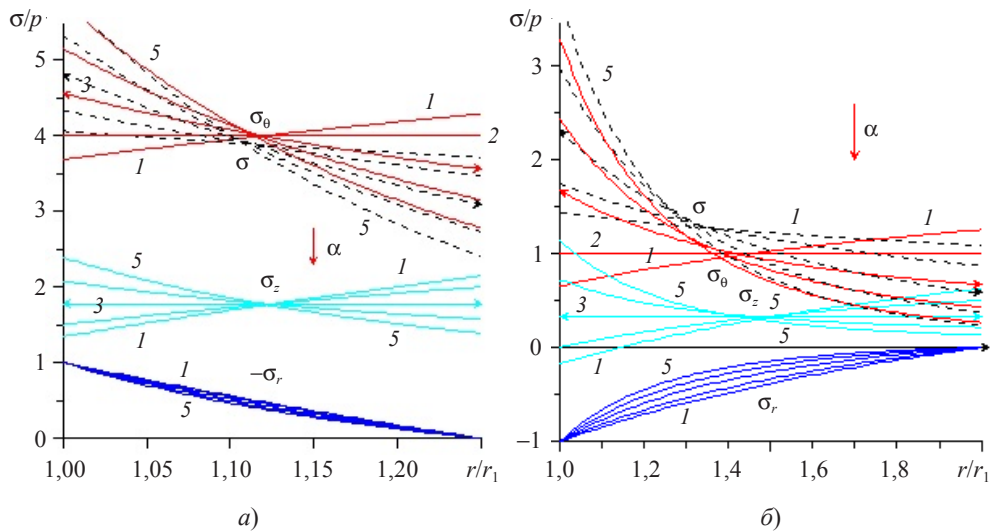


Рис. 1

Отметим, что для произвольной МФ φ (не степенной) интенсивность напряжений и все компоненты тензора напряжений зависят от времени, а их зависимость от радиальной координаты может быть немонотонной.

4. Рост внутреннего давления с постоянной скоростью. Диаграммы деформирования

Рассмотрим однопараметрическое нагружение трубы

$$p_1(t) = bt, \quad p_2(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad b > 0 \quad (27)$$

(это нагружение моделирует, например, режим медленного пуска газопровода или закачку газа в скважину). Тогда $p(t) = bt$, $z(t) = 1$ и согласно (23)–(25) имеем:

$$\sigma_r = -wbt(\bar{r}^{-2\alpha} - q^\alpha), \quad \sigma_\theta = wbt[q^\alpha + (2\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha}], \quad \sigma_z = wbt[q^\alpha + (\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha}].$$

Все напряжения растут линейно по времени, скорость роста пропорциональна скорости роста давления b и множителю, зависящему от \bar{r} , q и α . Интенсивность напряжений:

$$\sigma = \sqrt{3}\alpha(1 - q^\alpha)^{-1}\bar{r}^{-2\alpha}bt = \sqrt{3}\alpha w\bar{r}^{-2\alpha}bt, \quad w = (1 - q^\alpha)^{-1}. \quad (28)$$

Радиальное перемещение и деформации вычисляются по формулам (22), где в силу (21)

$$P(t) = \sqrt{3b}\Pi t = \sqrt{3b}Q(t), \quad Q(t) = \int_0^t \Pi(\tau)d\tau, \quad t > 0.$$

Поскольку $\Pi(t) > 0$ и $\dot{\Pi}(t) > 0$ при $t > 0$, то $\dot{P}(t) = \sqrt{3b}\Pi(t) > 0$, $\ddot{P}(t) = \sqrt{3b}\dot{\Pi}(t) > 0$, функция $P(t)$ возрастает и выпукла вниз, и потому в силу (22) в любой точке трубы $u_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$ и $|\varepsilon_r(r, t)|$ возрастают и выпуклы вниз по времени при $t > 0$ (для любой ФП, любого показателя α и любого q). Формулы

$$\sigma = \sqrt{3}\alpha\omega(q, \alpha)\bar{r}^{-2\alpha}bt, \quad \varepsilon = [A^{-1}\alpha\omega]^{1/\alpha}\bar{r}^{-2}[\sqrt{3b}Q(t)]^{1/\alpha}$$

задают серию диаграмм нагружения материала трубы в параметрической форме (см. (28), (22)). Скорость нагружения в произвольной точке трубы постоянна, но зависит от ее координаты \bar{r} (пропорциональна $\bar{r}^{-2\alpha}$), поэтому из одного испытания можно получить диаграммы для двух скоростей, измеряя окружную деформацию (и рассчитывая напряжения и скорости нагружения) на внутренней и внешней поверхностях трубы:

$$- \text{при } r=r_1: \sigma(r_1, t) = \sqrt{3}\alpha\omega bt, \quad b_1 = \sqrt{3}\alpha\omega b, \quad \varepsilon(r_1, t) = [A^{-1}\alpha\omega]^{1/\alpha}[\sqrt{3b}Q(t)]^{1/\alpha},$$

$$- \text{при } r=r_2: \sigma(r_2, t) = \sqrt{3}\alpha q^\alpha \omega bt, \quad b_2 = \sqrt{3}\alpha q^\alpha \omega b, \quad \varepsilon(r_2, t) = [A^{-1}\alpha\omega]^{1/\alpha} q [\sqrt{3b}Q(t)]^{1/\alpha}.$$

Очевидно, что $b_2/b_1 = q^\alpha$, $\varepsilon(r_2, t)/\varepsilon(r_1, t) = q$. Исключим t : $\varepsilon/\varepsilon^\alpha = At/Q(t)$, $t = b_i/\sigma$,

$$\varepsilon^\alpha = A^{-1}(b_i/\sigma)^{-1}Q(b_i/\sigma), \quad i = 1, 2, \quad (29)$$

то есть связь между σ , b_i и ε^α такая же, как в линейной вязкоупругости между σ , b_i и ε [38].

На рис. 2а приведены графики интенсивности деформаций на внутренней поверхности трубы $\varepsilon(r_1, t) = |y(t)|$ в зависимости от времени для трубы с $r_1/r_2 = 4/5$ при нагружении (27) с постоянной скоростью $b = 0,1$ в предположении, что материал описывается ОС (1) со степенной функцией нелинейности вида (20) с $A = 1$ и разными показателями $\alpha = 0,5; 0,7; 0,9; 1,0; 1,1; 1,5$ (кривые 1–5) и с ФП

$$\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \beta = 0,015, \quad \gamma = 0,01 \quad (30)$$

(ФП как у модели Кельвина, время ретардации $1/\lambda = 10$, а время релаксации $\tau = (\beta - \gamma)/(\beta\lambda) = 10/3$). Эти кривые совпадают с графиками функций $|y(t)|$ (см. (21)). С увеличением α кривые смещаются вверх. Кривые 1'–6' – графики $\varepsilon(r_1, t)$ для более толстой трубы с $r_1/r_2 = 1/2$ при той же нагрузке и для тех же моделей. Кривые 4 и 4' соответствуют $\alpha = 1$, то есть случаю линейно-вязкоупругого материала. Графики деформаций $\varepsilon_\theta(r_1, t)$ и $\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta$ отличаются от $\varepsilon(r_1, t)$ лишь множителем $\pm \sqrt{3}/2$.

На рис. 2б приведены графики интенсивности деформаций $\varepsilon(r_1, t) = |y(t)|$ в точке внутренней поверхности трубы с $r_1/r_2 = 4/5$ при разных величинах скорости нагружения $b = 0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3$ для модели с $\alpha = 0,9$ и той же ФП (30), что и на рис. 2а. Кривые 1'–5' – графики $\varepsilon(r_1, t) = |y(t)|$ для более толстой трубы с $r_1/r_2 = 1/2$.

На рис. 3а приведены диаграммы σ – ε (29) при нагружении (27) с постоянной скоростью $b = 0,1$, построенные в точке на внутренней поверхности трубы с $r_1/r_2 = 4/5$ по кривым деформирования с рис. 2а, для тех же моделей с разными показателями $\alpha = 0,5; 0,7; 0,9; 1,0; 1,1; 1,5; 2,0$ (кривые 1–7). Они отличаются друг от друга, так как скорости роста интенсивности напряжений $b_1 = \sqrt{3}\alpha\omega(q, \alpha)b$ пропорциональны b , но зависят еще от α и q . Голубые кривые 1'–7' – диаграммы σ – ε для более толстой трубы с $r_1/r_2 = 1/2$.

На рис. 3б приведены диаграммы нагружения σ – ϵ (29) (в точке с $r = r_1$), порождаемые моделью с $\alpha = 0,9$ и той же ФП (30), что и на рис. 2б при разных скоростях роста давления $b = 0,01; 0,05; 0,1$ (тех же, что и на рис. 2б: кривые 1–3 – для трубы с $r_1/r_2 = 4/5$, голубые кривые 1'–3' – для трубы с $r_1/r_2 = 1/2$) и дополнительно – при $b = 0,001$ (штриховые линии 0; они практически совпадают с предельной кривой при $b \rightarrow 0$). Кривые 10–13 – диаграммы нагружения для модели с $\alpha = 1,5$ при тех же скоростях $b = 0,001; 0,01; 0,05; 0,1$.

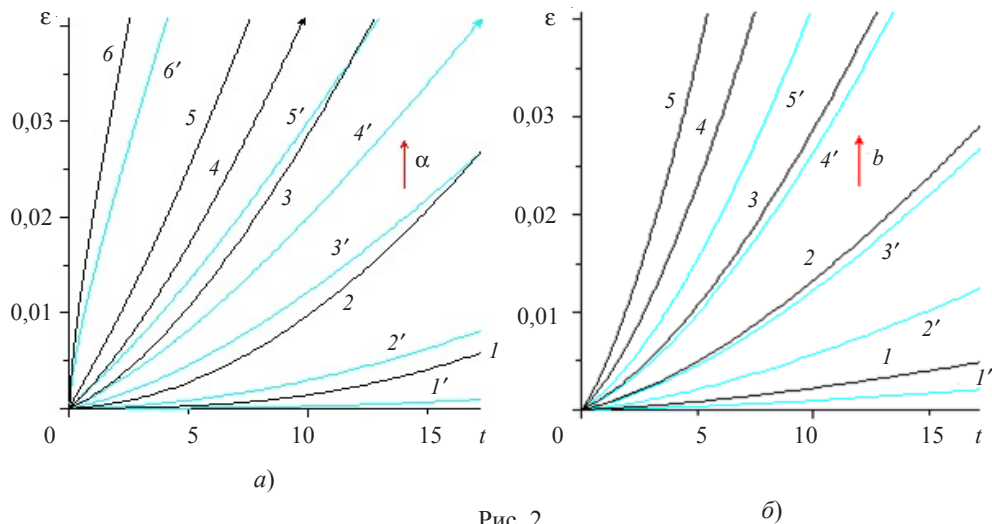


Рис. 2

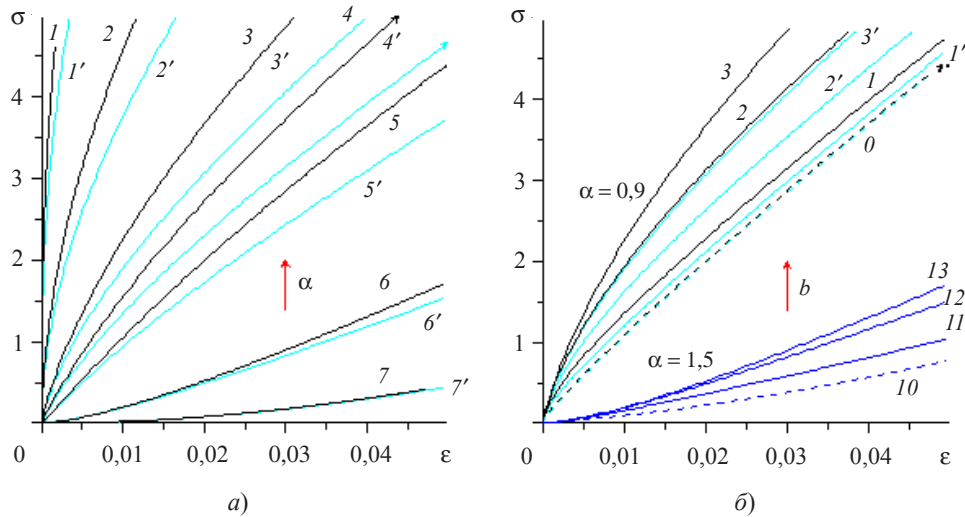


Рис. 3

5. Нагружение постоянными внутренним и внешним давлениями. Кривые ползучести

Рассмотрим задачу о ползучести материала трубы под действием постоянной разности давлений $p(t) = ph(t)$, то есть $p(t) = \text{const}$ при $t > 0$. Тогда функция $P(t)$ в (21) легко вычисляется: $P(t) = \sqrt{3} |p| \Pi(t)$, и ее подстановка в формулы (22) дает

выражения для перемещений и деформаций в условиях ползучести (для степенной МФ (20) и произвольной ФП):

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} ar_1 \bar{r}^{-1} P(t)^{1/\alpha}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} a \bar{r}^{-2} P(t)^{1/\alpha}, \quad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta, \quad \varepsilon = a \bar{r}^{-2} P(t)^{1/\alpha}. \quad (31)$$

Если $p > 0$, в силу (31) кривые ползучести $\varepsilon(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$ и $|\varepsilon_r(r, t)|$ возрастают по времени при любом r и ограничены на полуоси $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда ограничена $\Pi(t)$; при $\alpha \geq 1$ все они выпуклы вверх, так как $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ и $\ddot{y}(t) \leq 0$. Их зависимость от давления и толщины трубы характеризует множитель $\alpha(1 - q^\alpha)^{-1/\alpha} |p|^{1/\alpha}$, возрастающий по $|p|$ и q . При фиксированном t модули всех деформаций (31) – убывающие функции r .

На рис. 4а приведены графики интенсивности деформаций (31) на внутренней поверхности трубы $\varepsilon(r_1, t) = |y(t)|$ в зависимости от времени (кривые ползучести) для трубы с $r_1/r_2 = 4/5$, нагруженной разностью давлений $p = 1$, в предположении, что материал описывается ОС (1) со степенной функцией нелинейности вида (20) с $A = 1$ и разными показателями $\alpha = 0,5; 0,7; 0,9; 1,0$ (кривые 1–4) и с функцией ползучести (30). Штриховые прямые – их горизонтальные асимптоты при $t \rightarrow \infty$ (ФП (30) имеет предел $\Pi(\infty) = \beta$). Кривые 1'–4' – кривые ползучести $\varepsilon(r_1, t)$ для более толстой трубы с $r_1/r_2 = 1/2$ при той же нагрузке и для тех же моделей. Кривые 4 и 4' соответствуют $\alpha = 1$, то есть случаю линейно-вязкоупругого материала.

На рис. 4б приведены графики интенсивности деформаций (31) $\varepsilon(r_1, t) = |y(t)|$ на внутренней поверхности трубы с $r_1/r_2 = 4/5$ при разных величинах давления $p = 1; 2; 3; 4; 5$ для модели с $\alpha = 0,5$ и той же ФП (30), что и на рис. 4а. Кривые 2', 4', 6', 8', 10' – кривые ползучести для более толстой трубы с $r_1/r_2 = 1/2$ при $p = 2; 4; 6; 8; 10$.

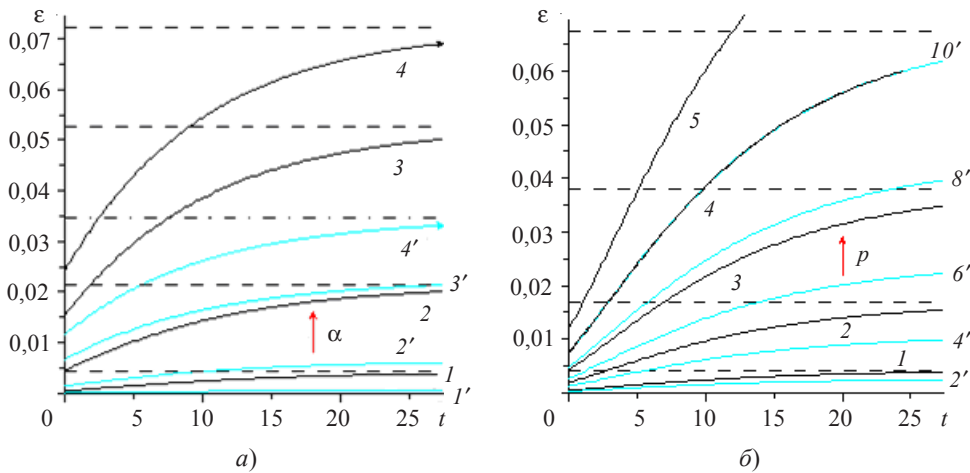


Рис. 4

Заключение

В квазистатической постановке рассмотрена задача о нагружении переменными внутренним и внешним давлениями толстостенной трубы из однородного изотропного несжимаемого материала, подчиняющегося нелинейному определяющему соотношению вязкоупругости Работнова (1) с двумя произвольными материальными функциями (функцией ползучести и функцией нелинейности). В случае вы-

бора степенной материальной функции нелинейности (20) с произвольным показателем построенное ранее в [27] точное общее представление для полей перемещений, напряжений и деформаций (10)–(14) доведено до простых алгебраических формул (22)–(25) для деформаций и напряжений в любой точке трубы в результате построения решения функционального уравнения (17) и вычисления всех интегральных операторов, входящих в общее представление (10)–(14) для полей перемещений, деформаций и напряжений. Для произвольной функции сдвиговой ползучести и произвольного показателя функции нелинейности аналитически изучены качественные свойства НДС трубы (в постановке задачи, опирающейся на допущения о плоской деформации трубы и несжимаемости материала). Доказано, что напряжения не зависят от функции ползучести (от наследственных свойств моделируемого материала), а зависят лишь от мгновенных значений давлений (в отличие от деформаций, зависящих от функции ползучести) и совпадают с напряжениями в трубе из упругопластического материала со степенной функцией упрочнения. Исследованы интервалы возрастания или убывания напряжений и деформаций по радиальной координате в зависимости от отношения радиусов трубы, величин давлений и показателя функции нелинейности. Осуществлена редукция НДС трубы в частных и предельных случаях к классическим решениям для линейно-упругого, нелинейно-упругого и жесткопластического материалов. Для произвольной функции ползучести и произвольного показателя функции нелинейности проанализированы свойства построенных полей напряжений и деформаций в случае нагружений трубы внутренним давлением, растущим с постоянной скоростью (см. п. 4), выведено уравнение семейства диаграмм нагружения материала трубы по измерениям окружной деформации на внешней и внутренней поверхностях трубы, указаны их свойства.

Найденные точные решения будут полезны для верификации процедуры приближенного решения уравнения (17) и расчетов НДС труб при произвольных материальных функциях (найденных в результате идентификации по данным испытаний реономных материалов), решений, построенных при отказе от некоторых упрощающих допущений (несжимаемость, плоская деформация, однородность материала) и исследования (и верификации) решений динамической задачи о нагружении (многослойных) труб переменными давлениями, в частности, в условиях циклического нагружения и виброползучести.

Список литературы

1. Соколовский В.В. *Теория пластичности*. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. 306 с.
2. Nadai A.L. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Vol. 1. New-York: McGraw-Hill, 1950. 572 p.
3. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Clarendon Press, 1950. 356 p.
4. Prager W., Hodge P.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. New York: John Wiley and Sons, 1951. 328 p.
5. Ильющин А.А., Огибалов П.М. *Упруго-пластические деформации полых цилиндров*. М.: Изд-во МГУ, 1960. 227 с.
6. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
7. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
8. Качанов Л.М. *Теория ползучести*. М.: Физматгиз, 1960. 456 с.
9. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.

10. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
11. Cristensen R.M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York–London: Acad. Press, 1971. 256 p.
12. Москвитин В.В. *Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе)*. М.: Наука, 1972. 328 с.
13. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
14. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Heidelberg: Springer, 1989. 769 p.
15. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием. *ПММ*. 1948. Т. 12. №1. С. 53–62.
16. Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н. Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории. *ПМТФ*. 1971. № 2. С. 76–82.
17. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах. *Механика полимеров*. 1971. №1. С.74–87.
18. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии. *Механика полимеров*. 1973. №5. С. 779–785.
19. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния. *Механика композитных материалов*. 1993. № 5. С. 602–607.
20. Суворова Ю.В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях. *Изв. РАН. МТТ*. 2004. №1. С. 174–181.
21. Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В. Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями. *Композиты и наноструктуры*. 2011. №2. С. 28–39.
22. Хохлов А.В. Асимптотика кривых ползучести, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти. *Вестник Московского университета. Сер. I. Математика. Механика*. 2017. №5. С. 26–31. DOI: 10.3103/S0027133017050016.
23. Хохлов А.В. Кривые ползучести и релаксации нелинейного определяющего соотношения Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. №4. С. 452–466. DOI: 10.32326/1814-9146-2016-78-4-452-466.
24. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54. No 4. P. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1.
25. Хохлов А.В. Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2018. Т. 24. №3. С. 407–436. DOI: 10.33113/mkkm.ras.2018.24.03.407_436.07.
26. Хохлов А.В. Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов. *Изв. РАН. МТТ*. 2019. №2. С. 29–47. DOI: 10.1134/S0572329919020077.
27. Хохлов А.В. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии полого цилиндра из нелинейно наследственного материала под действием внутреннего и внешнего давлений. *Вестник ЮУрГУ. Серия Матем. Механ. Физика*. 2020. Т. 12. №1. С. 44–54. DOI: 10.14529/mmph200106.
28. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics: Its Foundations and Objectives*. Eds. Y.C. Fung et al. New Jersey: Prentice-Hall, 1972. P. 181–208.
29. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer, 1993. 568 p.

30. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2000. Vol. 122. P. 15–22.
31. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: Application to incremental stress-relaxation experiments. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2003. Vol. 125. No 5. P. 754–758. <https://doi.org/10.1115/1.1615247>.
32. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *Journal of Biomechanical Engineering*. 2004. Vol. 126. P. 92–97. DOI: 10.1115/1.1645528.
33. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *Journal of Biomechanics*. 2007. Vol. 40. Iss. 14. P. 3070–3078. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019.
34. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2007. Vol. 6. No 4. P. 245–251. <https://doi.org/10.1007/s10237-006-0056-8>.
35. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: Evaluation by experiment. *Acta Mechanica*. 2009. Vol. 205. P. 23–33. DOI: 10.1007/s00707-009-0161-8.
36. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
37. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: A reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proceedings of the Royal Society*. 2014. Vol. 470. 20140058. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.
38. Хохлов А.В. Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77. №2. С. 139–154. DOI: 10.32326/1814-9146-2015-77-2-139-154.
39. Хохлов А.В. Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при гамп-деформировании и методики ее идентификации. *Изв. РАН. МТТ*. 2018. №3. С. 81–104. DOI: 10.7868/S0572329918030108.
40. Хохлов А.В. Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента Пуассона в рамках линейной теории вязкоупругости. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2019. № 4. С. 671–704. DOI: 10.14498/vsgtu1710.

References

1. Sokolovskiy V.V. *Teoriya Plastichnosti [Theory of Plasticity]*. Moscow. Leningrad. AN SSSR Publ. 1946. 306 p. (In Russian).
2. Nadai A.L. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Vol. 1. New York. McGraw-Hill. 1950. 572 p.
3. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford. Clarendon Press. 1950. 356 p.
4. Prager W., Hodge P.G. *Theory of Perfectly Plastic Solids*. New York. John Wiley and Sons. 1951. 328 p.
5. Ilyushin A.A., Ogibalov P.M. *Uprugo-plasticheskie deformatsii polykh tsilindrov [Elastoplastic Deformations of Hollow Cylinders]*. Moscow. MGU Publ. 1960. 227 p. (In Russian).
6. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [Applied Theory of Plasticity and Creep]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1968. 400 p. (In Russian).
7. Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematic Theory of Plasticity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 704 p. (In Russian).
8. Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti [Creep Theory]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 1960. 456 p. (In Russian).
9. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest elementov konstruktsiy [Creep Problems in Structural Members]*. Moscow. Nauka Publ. 1966. 752 p. (In Russian).
10. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest i dlitel'naya prochnost metallov [Creep and Long-Lasting Strength of Metals]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2016. 504 p. (In Russian).
11. Cristensen R.M. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. New York. London. Acad. Press. 1971. 256 p.

12. Moskvitin V.V. *Soprotivlenie vyazkouprugikh materialov (primenitelno k zaryadam raketnykh dvigateley na tverdom toplive)* [Strength of Viscoelastic Materials]. Moscow. Nauka Publ. 1972. 328 p. (In Russian).
13. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Introduction to Hereditary Mechanics of Solids]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 384 p. (In Russian).
14. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Heidelberg. Springer. 1989. 769 p.
15. Rabotnov Yu.N. Ravnovesie uprugoy sredy s posledeystviem [Equilibrium of elastic medium with heredity]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [J. Appl. Math. Mech.]. 1948. Vol. 12. No 1. P. 53–62 (In Russian).
16. Dergunov N.N., Papernik L.Kh., Rabotnov Yu.N. Analiz povedeniya grafita na osnove nelineynoy nasledstvennoy teorii [Analysis of the behavior of graphite on the basis of the nonlinear hereditary theory]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.]. 1971. No 2. P. 76–82 (In Russian).
17. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Prilozhenie nelineynoy teorii nasledstvennosti k opisaniyu vremennykh effektov v polimernykh materialakh [Application of the nonlinear theory of heredity to the description of time effects in polymeric material]. *Mekhanika polimerov* [Mech. Compos. Mater.]. 1971. No 1. P. 74–87 (In Russian).
18. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Opisanie polzuchesti kompozitsionnykh materialov pri rastyazhenii i szhatii [Description of creep of composition materials under tension and compression]. *Mekhanika polimerov* [Mech. Compos. Mater.]. 1973. No 5. P. 779–785 (In Russian).
19. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Nelineynaya model izotropnoy nasledstvennoy sredy dlya sluchaya slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya [A nonlinear model of an isotropic hereditary medium in complex stress state]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mech. Compos. Mater.]. 1993. Vol. 29. No 5. P. 602–607 (In Russian).
20. Suvorova Yu.V. O nelineyno-nasledstvennom uravnenii Yu.N. Rabotnova i ego prilozheniyakh [On the Yu.N. Rabotnov nonlinear hereditary equation and its applications]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 2004. No 1. P. 174–181 (In Russian).
21. Alexeeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. Analiz vyazkouprugikh svoystv polimernykh kompozitov s uglerodnymi nanonapolnitelyami [Analysis of viscoelastic properties of polymer based composites with carbon nanofillers]. *Kompozity i nanostrukturny* [Composites and Nanostructures]. 2011. No 2. P. 28–39 (In Russian).
22. Khokhlov A.V. Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2017. Vol. 72. No 5. P. 103–107. DOI: 10.3103/S0027133017050016.
23. Khokhlov A.V. Krivye polzuchesti i relaksatsii nelineynogo opredelyayushchego sootnosheniya Yu.N. Rabotnova dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov [Creep and relaxation curves produced by the Rabotnov nonlinear constitutive relation for viscoelastoplastic materials]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2016. Vol. 78. No 4. P. 452–466. DOI: 10.32326/1814-9146-2016-78-4-452-466 (In Russian).
24. Khokhlov A.V. Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory. *Mech. Compos. Mater.* 2018. Vol. 54. No 4. P. 473–486. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1.
25. Khokhlov A.V. Modelirovanie zavisimosti krivykh polzuchesti pri rastyazhenii i koeffitsienta Puassona reonomnykh materialov ot gidrostaticheskogo davleniya s pomoshchyu nelineyno-nasledstvennogo sootnosheniya Rabotnova [Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy* [Mech. Compos. Mater. Struct.]. 2018. Vol. 24. No 3. P. 407–436 DOI: 10.33113/mkkm.ras.2018.24.03.407_436.07 (In Russian).
26. Khokhlov A.V. Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials. *Mechanics of Solids*. 2019. Vol. 54. No 3. P. 384–399. DOI: 10.3103/S002565441902002X.

27. Khokhlov A.V. Reshenie zadachi o napryazhenno-deformirovannom sostoyanii pologo tsilindra iz nelineynogo nasledstvennogo materiala pod deystviem vnutrennego i vneshnego davleniy [Exact solution of the boundary value problem for strain and stress fields in a thick tube made of physically non-linear elasto-viscoplastic material under given internal and external pressures]. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Fizika* [Bulletin of the South Ural State University Ser. Mathematics. Mechanics. Physics]. 2020. Vol. 12. No 1. P. 44–54. DOI: 10.14529/mmph200106 (In Russian).
28. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. In: *Biomechanics: Its Foundations and Objectives* (Eds. Y.C. Fung et al.). New Jersey. Prentice-Hall. 1972. P. 181–208.
29. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York. Springer. 1993. 568 p.
30. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *J. Biomech. Eng.* 2000. Vol. 122. P. 15–22.
31. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: Application to incremental stress-relaxation experiments. *J. Biomech. Eng.* 2003. Vol. 125. No 5. P. 754–758. <https://doi.org/10.1115/1.1615247>.
32. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *J. Biomech. Eng.* 2004. Vol. 126. P. 92–97. DOI: 10.1115/1.1645528.
33. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling. *J. of Biomechanics*. 2007. Vol. 40. Iss. 14. P. 3070–3078. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2007.03.019.
34. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomech. Model. Mechanobiol.* 2007. Vol. 6. No 4. P. 245–251. <https://doi.org/10.1007/s10237-006-0056-8>.
35. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: Evaluation by experiment. *Acta Mech.* 2009. Vol. 205. P. 23–33. DOI: 10.1007/s00707-009-0161-8.
36. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge. Cambridge Univ. Press. 2009. 461 p.
37. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: A reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proc. R. Soc. A*. 2014. Vol. 470. 20140058. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.
38. Khokhlov A.V. Kharakternye osobennosti semeystv krivykh deformirovaniya lineynykh modeley vyazkoupругosti [Specific features of stress-strain curves at constant stress rate or strain rate yielding from linear viscoelasticity]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2015. Vol. 77. No 2. P. 139–154. DOI: 10.32326/1814-9146-2015-77-2-139-154 (In Russian).
39. Khokhlov A.V. Two-sided bounds for relaxation modulus in the linear viscoelasticity via relaxation curves at ramp strain histories and identification techniques. *Mechanics of Solids*. 2018. No 3. P. 61–104. DOI: 10.7868/S0572329918030108.
40. Khokhlov A.V. Analiz vliyaniya ob'emnoy polzuchesti na krivye nagruzheniya s postoyannoy skorostyu i evolyutsiyu koeffitsienta Puassona v ramkakh lineynoy teorii vyazkoupругosti [Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson's ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-maticheskije nauki* [J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.]. 2019. Vol. 23. No 4. P. 671–704. DOI: 10.14498/vsgtu1710 (In Russian).

**THE EXACT SOLUTION FOR STRAINS AND STRESSES IN A HOLLOW CYLINDER
OF NON-LINEAR VISCOELASTIC MATERIAL SUBJECT TO INTERNAL
AND EXTERNAL PRESSURES IN THE CASE OF POWER MATERIAL FUNCTION
GOVERNING NON-LINEARITY**

Khokhlov A.V.

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
JSC "Composite", Korolev, Moscow region, Russian Federation*

We study analytically the exact solution of the quasi-static problem for a thick-walled tube of physically non-linear viscoelastic material obeying the Rabotnov constitutive equation with two arbitrary material functions (a creep compliance and a function which governs physical non-linearity). We suppose that a material is homogeneous, isotropic and incompressible and that a tube is loaded with time-dependent internal and external pressures (varying slowly enough to neglect inertia terms in the equilibrium equations) and that a plain strain state is realized, i.e. zero axial displacements are given on the edge cross sections of the tube. We previously have obtained the closed form expressions for displacement, strain and stress fields via the single unknown function of time and integral operators involving this function, two arbitrary material functions of the constitutive relation, preset pressure values and radii of the tube and derive functional equation to determine this unknown resolving function.

Assuming creep compliance is arbitrary and choosing the material function governing non-linearity to be power function with a positive exponent, we construct exact solution of the resolving non-linear functional equation, calculate all the convolution integrals involved in the general representation for strain and stress fields and reduce it to simple algebraic formulas convenient for analysis and use. Strains evolution in time is characterized by creep compliance function and loading history. The stresses in this case depend on the current magnitudes of pressures only, they don't depend on creep compliance (i.e. viscoelastic properties of a material) and on loading history. The stress field coincides with classical solution for non-linear elastic material or elastoplastic material with power hardening (for non-decreasing pressure difference). We obtain criteria for increase, decrease or constancy of stresses with respect to radial coordinate in form of inequalities for the exponent value and for difference of pressures. Assuming creep compliance is arbitrary, we study analytically properties of strain and stress fields in a tube under internal pressure growing with constant rate and properties of corresponding stress-strain curves implying measurement of strains at a surface point of a tubular specimen.

Keywords: non-linear viscoelasticity, elastoplasticity, the Rabotnov constitutive equation, creep compliance, non-linearity material function, incompressible material, stress field properties, stress-strain curves family, creep curves.