

УДК 539.4

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-201-214

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН В РАМКАХ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА*

© 2020 г.

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 12.03.2020

Сформулирована динамическая задача упруговязкопластического деформирования гибких пластин с пространственными структурами армирования. Пластическое поведение компонентов композиции описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением при учете чувствительности этих материалов к скорости их деформирования. Геометрическая нелинейность задачи рассматривается в приближении Кармана. Используемые соотношения с разной степенью точности описывают механическое состояние изгибаемых пластин и позволяют учитывать возможное ослабленное сопротивление армированных конструкций поперечным сдвигам. В первом приближении приведенные уравнения, граничные и начальные условия редуцируются в соотношения широко используемой неклассической теории Редди. Для решения поставленной нелинейной начально-краевой задачи использован пошаговый алгоритм, основанный на применении явной численной схемы типа «крест». Исследовано упруговязкопластическое динамическое поведение прямоугольных композитных пластин разной относительной толщины при действии нагрузки, соответствующей избыточному давлению в воздушной взрывной волне. Рассматриваются стеклопластиковые и металлокомпозитные конструкции. Показано, что для композитных пластин с относительной толщиной порядка 0,1 расчет по теории Редди занижает максимальные значения интенсивности деформаций компонентов композиции более чем на 12% по сравнению с расчетом по уточненной теории. Для расчета относительно тонких конструкций вполне приемлема достаточно простая теория Редди. Продемонстрировано, что для стеклопластиковых пластин с относительной толщиной порядка 0,1 замена традиционной плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру армирования позволяет уменьшить величину максимального прогиба более чем на 20%, а наибольшее значение интенсивности деформаций компонентов композиции – на 10–20% и более. Для металлокомпозитных пластин любой толщины и для стеклопластиковых конструкций,

* Выполнено в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

имеющих малую относительную толщину, положительный эффект от такой замены структур армирования практически не наблюдается.

Ключевые слова: гибкие пластины, плоско-перекрестное армирование, пространственное армирование, упруговязкопластическое деформирование, чувствительность к скорости деформирования, теория Редди, уточненные теории изгиба, нагрузки взрывного типа, численная схема «крест».

Введение

Тонкостенные элементы конструкций из композитных материалов (КМ) широко используются в инженерных приложениях [1–6], поэтому актуальна проблема адекватного описания их механического поведения, в частности, при действии динамических нагрузок высокой интенсивности [3, 6], при которых компоненты композиции могут деформироваться неупруго. Степень проработки математической модели при этом определяется количеством учитываемых структурных элементов и точностью используемой теории расчета.

Упругопластическое деформирование слоистых конструкций (с изотропными слоями) рассматривалось в [7], вязкоупругопластическое поведение армированных пологих оболочек исследовалось в [8]. Пластическое поведение многих материалов чувствительно к скорости их деформирования [9, 10], поэтому в статье [11] была построена модель упруговязкопластического изгибного поведения волокнистых пластин.

Для учета возможного слабого сопротивления тонкостенных КМ-конструкций поперечному сдвигу традиционно используют теории Рейсснера [5–7, 12] или Редди [1, 11, 13, 14], реже применяют теории более высокой точности [5, 7, 8], как правило, основанные на кинематической гипотезе ломаной линии. В монографиях [13, 14] было продемонстрировано, что в случае линейно-упругого деформирования КМ тонкостенных элементов конструкций уточнять расчеты, выполненные по теории Редди, не требуется. Однако в [8] показано, что при вязкоупругопластическом динамическом деформировании компонентов композиции пологих оболочек необходимо использовать более точную, чем теория Редди, модель изгибного поведения тонкостенных КМ-конструкций. В [11] упруговязкопластическое деформирование армированных пластин определялось по теории Редди, поэтому открытым остался вопрос: необходимо ли уточнять теорию Редди в случаях, когда материалы композиции чувствительны к скорости их деформирования?

Численное интегрирование нелинейных динамических задач механики тонкостенных конструкций осуществляют, применяя явные схемы, например типа «крест» [7, 8, 11], или неявные методы Ньюмарка [3, 15].

Настоящее исследование посвящено моделированию упруговязкопластического динамического деформирования армированных пластин в рамках уточненной теории изгиба. Численное решение соответствующей начально-краевой задачи построено по явной схеме типа «крест».

1. Постановка задачи

Рассматривается тонкая пластина толщиной $2h$ (рис. 1), с которой связана декартова прямоугольная система координат x_i так, что отсчетная плоскость Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) – срединная плоскость ($|x_3| \leq h$). Конструкция усилена плоско-перекрестно

или пространственно K семействами волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq K$). Структура армирования по толщине пластины однородна. На рис. 1а изображена традиционная ортогональная структура 2D-армирования ($K = 2$) [16, 17]; на рис. 1б – пространственная структура 4D-армирования ($K = 4$) [17].

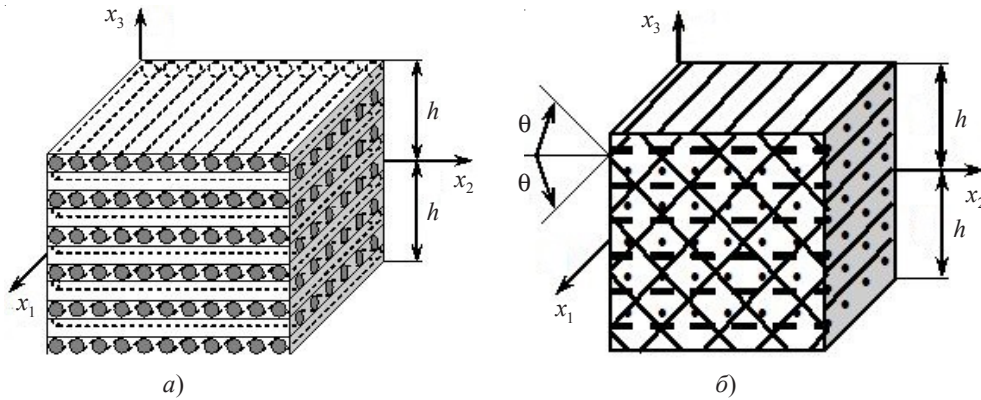


Рис. 1. Элемент КМ-пластины: а) с ортогональной 2D-структурой армирования; б) с пространственной 4D-структурой армирования

С каждым k -м семейством арматуры свяжем локальную прямоугольную систему координат $x_i^{(k)}$, причем ось $x_1^{(k)}$, направленная вдоль волокна, определяется углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис. 2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1, 3}$) вычисляются по формулам (2.12) из [11].

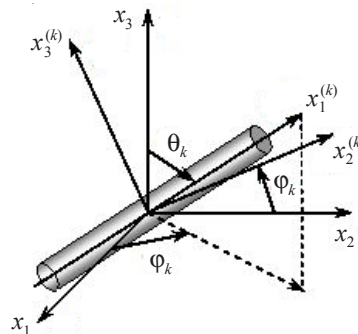


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с арматурой k -го семейства

В статье [11] показано, что при упруговязкопластическом деформировании компонентов композиции явную численную схему «крест» при использовании теории Редди для изгибаемых пластин можно разработать только для частных, но практически важных случаев пространственного армирования и нагружения КМ-конструкций. А именно: на лицевых плоскостях внешними касательными силами можно пренебречь; структура армирования должна быть такой, что при наличии некоторого k -го наклонного ($0 < \theta_k < \pi/2$) семейства волокон обязательно найдется l -е наклонное семейство волокон из того же материала с параметрами армирования $\theta_l = \pi - \theta_k$, $\varphi_l = \varphi_k$ и $\omega_l = \omega_k$, $1 \leq k, l \leq K$, $l \neq k$ (см. рис. 2). Структуры армирования, обладающие такими свойствами, часто встречаются в приложениях [17]. Так, к ним относится

структура, приведенная на рис. 1б, а также ортогональная структура 3D-армирования [18, 19]. Используя эти обстоятельства, далее предполагаем, что касательные нагрузки на лицевых плоскостях пластины отсутствуют, а структура армирования отвечает указанным выше свойствам. Согласно [8], осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек гибкой КМ-пластины U_i в рамках уточненной теории изгиба аппроксимируем так:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = (h^2 - x_3^2) \sum_{m=0}^M \frac{x_3^m}{h^2} \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2;$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (2)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, |x_3| \leq h, t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

где u_i – перемещения точек срединной плоскости ($x_3 = 0$) в тангенциальных направлениях x_i ; w – прогиб; t_0 – начальный момент времени t ; ∂_i – оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 2$); M – целое число, которое задает количество слагаемых, удерживаемых в частичных суммах по степеням поперечной координаты x_3 ; Ω – область, занимаемая пластиной в плане. При $M = 0$ из (1) и (2) следуют кинематические соотношения теории Редди [1, 11]. В выражениях (1) и (2) неизвестны функции w , u_i , $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$), зависящие от времени t и двух пространственных переменных x_i ($i = 1, 2$).

Поскольку моделируется механическое поведение КМ-пластины как гибкой тонкостенной системы, то нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для практических приложений точностью можно линейно аппроксимировать по координате x_3 [11, 12]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, |x_3| \leq h, t \geq t_0,$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – известные из силовых граничных условий нормальные напряжения на нижней (–) и верхней (+) лицевых плоскостях пластины.

Приведенные двумерные уравнения динамического равновесия элемента гибкой пластины с учетом соотношений (2) и (3) имеют вид [8]:

$$\rho \ddot{u}_i^{(l)} = \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w) - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w - h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i w,$$

$$2h \rho \ddot{w} = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad (4)$$

$$i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0,$$

где

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\
u_s^{(l)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h U_s(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) = l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \\
&= \frac{h^l}{2} [(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)})(1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)})(1 + (-1)^l)], \\
i, j &= \overline{1, 3}, \quad s = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1;
\end{aligned} \tag{5}$$

ρ_0, ρ_k – объемные плотности связующего и волокон k -го семейства; σ_{ij} – осредненные напряжения в композиции пластины; точка – производная по времени t . Объемные нагрузки в (4) не учитываются.

Как и в [11], предполагаем, что материалы компонентов композиции пластины изотропны, а их упруговязкопластическое деформирование описывается механической моделью, предложенной в [10]. Согласно результатам из [11], в данный момент времени t определяющее уравнение для КМ можно записать в матричной форме

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \tag{6}$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}, \dot{\sigma}_{12}\}^T, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, 2\dot{\varepsilon}_{23}, 2\dot{\varepsilon}_{31}, 2\dot{\varepsilon}_{12}\}^T, \tag{7}$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – шестикомпонентные векторы-столбцы, элементы которых – скорости осредненных напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ в композиции; шестикомпонентный вектор-столбец \mathbf{p} и 6×6 -матрица \mathbf{B} определяются по матричным формулам (2.17) из [11], их элементы зависят от текущего упруговязкопластического состояния и механических характеристик компонентов композиции, а также от параметров армирования (углов θ_k, φ_k и плотностей ω_k армирования); индекс T – операция транспонирования.

Для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи следует задать начальные и граничные условия. На той части кромки пластины (обозначим ее Γ_σ), где заданы внешние силы, в рамках используемой уточненной теории выполняются граничные условия в силовых факторах (5) [8]:

$$\begin{aligned}
n_1 (M_{i1}^{(l)} - M_{i3}^{(l)} \partial_i w) + n_2 (M_{i2}^{(l)} - M_{23}^{(l)} \partial_i w) &= P_i^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\
\sum_{j=1}^2 n_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 M_{jl}^{(0)} \partial_l w \right) &= P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad t \geq t_0;
\end{aligned} \tag{8}$$

на части кромки (обозначим ее Γ_u), где заданы перемещения, необходимо использовать граничные условия для кинематических переменных, введенных в (5) [8]:

$$w(t, \mathbf{x}) = U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad j = \overline{1, 3}, \quad i = 1, 2, \\
n_1 &= \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma;
\end{aligned} \tag{10}$$

p_j – внешние распределенные нагрузки, заданные на торцевой поверхности пластины; U_{*3} – прогиб, заданный на Γ_u ; U_{*i} – заданные тангенциальные перемещения на торцевой поверхности; γ – угол, определяющий направление внешней нормали к контуру $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$, который ограничивает область Ω .

При $t = t_0$ нужно использовать начальные условия (см. (2) и (5)) [8]:

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \\ \dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) &= v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1; \quad (12)$$

U_{0j}, V_{0j} ($j = \overline{1, 3}$) – заданные в начальный момент времени t_0 перемещения и скорости точек КМ-пластины.

Между кинематическими переменными $w, u_i, \varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$), использованными в выражениях (1) и (2), и обобщенными кинематическими переменными $u_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq l \leq M + 1$), которые введены соотношениями (5), существует матричная связь (см. (14) в [8]), не зависящая от решения исследуемой задачи.

2. Метод расчета

Для численного решения рассматриваемой задачи используем пошаговый алгоритм [3, 7, 8, 11, 15], то есть неизвестные функции будем вычислять в моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени. Предполагаем, что в моменты времени t_m уже определены значения следующих функций [8, 11]:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_s^{(l)}(\mathbf{x}) = u_s^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}(\mathbf{r}) &= \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\ \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &= \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \chi^{(k)}(\mathbf{r}) = \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad s = 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n - 1, n, \end{aligned} \quad (13)$$

$$0 \leq l \leq M + 1, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h,$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций в k -м материале композиции ($k = 0$ – связующая матрица, $k \geq 1$ – волокна k -го семейства); $\chi^{(k)}$ – параметр Одквиста того же компонента. Согласно формулам (5) при учете (13), в момент времени t_n можно вычислить все силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, которые входят в уравнения движения (4), и силовые граничные условия (8).

За исключением случаев, оговоренных формулами (2.8) и (2.9) в [11], производные по времени t аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ [7, 8, 11], что позволяет построить явную схему численного интегрирования исследуемой задачи. Заменяя в левых частях уравнений (4) вторые производные по t конечно-разностными аналогами, с учетом обозначений, аналогичных (13), получим

$$\frac{2h\rho}{\tau^2} \begin{pmatrix} n+1 & n & n-1 \\ w & -2w & w \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)},$$

$$\frac{\rho}{\tau^2} \left(u_i^{(n+1)} - 2u_i^{(n)} + u_i^{(n-1)} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(0)} \partial_i w \right) - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Так как правые части в уравнениях (14) известны, добавив к ним соответствующие граничные условия (см. (8)–(10)), по явной схеме определяем значения функций $w, u_i^{(l)}$ ($0 \leq l \leq M+1$) в следующий момент времени t_{n+1} . Затем по формулам (14) из [8] вычисляем значения функций $u_i, \varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$), после чего, используя выражения (1), получаем значения осредненных деформаций композиции пластины ε_{ij} . Далее численное решение рассматриваемой задачи с учетом (6) и (7) строится так же, как и в [8, 11].

Согласно структуре левых частей в равенствах (14), для начала расчета по используемой численной схеме нужно знать значения функций w и $u_i^{(l)}$, которые известны из начальных условий (11) с учетом (12), а также функций w и $u_i^{(l)}$ (см. (14) при $n = 1$), которые рассчитываются по формуле Тейлора с точностью τ^3 при использовании начальных условий (11) и уравнений движения (4) в момент времени $t = t_0$ [8].

Необходимые условия устойчивости разработанной схемы типа «крест» следуют из критерия Куранта – Фридрикса – Леви и для однородных тонкостенных конструкций приведены в [7]. Если эти условия выполняются для каждого компонента композиции, то они с запасом выполняются и для КМ-пластины.

3. Обсуждение результатов расчетов

Исследуем, как и в [11], упруговязкопластическое поведение прямоугольных КМ-пластин ($\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b; a = 3b, b = 10$ см, $2h = 2$ см), которые жестко закреплены по всей кромке $\Gamma = \Gamma_u$ (см. (9), (10) при $U_{*i} = 0$) и в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ покоятся в естественном состоянии (см. (11), (12) при $U_{0i} = 0, V_{0i} = 0, i = \overline{1, 3}$). Конструкции снизу нагружаются давлением $p(t)$, которое соответствует действию воздушной взрывной волны [15]:

$$\sigma_{33}^{(+)} = 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} = p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (15)$$

$$\alpha = -\frac{\ln 0,01}{t_{\min} - t_{\max}} > 0, \quad p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}, \quad t_{\min} \gg t_{\max}.$$

Смысл величин p_{\max}, t_{\max} и t_{\min} в выражениях (15) очевиден и подробно описан в [8] (см. там формулы (18) и (19)). Согласно экспериментальным данным [15], в расчетах примем $t_{\max} = 0,1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс.

Пластины изготовлены из эпоксисвязующего [20] и армированы стеклянными волокнами [16] (стеклопластик) или из магниевое сплава ВМ65 [9] и усилены стальной проволокой У8А [16] (металлокомпозит). Упругопластическое деформирование материалов композиций при активном нагружении и постоянной скорости деформации описывается билинейной диаграммой растяжения-сжатия:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где σ, ε – осевое напряжение и линейная деформация; $E^{(k)}, E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$ – модули Юнга и линейного упрочнения k -го компонента композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$ – условный предел текучести того же материала при значении скорости деформации $\dot{\varepsilon} = \text{const}$. Физико-механические характеристики материалов композиций приведены в таблице 1, где ν – коэффициент Пуассона. Аппроксимации зависимостей $\sigma_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$ и $E_s^{(k)}(\dot{\varepsilon})$ по данным, представленным в таблице 1, подробно описаны в [11].

Таблица 1

Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции [9, 16, 20]

Материал	ρ , кг/м ³	ν	E , ГПа	$\dot{\varepsilon}$, с ⁻¹	σ_s , МПа	E_s , ГПа
Эпоксидная смола	1210	0,33	2,8	$5 \cdot 10^{-4}$	20	1,114
				104,0	22	1,238
Стекланные волокна	2520	0,25	86,8	$5 \cdot 10^{-4}$	4500	6,230
				104,0	4600	6,314
Магнийевый сплав ВМ65 (Mg)	1800	0,33	43,0	$5 \cdot 10^{-4}$	267	0,379
				0,417	306	0,589
				104,0	385	1,010
Стальная проволока У8А	7800	0,31	210,0	$5 \cdot 10^{-4}$	3968	6,973
				104,0	4100	7,035

Рассматриваются два типа однородных ($\omega_k = \text{const}, \theta_k = \text{const}$ и $\varphi_k = \text{const}$) структур армирования: 1) плоско-ортогональное 2D-армирование (см. рис. 1а), когда два ($K = 2$) семейства волокон уложены по направлениям Ox_1 и Ox_2 с плотностями армирования $\omega_1 = \omega_2 = 0,2$; 2) пространственное 4D-армирование (см. рис. 1б), когда первое и второе семейства уложены по тем же направлениям Ox_1 и Ox_2 , а третье и четвертое – наклонно по направлениям, задаваемым углами (см. рис. 2): $\theta_3 = \pi/4, \theta_4 = 3\pi/4, \varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (на рис. 1б угол $\theta = \pi/4$). Плотности армирования во втором случае имеют значения: $\omega_1 = 0,1, \omega_2 = 0,2$ и $\omega_3 = \omega_4 = 0,05$. В обеих структурах армирования расход волокон одинаков.

Для обеспечения устойчивости используемой численной схемы «крест» дискретизация задачи проводилась так же, как и в [11]. Следуя [11], для стеклопластиковых пластин примем $p_{\text{max}} = 6$ МПа (см. (15)), а для металлокомпозитных конструкций $p_{\text{max}} = 50$ МПа. Расчеты, проведенные в [11] на базе теории Редди, показали, что учет чувствительности компонентов рассматриваемых композиций к скорости их деформирования приводит к неприемлемо большому завышению интенсивности деформаций этих материалов по сравнению с расчетами, выполненными с учетом этой чувствительности. В случае стеклопластиковых пластин завышенные значения имеют и максимальные прогибы. В связи с этим далее обсуждаются результаты расчетов, полученные с учетом указанной чувствительности.

На рис. 3 изображены осцилляции прогибов в центральных точках ($w_0(t) = w(t, 0, 0)$) пластин из стеклопластиков (рис. 3а) и из металлокомпозитов (рис. 3б), а на рис. 4 и 5 – осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций компонентов композиций $\varepsilon_m^{(k)}(\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_m^{(k)}(t, \mathbf{r}), |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, |x_3| \leq h)$ стеклопластиковых конструкций (рис. 4) и Mg-У8А-пластин (рис. 5).

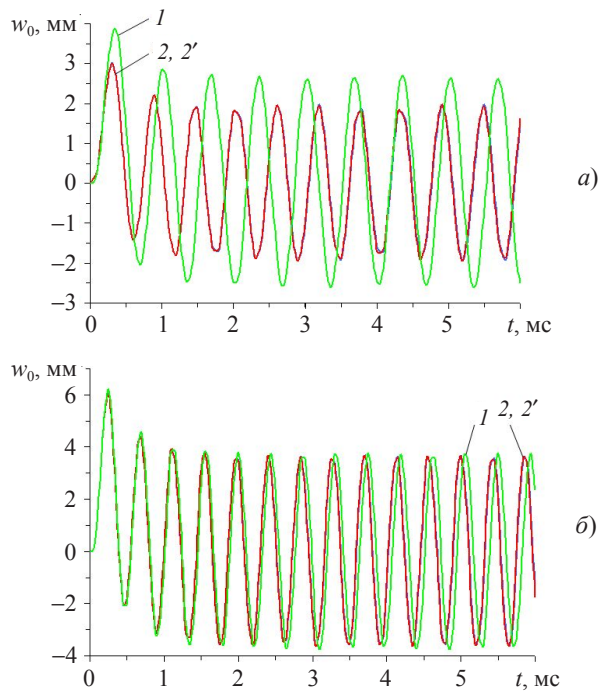


Рис. 3. Осцилляции прогиба в центральных точках армированных пластин: а) из стеклопластиковой композиции; б) из металлокомпозиции

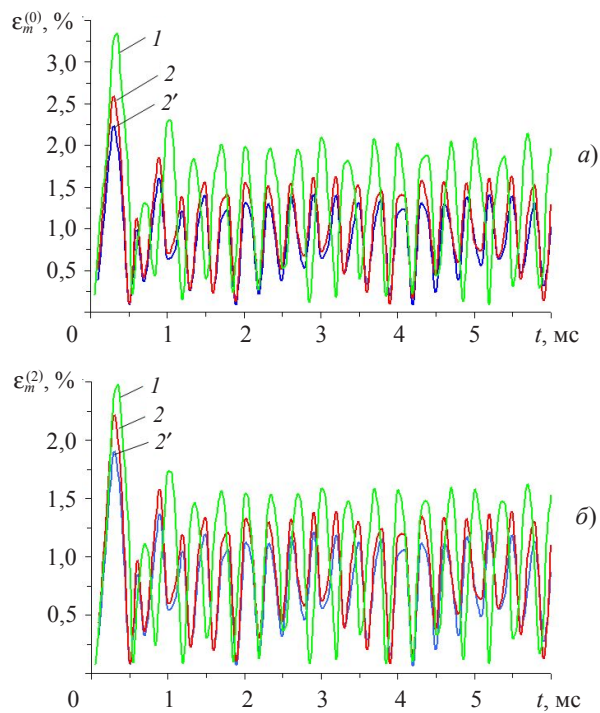


Рис. 4. Осцилляции наибольшего значения интенсивности деформаций компонентов композиции стеклопластиковых пластин: а) связующее; б) арматура второго семейства

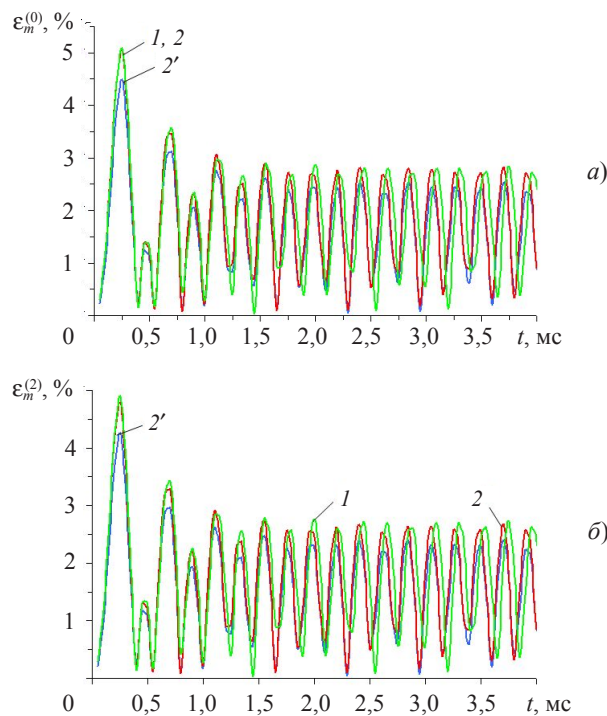


Рис. 5. Осцилляции наибольшего значения интенсивности деформаций компонентов металлокомпозитных пластин: а) связующее; б) арматура второго семейства

На рис. 4а и 5а приведены зависимости $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ для связующего материала ($k=0$), а на рис. 4б и 5б – зависимости $\varepsilon_m^{(2)}(t)$ для арматуры второго семейства ($k=2$), которое испытывает наиболее интенсивное деформирование.

Номера кривых на рис. 3–5 соответствуют номерам структур армирования. Кривые, номера которых помечены штрихом, рассчитаны по теории Редди ($M=0$), остальные кривые – по уточненной теории изгиба при $M=7$ (см. (1) и (2)).

Сравнение кривых 2 и 2' на рис. 3 показывает, что для рассматриваемых композиций с 4D-структурами армирования расчеты прогиба по обеим обсуждаемым теориям практически не различаются. Однако сопоставление этих же кривых на рис. 4 и 5 свидетельствует о том, что расчет по теории Редди (кривые 2') занижает максимальные значения $\varepsilon_{\max}^{(k)} = \max_{t \geq 0} \varepsilon_m^{(k)}(t)$ ($k=0, 2$) для стеклопластиковых пластин примерно на 14%, а для металлокомпозитных конструкций на 12% по сравнению с расчетами, выполненными по уточненной теории (кривые 2).

Поведение кривых 1 и 2 на рис. 3 демонстрирует, что замена традиционной 2D-структуры армирования (см. рис. 1а) на пространственную 4D-структуру (см. рис. 1б) позволяет уменьшить максимальный прогиб стеклопластиковой пластины на 22,5% (см. рис. 3а) и практически не приводит к уменьшению этой величины для металлокомпозитной пластины (см. рис. 3б). Сравнение этих же кривых на рис. 4 и 5 показывает, что такая замена структур армирования позволяет уменьшить величины $\varepsilon_{\max}^{(0)}$ и $\varepsilon_{\max}^{(2)}$ на 22,5% и 10,5% для конструкций из стеклопластиков (см. рис. 4а и 4б соответственно) и практически не приводит к уменьшению этих же величин для металлокомпозитных пластин. Последнее обстоятельство объясняется

тем, что Mg-У8А-композиция обладает слабо выраженной анизотропией ($E^{(k)}/E^{(0)} \approx 4,88$), то есть связующее является весьма жестким, и поэтому удовлетворительно сопротивляется поперечным сдвигам даже в неблагоприятном случае плоско-перекрестного армирования (см. рис. 1). Стеклопластиковые композиции обладают сильно выраженной анизотропией ($E^{(k)}/E^{(0)} \approx 31, 1 \leq k \leq K$), поэтому при 2D-структуре армирования изгибаемая пластина плохо сопротивляется поперечным сдвигам. Наличие в 4D-структуре армирования (см. рис. 1б) наклонных семейств волокон позволяет существенно увеличить сопротивление стеклопластиковых конструкций этим сдвигам, следствием чего и является значительное уменьшение максимального значения прогиба и величин $\epsilon_{\max}^{(0)}, \epsilon_{\max}^{(2)}$ при указанной замене структур армирования.

Выше рассматривались пластины с относительной толщиной 1/10. Дополнительные расчеты, проведенные для стеклопластиковых конструкций с размерами в плане $b = 3a, b = 50$ см при нагрузке $p_{\max} = 3$ МПа, показали, что для относительно тонких пластин ($2h/2b = 1/50$) с 4D-структурой армирования использование теории Редди приводит к занижению величин $\epsilon_{\max}^{(0)}$ и $\epsilon_{\max}^{(2)}$ всего на 1,8% и 2,5% соответственно по сравнению с уточненной теорией ($M = 7$). Максимальные расчетные значения прогиба, полученные по этим теориям, практически совпадают. Согласно расчетам по уточненной теории, замена 2D-структуры армирования в таких конструкциях на 4D-структуру позволяет уменьшить величину максимального прогиба всего на 1,8%, а величину $\epsilon_{\max}^{(2)}$ – на 5%. При дальнейшем уменьшении относительной толщины пластин разность решений, полученных по теории Редди и уточненной теории, становится еще меньше, а замена плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру – неэффективной.

Заключение

Разработанная уточненная модель упруговязкопластического деформирования армированных пластин позволяет более точно, чем традиционная неклассическая теория Редди, рассчитывать неупругое поведение таких конструкций при учете чувствительности их компонентов композиции к скорости деформирования в случаях динамического нагружения.

Проведенные динамические расчеты показали, что для КМ-пластин с относительной толщиной порядка 1/10 расчет по теории Редди занижает максимальные значения интенсивности деформаций компонентов композиции на 12–14% как для стеклопластиковых, так и для металлокомпозитных конструкций. Для пластин с относительной толщиной порядка 1/50 различие решений, полученных по этим теориям, становится пренебрежимо малым. Дополнительные расчеты свидетельствуют о том, что при квазистатическом нагружении (например, при задании в (15) $t_{\max} = 150$ мс и $t_{\min} = 300$ мс) неупруго деформируемых КМ-пластин теория Редди вполне приемлема как для относительно тонких, так и относительно толстых конструкций. Таким образом, теория Редди может обоснованно применяться в случаях линейно-упругого деформирования КМ-пластин любой относительной толщины [13, 14], их упругопластического деформирования при квазистатическом нагружении, а также и при динамическом упруговязкопластическом деформировании тонких армированных конструкций (с относительной толщиной 1/20 и менее).

Для относительно толстых неупруго деформируемых стеклопластиковых конструкций (с относительной толщиной порядка 1/10) замена традиционной плоско-

перекрестной структуры армирования (см. рис. 1а) на пространственную структуру (см. рис. 1б) с сохранением общего расхода волокон позволяет уменьшить максимальный прогиб более чем на 20%, а максимум интенсивности деформаций компонентов композиции – на 11–23%. В случаях относительно тонких стеклопластиковых пластин (с относительной толщиной порядка 1/50 и менее) такая замена структур армирования становится малоэффективной. Для металлокомпозитных конструкций любой относительной толщины указанная замена структур армирования неэффективна. Связующее в таких композициях является «жестким» и поэтому достаточно хорошо сопротивляется поперечным сдвигам даже при плоско-перекрестном армировании.

Список литературы

1. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
2. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction. *Progress in Aerospace Sciences*. 2005. Vol. 41. No 2. P. 143–151.
3. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011. Vol. 46. Iss. 5. P. 807–817. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011.
4. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. 686 p. <https://doi.org/10.1201/b19626>.
5. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. 412 p.
6. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андриюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 406 с.
7. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
8. Янковский А.П. Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пологих оболочек. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №4. С. 462–474. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-462-474.
9. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*. Ред. И.И. Гольденблат. М.: Машиностроение, 1965. 566 с.
10. Игумнов Л.А., Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. Модель упругопластического течения при переменной скорости деформирования. *Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. Механика*. 2013. №1 (3). С. 120–129.
11. Янковский А.П. Моделирование упругопластического изгиба пространственно-армированных пластин при учете чувствительности компонентов композиции к изменению скорости деформирования. *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83. №4. С. 660–686. DOI: 10.1134/S0032823519040155.
12. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
13. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания*. М.: Наука, 1987. 360 с.
14. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. *Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания*. Новосибирск: Наука, 2001. 287 с.
15. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers and Structures*. 1987. Vol. 26. No 1/2. P. 1–15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
16. *Композиционные материалы: Справочник*. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
17. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник*. Ред. Ю.М. Тарнопольский, И.Г. Жигун, В.А. Поляков. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.

18. Жигун И.Г., Душин М.И., Поляков В.А., Якушин В.А. Композитные материалы, армированные системой трех прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение. *Механика полимеров*. 1973. №6. С. 1011–1018.

19. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites. *Mechanics of Composite Materials*. 2009. Vol. 45. No 2. P. 241–254. DOI: 10.1007/s11029-009-9072-y.

20. *Справочник по композитным материалам*. В 2 кн. Кн. 1. Пер. с англ. Ред. Дж. Любин. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.

References

1. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton. CRC Press. 2004. 831 p.

2. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction. *Prog. Aerosp. Sci.* 2005. Vol. 41. No 2. P. 143–151.

3. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *Int. J. Nonlin. Mech.* 2011. Vol. 46. Iss. 5. P. 807–817. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011.

4. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton. CRC Press Taylor & Francis Group. 2012. 686 p. <https://doi.org/10.1201/b19626>.

5. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam. Elsevier. 2013. 412 p.

6. Solomonov Yu.S., Georgievskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2014. 408 p. (In Russian).

7. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy* [Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs]. Nizhny Novgorod. NNGU Publ. 2002. 400 p. (In Russian).

8. Yankovskii A.P. Utochnennaya model vyazkouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh pologikh obolochek [Refined model visco-elastic-plastic deformation of reinforced flexible shallow shells]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2019. Vol. 81. No 4. P. 462–474. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-462-474. (In Russian).

9. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Goldenblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschet na prochnost, ustoychivost i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur* [Calculations on Strength, Stability and Fluctuations in Conditions of High Temperatures]. Ed. I.I. Goldenblat. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1965. 567 p. (In Russian).

10. Igumnov L.A., Karimbayev T.D., Mamayev SH. Model uprugoplasticheskogo techeniya pri peremennoy skorosti deformirovaniya [The model elastic-plastic flow at a strain variable rate]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika* [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod. Series Mechanics]. 2013. No 1 (3). P. 120–129 (In Russian).

11. Yankovskii A.P. Modeling the elasto-visco-plastic bending of spatially reinforced plates accounting for the strain-rate sensitivity of composition components. *J. Appl. Math. Mech.* 2019. Vol. 54. P. 832–852. DOI: 10.3103/S0025654419050200.

12. Bogdanovich A.E. *Nelineynye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells]. Riga. Zinatne Publ. 1987. 295 p. (In Russian).

13. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost, ustoychivost i kolebaniya* [The Theory of Anisotropic Plates. Strength, Stability and Fluctuations]. Moscow. Nauka Publ. 1987. 360 p. (In Russian).

14. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogosloynnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoychivost i kolebaniya* [Multilayered Anisotropic Shells and Plates. Bending, Stability and Vibration]. Novosibirsk. Nauka Publ. 2001. 287 p. (In Russian).

15. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Comput. Struct.* 1987. Vol. 26. No 1/2. P. 1–15.

16. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik* [Composite Materials. Reference Book]. Ed. D.M. Karpinos. Kiev. Naukova dumka Publ. 1985. 592 p. (In Russian).

17. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially Reinforced Composite Materials. Reference Book]*. Eds. Yu.M. Tarnopolskii, I.G. Zhigun, V.A. Poliakov. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1987. 224 p. (In Russian).

18. Zhigun I.G., Dushin M.I., Polyakov V.A., Yakushin V.A. Composites reinforced with a system of three straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study. *Polymer Mech.* 1973. Vol. 9. No 6. P. 895–900.

19. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites. *Mech. Compos. Mater.* 2009. Vol. 45. No 2. P. 241–254. DOI: 10.1007/s11029-009-9072-y.

20. *Handbook of Composites*. Ed. G. Lubin. New York. Van Nostrand Reinhold Company Inc. 1982. 786 p.

MODELING OF THE ELASTIC-VISCOPLASTIC BEHAVIOR OF REINFORCED PLATES WITHIN THE REFINED BENDING THEORY

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the SB RAS, Novosibirsk,
Russian Federation*

The dynamic problem of elastic-viscoplastic deformation of flexible plates with spatial reinforcement structures is formulated. The plastic behavior of the components of the composition is described by equations of flow theory with isotropic hardening, taking into account the sensitivity of these materials to the rate of their deformation. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The relations used, with varying degrees of accuracy, describe the mechanical state of the bent plates and allow for the possible weakened resistance of the reinforced constructions to transverse shears. In a first approximation, the equations used, the boundary and initial conditions are reduced to the equalities of the widely used non-classical Reddy theory. To solve the stated nonlinear initial-boundary-value problem, a step-by-step algorithm is used, based on the use of an explicit numerical of the “cross” type scheme. The elastic-viscoplastic dynamic behavior of rectangular composite plates of different relative thicknesses under the action of a load corresponding to excess pressure in an air blast wave is investigated. Fiberglass-plastic and metal composite structures are considered. It is shown that for composite plates with a relative thickness of the order of 0.1, the calculation by the Reddy theory underestimates the maximum values of the strain intensity of the components of the composition by more than 12% compared with the calculation by the refined theory. A fairly simple Reddy theory is quite acceptable for calculating relatively thin plates. It is shown that for fiberglass-plastic plates with a relative thickness of the order of 0.1, replacing the traditional plane-cross reinforcement structure with the spatial structure of the reinforcement reduces the maximum deflection by more than 20%, and the greatest value of the strain intensity of the components of the composition is reduced by 10–20% or more. For metal-composite plates of any thickness and for fiberglass-plastic plates having a small relative thickness, the positive effect of from such a replacement of the reinforcement structures is practically not observed.

Keywords: flexible plates, flat-cross reinforcement, spatial reinforcement, elastic-viscoplastic deformation, sensitivity to strain rate, Reddy theory, refined bending theories, explosive loads, numerical “cross” type scheme.