

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-189-200

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ\***

© 2020 г.

**Фирсанов Вал.В.<sup>1</sup>, Фам В.Т.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Вьетнамский государственный технический университет  
им. Ле Куи Дона, Ханой, Вьетнам*

*pvthien88@gmail.com*

*Поступила в редакцию 16.03.2020*

Представлены результаты исследования напряженно-деформированного состояния конической оболочки переменной толщины на основе неклассической теории. Искомые перемещения оболочки аппроксимируются полиномами по нормальной координате к срединной поверхности на две степени выше по отношению к классической теории типа Кирхгофа – Лява. При разработке теории в качестве уравнений состояния оболочки применяются трехмерные уравнения теории упругости, а также вариационный принцип Лагранжа. В результате минимизации уточненного значения полной энергии оболочки построена математическая модель, представляющая собой систему дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами и соответствующие граничные условия. Рассмотрены два случая: оболочка находится под действием симметричной и несимметричной нагрузок. Преобразование двумерных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется с помощью тригонометрических рядов по окружной координате.

Для решения сформулированной краевой задачи применяются методы конечных разностей и матричной прогонки. Расчеты проведены с помощью компьютерной программы. После определения перемещения деформации оболочки и тангенциальные напряжения находятся из геометрических и физических уравнений, а поперечные напряжения – из уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

В качестве примера рассматривается коническая оболочка, жестко зашпеленная на двух краях, с несимметрично изменяющейся толщиной. Сравниваются результаты расчетов напряженно-деформированного состояния, полученные по уточненной и классической теориям. Показан существенный вклад дополнительных напряжений в краевой зоне в общее напряженное состояние оболочки. Полученные результаты могут быть использованы при расчетах и испытаниях на прочность и долговечность машиностроительных объектов различного назначения.

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №17-08-00849).

*Ключевые слова:* коническая оболочка, переменная толщина, аппроксимирующие полиномы, вариационный принцип Лагранжа, уточненная теория, напряженное состояние «погранслои», поперечные нормальные напряжения.

## **Введение**

В настоящее время многие элементы машиностроительных конструкций, в том числе авиационных и ракетно-космических изделий, оформляются в виде оболочек вращения переменной толщины. Существующие методы расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек базируются на результатах классической теории типа Кирхгофа – Лява [1, 2]. В основу этой теории была положена гипотеза о сохранении нормального элемента, которая позволила привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной.

Чтобы устранить недостатки классической теории, Е. Рейсснер [3] предложил теорию сдвиговых деформаций первого порядка (FSDT). Поперечные отрезки прямых линий после деформации остаются прямыми, но не будут нормальными к срединной поверхности. Обширные исследования в этой области выполнены авторами работ [4–7] и другими исследователями. Теория FSDT требует использовать поправочные коэффициенты сдвига, от которых зависит точность результатов расчета. Далее Н. Редди использовал теорию сдвиговых деформаций третьего порядка для исследований слоистых композитных пластин и оболочек [8]. Однако предположения Редди не удовлетворяют естественным граничным условиям на их поверхностях.

Одним из возможных путей создания уточненного варианта теории оболочек, свободной от гипотез Кирхгофа – Лява, является метод прямого асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости [9]. Асимптотические методы являются основными методами преобразования уравнений классической теории в исследованиях Л.А. Агаловяна [10, 11], К. Фридрихса [12], А. Грина [13], Ю.И. Димитриенко [14] и др. При решении задач для пластин и оболочек установлено Вал.В. Фирсановым [15, 16], что дополнительное НДС вблизи защемленного края вносит существенный вклад в общее напряженное состояние.

Другой подход, представленный в [17, 18], основан на аппроксимации искомых перемещений оболочки в виде полиномиальных рядов по нормальной к срединной поверхности координате. На основе этого подхода в публикациях [19–21] построена уточненная теория расчета НДС для цилиндрических и сферических оболочек, согласно которой дополнительные локальные напряжения оказываются одного порядка с максимальными напряжениями основного НДС. В настоящей статье в рамках указанного подхода исследуется НДС конической оболочки переменной толщины.

### **1. Основные уравнения конической оболочки на основе уточненной теории**

Рассматривается коническая оболочка переменной толщины, отнесенная к ортогональной системе криволинейных координат  $x, \varphi, \xi$  (рис. 1). Здесь  $x$  представляет собой расстояние по образующей от вершины конуса,  $\varphi$  – угол между некоторой аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета, а ось  $\xi$  направлена по внешней нормали к срединной поверхности. Обозначим  $A_1, A_2$  – коэффициенты первой квадратичной формы;  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны оболочки,  $\theta$  – половина угла конусности. Имеем:

$$A_1 = 1, \quad A_2 = x \sin \theta, \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = \frac{x}{\operatorname{ctg} \theta}.$$

Переменная толщина оболочки определяется двумя функциями  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$ :

$$h = h_1(x) + h_2(x).$$

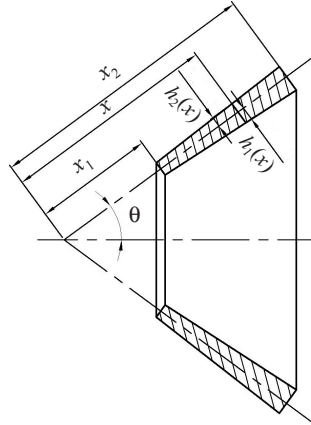


Рис. 1. Коническая оболочка переменной толщины

Полагаем, что на боковой и торцевых поверхностях конической оболочки заданы граничные условия:

$$\sigma_{i3}(+h_2(x)) = q_{i3}^+, \quad \sigma_{i3}(-h_1(x)) = q_{i3}^-, \quad \sigma_{ji} = q_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2,$$

где  $q_{i3}^+$ ,  $q_{i3}^-$ ,  $q_{ij}$  – внешние распределенные нагрузки.

Представим искомые упругие перемещения в виде:

$$\begin{aligned} U_1(x, \varphi, \xi) &= \sum_{k=0}^3 u_k(x, \varphi) \frac{\xi^k}{k!}, \\ U_2(x, \varphi, \xi) &= \sum_{k=0}^3 v_k(x, \varphi) \frac{\xi^k}{k!}, \\ U_3(x, \varphi, \xi) &= \sum_{k=0}^2 w_k(x, \varphi) \frac{\xi^k}{k!}, \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют осям  $x$ ,  $\varphi$  и  $\xi$ . Для варианта классической теории типа Кирхгофа – Лява в формулах (1) отбрасываются по два последних слагаемых.

Геометрические соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} U_2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_3, \\ e_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} U_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_3, \\ e_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial \xi}, \quad e_{12} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} U_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x} U_2 \right], \\ e_{13} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial U_3}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \xi} U_1, \quad e_{23} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_2}{\partial \xi} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \xi} U_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты Ламе  $H_k$  ( $k = \overline{1, 3}$ ) определяются формулами

$$H_i = A_i a_i, \quad H_3 = 1, \quad a_i = 1 + \frac{\xi}{R_i}, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Физические уравнения теории упругости принимаются в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= A_{11}e_{11} + A_{12}e_{22} + A_{13}e_{33}, & \sigma_{22} &= A_{21}e_{11} + A_{22}e_{22} + A_{23}e_{33}, & \sigma_{12} &= A_{44}e_{12}, \\ \sigma_{33} &= A_{31}e_{11} + A_{32}e_{22} + A_{33}e_{33}, & \sigma_{13} &= A_{55}e_{13}, & \sigma_{23} &= A_{66}e_{23}, \end{aligned} \quad (3)$$

где коэффициенты  $A_{ij}$  ( $i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 6}$ ) представляют собой упругие постоянные ортотропного материала пластины.

Подставляя разложения (1) в геометрические соотношения (2), находим деформации:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} \frac{v_k}{A_2} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!}, \\ e_{22} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_2}{\partial x} \frac{u_k}{A_1} \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!}, \\ e_{33} &= \sum_{k=0}^2 w_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}, \\ e_{12} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial \varphi} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x} v_k \right) \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} u_k \right) \frac{\xi^k}{k!}, \\ e_{13} &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_1 a_1} \frac{\partial w_k}{\partial x} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 u_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{u_k}{R_1 a_1} \frac{\xi^k}{k!}, \\ e_{23} &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_2 a_2} \frac{\partial w_k}{\partial \varphi} \frac{\xi^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 v_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{v_k}{R_2 a_2} \frac{\xi^k}{k!}. \end{aligned} \quad (4)$$

Внося последовательно деформации (4) в физические уравнения (3) и полученные выражения для напряжений в условии минимума полной энергии оболочки, после преобразований получим систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_2 M_1^{(k)})}{\partial x} + \frac{\partial(A_1 M_{12}^{(k)})}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial x} M_2^{(k)} + \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} M_{21}^{(k)} + A_1 A_2 \left( \frac{Q_1^{(k)}}{R_1} - T_1^{(k)} \right) + \\ + A_1 A_2 P_1^{(k)} = 0, \quad k = \overline{0, 3}, \\ \frac{\partial(A_1 M_2^{(k)})}{\partial \varphi} + \frac{\partial(A_2 M_{21}^{(k)})}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} M_1^{(k)} + \frac{\partial A_2}{\partial x} M_{12}^{(k)} + A_1 A_2 \left( \frac{Q_2^{(k)}}{R_2} - T_2^{(k)} \right) + \\ + A_1 A_2 P_2^{(k)} = 0, \quad k = \overline{0, 3}, \\ \frac{\partial(A_2 Q_1^{(k)})}{\partial x} + \frac{\partial(A_1 Q_2^{(k)})}{\partial \varphi} - A_1 A_2 \left( \frac{M_1^{(k)}}{R_1} + \frac{M_2^{(k)}}{R_2} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)} \right) = 0, \quad k = \overline{0, 2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь используются следующие обозначения обобщенных усилий:

$$\begin{aligned}
(M_1^{(k)}, M_{21}^{(k)}, Q_1^{(k)}) &= \int_{-h_1(x)}^{+h_2(x)} \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \\
(M_2^{(k)}, M_{12}^{(k)}, Q_2^{(k)}) &= \int_{-h_1(x)}^{+h_2(x)} \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}) \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \\
(T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, T_3^{(k)}) &= \int_{-h_1(x)}^{+h_2(x)} \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \frac{\xi^k}{k!} d\xi,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
P_1^{(k)} &= q_{13}^+ \left[ \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2(x))} - q_{13}^- \left[ \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1(x))}, \\
P_2^{(k)} &= q_{23}^+ \left[ \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2(x))} - q_{23}^- \left[ \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1(x))}, \\
P_3^{(k)} &= q_{33}^+ \left[ \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=+h_2(x))} - q_{33}^- \left[ \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) \frac{\xi^k}{k!} \right]_{(\xi=-h_1(x))}.
\end{aligned}$$

Подставляя компоненты напряжений из физических уравнений (3) в выражения для обобщенных усилий (6), а затем компоненты деформаций из соотношений (4), получим эквивалентные (5) уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^3 \left( K_{i0}^{u_m} + K_{i1}^{u_m} \frac{\partial}{\partial x} + K_{i11}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{i22}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left( K_{i2}^{v_k} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_{i12}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \right) v_k + \\
&\quad + \sum_{n=0}^2 \left( K_{i0}^{w_n} + K_{i1}^{w_n} \frac{\partial}{\partial x} \right) w_n = K_i^{q_{13}^+} q_{13}^+ - K_i^{q_{13}^-} q_{13}^-, \quad i = \overline{1, 4}, \\
&\sum_{m=0}^3 \left( K_{i2}^{u_m} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_{i12}^{u_m} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 \left( K_{i0}^{v_k} + K_{i1}^{v_k} \frac{\partial}{\partial x} + K_{i11}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{i22}^{v_k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v_k + \\
&\quad + \sum_{n=0}^2 K_{i2}^{w_n} \frac{\partial w_n}{\partial \varphi} = K_i^{q_{23}^+} q_{23}^+ - K_i^{q_{23}^-} q_{23}^-, \quad i = \overline{5, 8}, \\
&\sum_{m=0}^3 \left( K_{i0}^{u_m} + K_{i1}^{u_m} \frac{\partial}{\partial x} \right) u_m + \sum_{k=0}^3 K_{i2}^{v_k} \frac{\partial v_k}{\partial \varphi} + \sum_{n=0}^2 \left( K_{i0}^{w_n} + K_{i1}^{w_n} \frac{\partial}{\partial x} + K_{i11}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{i22}^{w_n} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w_n = \\
&\quad = K_i^{q_{33}^+} q_{33}^+ - K_i^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9, 11}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь переменные коэффициенты  $K_i$  представляют собой функции, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных материала оболочки и координаты  $x$ . Ввиду их многочисленности и громоздкости соответствующих формул здесь они не приводятся. В уравнении (7)  $u_m, v_k, w_n$  – коэффициенты разложений искомых перемещений в выражениях (1).

Соответствующие граничные условия на краях  $x = \text{const}$  представляются в виде:

$$\begin{aligned}
u_m &= u_m^* \vee M_1^{(m)} = M_1^{*(m)}, \quad v_k = v_k^* \vee M_{21}^{(k)} = M_{21}^{*(k)}, \quad m = \overline{0, 3}, \quad k = \overline{0, 3}, \\
w_n &= w_n^* \vee Q_1^{(n)} = Q_1^{*(n)}, \quad n = \overline{0, 2};
\end{aligned}$$

на краях  $\varphi = \text{const}$ :

$$u_m = u_m^* \vee M_2^{(m)} = M_2^{*(m)}, \quad v_k = v_k^* \vee M_{12}^{(k)} = M_{12}^{*(k)}, \quad m = \overline{0, 3}, \quad k = \overline{0, 3},$$

$$w_n = w_n^* \vee Q_2^{(n)} = Q_2^{*(n)}, \quad n = \overline{0, 2},$$

где  $u_m^*, v_k^*, w_n^*$  – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями;  $M_1^{*(m)}, M_2^{*(m)}, M_{12}^{*(k)}, M_{21}^{*(k)}, Q_1^{*(n)}, Q_2^{*(n)}$  – внешние силовые факторы, действующие по боковым и торцевым граням оболочки:

$$M_1^{*(m)} = \int_{-h_1(x)}^{+h_2(x)} a_2 q_{11} \frac{\xi^m}{m!} d\xi, \quad M_{21}^{*(k)} = \int_{-h_1(x)}^{+h_2(x)} a_2 q_{12} \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \quad Q_1^{*(n)} = \int_{-h_1(x)}^{+h_2(x)} a_2 q_{13} \frac{\xi^n}{n!} d\xi,$$

$$M_2^{*(m)} = \int_{-h_1(x)}^{+h_2(x)} a_1 q_{22} \frac{\xi^m}{m!} d\xi, \quad M_{12}^{*(k)} = \int_{-h_1(x)}^{+h_2(x)} a_1 q_{21} \frac{\xi^k}{k!} d\xi, \quad Q_2^{*(n)} = \int_{-h_1(x)}^{+h_2(x)} a_1 q_{23} \frac{\xi^n}{n!} d\xi.$$

## 2. Приведение двумерных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим два случая: оболочка находится под действием симметричной и несимметричной нагрузок.

В первом случае компоненты НДС оболочки не зависят от угла  $\varphi$  и перемещения в окружном направлении  $v_k = 0, k = \overline{0, 3}$ , что позволяет из (7) получить систему:

$$\sum_{m=0}^3 \left( K_{i0}^{u_m} + K_{i1}^{u_m} \frac{d}{dx} + K_{i11}^{u_m} \frac{d^2}{dx^2} \right) u_m + \sum_{n=0}^2 \left( K_{i0}^{w_n} + K_{i1}^{w_n} \frac{d}{dx} \right) w_n = 0, \quad i = \overline{1, 4},$$

$$\sum_{m=0}^3 \left( K_{i0}^{u_m} + K_{i1}^{u_m} \frac{d}{dx} \right) u_m + \sum_{n=0}^2 \left( K_{i0}^{w_n} + K_{i1}^{w_n} \frac{d}{dx} + K_{i11}^{w_n} \frac{d^2}{dx^2} \right) w_n =$$

$$= K_i^{q_{33}^+} q_{33}^+ - K_i^{q_{33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9, 11}.$$

Если оболочка находится под действием несимметричной нагрузки, приведем систему двумерных уравнений (7) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью тригонометрических рядов. Для этой цели представим внешние нагрузки и перемещения в виде:

$$q_{13}^\pm(x, \varphi) = \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)13}^\pm(x) \cos z\varphi,$$

$$q_{23}^\pm(x, \varphi) = \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)23}^\pm(x) \sin z\varphi,$$

$$q_{33}^\pm(x, \varphi) = \sum_{z=0}^{\infty} Q_{(z)33}^\pm(x) \cos z\varphi,$$

$$u_m(x, \varphi) = \sum_{z=0}^{\infty} U_{mz}(x) \cos z\varphi, \quad m = \overline{0, 3},$$

$$v_k(x, \varphi) = \sum_{z=0}^{\infty} V_{kz}(x) \sin z\varphi, \quad k = \overline{0, 3},$$

$$w_n(x, \varphi) = \sum_{z=0}^{\infty} W_{nz}(x) \cos z\varphi, \quad n = \overline{0, 2}.$$

Подставляя разложения (9) в систему (7) и сравнивая коэффициенты тригонометрических рядов в левых и правых частях, находим:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left( K_{i0}^{u_m} - z^2 K_{i22}^{u_m} + K_{i1}^{u_m} \frac{d}{dx} + K_{i11}^{u_m} \frac{d^2}{dx^2} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 \left( K_{i2}^{v_k} + K_{i12}^{v_k} \frac{d^2}{dx^2} \right) V_{kz} + \\
& \quad + \sum_{n=0}^2 \left( K_{i0}^{w_n} + K_{i1}^{w_n} \frac{d}{dx} \right) W_{nz} = K_i^{q_{i3}^+} Q_{(z)13}^+ - K_i^{q_{i3}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1, 4}, \\
& z \sum_{m=0}^3 \left( -K_{i2}^{u_m} - K_{i12}^{u_m} \frac{d}{dx} \right) U_{mz} + \sum_{k=0}^3 \left( K_{i0}^{v_k} - z^2 K_{i22}^{v_k} + K_{i1}^{v_k} \frac{d}{dx} + K_{i11}^{v_k} \frac{d^2}{dx^2} \right) V_{kz} - \\
& \quad - z \sum_{n=0}^2 K_{i2}^{w_n} W_{nz} = K_i^{q_{i23}^+} Q_{(z)23}^+ - K_i^{q_{i23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5, 8}, \\
& \sum_{m=0}^3 \left( K_{i0}^{u_m} + K_{i1}^{u_m} \frac{d}{dx} \right) U_{mz} + z \sum_{k=0}^3 K_{i2}^{v_k} V_{kz} + \sum_{n=0}^2 \left( K_{i0}^{w_n} - z^2 K_{i22}^{w_n} + K_{i1}^{w_n} \frac{d}{dx} + K_{i11}^{w_n} \frac{d^2}{dx^2} \right) W_{nz} = \\
& \quad = K_i^{q_{i33}^+} Q_{(z)33}^+ - K_i^{q_{i33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9, 11}, \quad z = \overline{0, 1, 2} \dots
\end{aligned} \tag{10}$$

Системы (8) и (10) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения. С помощью конечно-разностного метода преобразуем эти системы к линейным алгебраическим уравнениям. Производные 1-го и 2-го порядков аппроксимируем центральными разностями второго порядка точности, получим для (8) следующую систему:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left( \left( \frac{K_{i11}^{u_m}}{s^2} - \frac{K_{i1}^{u_m}}{2s} \right) u_{mz}^{j-1} + \left( \frac{-2K_{i11}^{u_m}}{s^2} + K_{i0}^{u_m} \right) u_{mz}^j + \left( \frac{K_{i11}^{u_m}}{s^2} + \frac{K_{i1}^{u_m}}{2s} \right) u_{mz}^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{n=0}^2 \left( \frac{-K_{i1}^{w_n}}{2s} w_n^{j-1} + K_{i0}^{w_n} w_n^j + \frac{K_{i1}^{w_n}}{2s} w_n^{j+1} \right) = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \\
& \quad \sum_{m=0}^3 \left( \frac{-K_{i1}^{u_m}}{2s} u_m^{j-1} + K_{i0}^{u_m} u_m^j + \frac{K_{i1}^{u_m}}{2s} u_m^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{n=0}^2 \left( \left( \frac{K_{i11}^{w_n}}{s^2} - \frac{K_{i1}^{w_n}}{2s} \right) w_n^{j-1} + \left( \frac{-2K_{i11}^{w_n}}{s^2} + K_{i0}^{w_n} \right) w_n^j + \left( \frac{K_{i11}^{w_n}}{s^2} + \frac{K_{i1}^{w_n}}{2s} \right) w_n^{j+1} \right) = \\
& \quad = K_i^{q_{i33}^+} q_{33}^+ - K_i^{q_{i33}^-} q_{33}^-, \quad i = \overline{9, 11}, \quad j = \overline{1, N-1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично система (10) приводится к виду:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left( \left( \frac{K_{i11}^{u_m}}{s^2} - \frac{K_{i1}^{u_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j-1} + \left( \frac{-2K_{i11}^{u_m}}{s^2} + K_{i0}^{u_m} - z^2 K_{i22}^{u_m} \right) U_{mz}^j + \left( \frac{K_{i11}^{u_m}}{s^2} + \frac{K_{i1}^{u_m}}{2s} \right) U_{mz}^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{k=0}^3 \left( \frac{-zK_{i12}^{v_k}}{2s} V_{kz}^{j-1} + zK_{i2}^{v_k} V_{kz}^j + \frac{zK_{i12}^{v_k}}{2s} V_{kz}^{j+1} \right) + \\
& \quad + \sum_{n=0}^2 \left( \frac{-K_{i1}^{w_n}}{2s} W_{nz}^{j-1} + K_{i0}^{w_n} W_{nz}^j + \frac{K_{i1}^{w_n}}{2s} W_{nz}^{j+1} \right) = K_i^{q_{i13}^+} Q_{(z)13}^+ - K_i^{q_{i13}^-} Q_{(z)13}^-, \quad i = \overline{1, 4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^3 \left( \frac{zK_{i12}^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} - zK_{i2}^{u_m} U_{mz}^j - \frac{zK_{i12}^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \\
& + \sum_{k=0}^3 \left( \left( \frac{K_{i11}^{v_m}}{s^2} - \frac{K_{i1}^{v_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j-1} + \left( \frac{-2K_{i11}^{v_m}}{s^2} + K_{i0}^{v_m} - z^2 K_{i22}^{v_m} \right) V_{kz}^j + \left( \frac{K_{i11}^{v_m}}{s^2} + \frac{K_{i1}^{v_m}}{2s} \right) V_{kz}^{j+1} \right) - \\
& - \sum_{n=0}^2 zK_{i2}^{w_n} W_{nz}^j = K_i^{q_{23}^+} Q_{(z)23}^+ - K_i^{q_{23}^-} Q_{(z)23}^-, \quad i = \overline{5, 8}, \\
& \sum_{m=0}^3 \left( \frac{-K_{i1}^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j-1} + K_{i0}^{u_m} U_{mz}^j + \frac{K_{i1}^{u_m}}{2s} U_{mz}^{j+1} \right) + \sum_{k=0}^3 zK_{i2}^{v_m} V_{kz}^j + \\
& + \sum_{n=0}^2 \left( \left( \frac{K_{i11}^{w_n}}{s^2} - \frac{K_{i1}^{w_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j-1} + \left( \frac{-2K_{i11}^{w_n}}{s^2} + K_{i0}^{w_n} - z^2 K_{i22}^{w_n} \right) W_{nz}^j + \left( \frac{K_{i11}^{w_n}}{s^2} + \frac{K_{i1}^{w_n}}{2s} \right) W_{nz}^{j+1} \right) = \\
& = K_i^{q_{33}^+} Q_{(z)33}^+ - K_i^{q_{33}^-} Q_{(z)33}^-, \quad i = \overline{9, 11}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad z = \overline{0, 1, 2, \dots}, \quad (12)
\end{aligned}$$

где  $s$  – шаг конечно-разностной схемы,  $N+1$  – количество узлов.

Системы (11) и (12) решаются методом матричной прогонки с помощью программы для ЭВМ. В результате в узлах сетки получены перемещения оболочки, для аппроксимации которых применяются сплайны. Деформации оболочки определяются с помощью геометрических соотношений, тангенциальные напряжения находятся из соотношений закона Гука. Поперечные напряжения получаются путем непосредственного интегрирования уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

### 3. Пример расчета

В качестве примера расчета рассматривается коническая оболочка переменной толщины, жестко защемленная на двух краях, с параметрами: угол половины конусности  $\theta = \pi/4$ , начало и конец оболочки вдоль оси  $x_1 = 0,1$  м,  $x_2 = 5x_1$ , коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Оболочка находится под действием равномерно распределенной нагрузки  $Q_0$  по внутренней поверхности, то есть имеем осесимметричный случай. Толщина оболочки изменяется по закону

$$h_1 = h_0 + k_0(x - x_1), \quad k_0 = 1/400,$$

$$h_2 = h_0 = 0,02x_1.$$

На рис. 2–4 показаны результаты расчета НДС оболочки. Отметим, что аббревиатура «кл» соответствует данным расчета по классической теории.

Анализ графиков на рис. 2 и 3 показывает, что максимальные напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ , определяемые по уточненной теории, превышают значения этих же напряжений, соответствующих классической теории, на 12% для края  $x = x_1$  и на 35% для края  $x = x_2$ .

Дополнительные максимальные поперечные нормальные напряжения  $\sigma_{33}$  достигают значения порядка 40% от основного изгибного напряжения  $\sigma_{11}$  на краю  $x = x_1$  (рис. 4) и 45% на краю  $x = x_2$  (рис. 5).



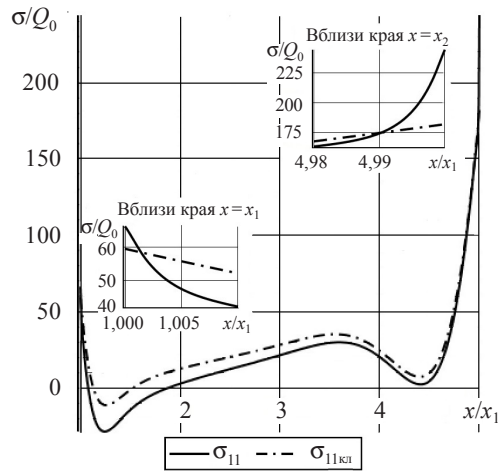


Рис. 2. Изменение  $\sigma_{11}$  по длине оболочки

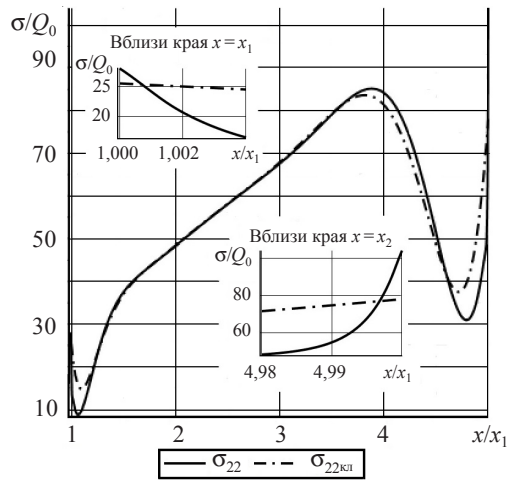


Рис. 3. Изменение  $\sigma_{22}$  по длине оболочки

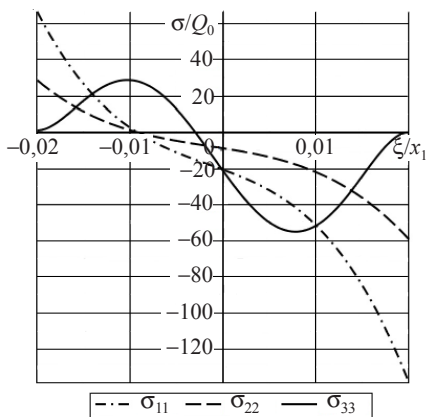


Рис. 4. Изменение напряжений по толщине на краю  $x = x_1$

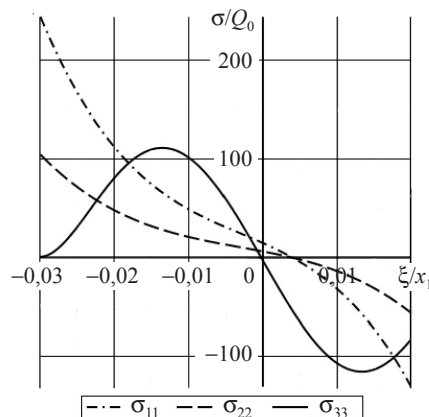


Рис. 5. Изменение напряжений по толщине на краю  $x = x_2$

## Заключение

С помощью представления перемещений полиномами по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории и принципа минимума полной энергии деформации построен вариант уточненной теории для расчета НДС конической оболочки переменной толщины.

На основе полученных результатов расчета показано, что дополнительное поперечное напряжение, которым в классической теории типа Кирхгофа – Лява пренебрегают, вносит существенный вклад в общее напряженное состояние. В зоне жестко защемленного края оболочки нормальные тангенциальные напряжения существенно уточняются.

Эти результаты имеют важное значение, так как позволяют достоверно оценить прочность и долговечность конструкций объектов в авиационной отрасли и других отраслях машиностроения.

### Список литературы

1. Власов В.З. *Избранные труды. Общая теория оболочек*. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. 528 с.
2. Новожилов В.В. *Теория тонких оболочек*. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
3. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1945. Vol. 12. P. A68–A77.
4. Owen D.R.J., Li Z.H. A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods I: Fundamentals and static analysis. *Computers and Structures*. 1987. Vol. 26. No 6. P. 907–914.
5. Gould P.L. *Analysis of Plates and Shells*. New Jersey: Prentice-Hall, 1999. 491 с.
6. Hosseini-Hashemi S., Fadaee M., Es' Haghi M. A novel approach for in-plane/out-of-plane frequency analysis of functionally graded circular/annular plates. *International Journal of Mechanical Sciences* 2010. Vol. 52. No 8. P. 1025–1035. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2010.04.009.
7. Temel B., Noori A.R. A unified solution for the vibration analysis of two-directional functionally graded axisymmetric Mindlin–Reissner plates with variable thickness. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2020. Vol. 174. 105471. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105471>.
8. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
9. Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек*. М.: Наука, 1976. 512 с.
10. Агаловян Л.А. *Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек*. М.: Наука, 1997. 414 с.
11. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л., Геворкян Р.С. Асимптотическое решение задачи электрорупругости для пьезокерамических оболочек, поляризованных по толщине. *Прикладная математика и механика*. 2015. Т. 79. №3. С. 420–433. <http://elibrary.ru/item.asp?id=23856149>.
12. Friedrichs K.O. A boundary-layer theory for elastic plates. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1961. Vol. 14. No 1. P. 1–33. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160140102>.
13. Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells. *Proceedings of the Royal Society*. 1962. Vol. 266. No 1325. P. 143–160.
14. Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2012. № 3(46). С. 86–99.
15. Firsanov Val.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability*. 2016. Vol. 45. No 6. P. 515–521.
16. Firsanov V.V. The basic stress-strain state of a circular plate of variable thickness based on a nonclassical theory. *Journal of Machinery, Manufacture and Reliability*. 2019. Vol. 48. No 1. P. 54–60. DOI: 10.3103/S1052618819010072.
17. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек. *Изв. АН. МТТ*. 1990. № 6. С. 139–146.

18. Пикуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития. *Изв. АН. МТТ*. 2000. № 2. С. 153–168.
19. Фирсанов В.В. Напряженное состояние «пограничный слой» в цилиндрических оболочках на основе неклассической теории. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2018. №3. С. 44–51.
20. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки под действием произвольной нагрузки на основе неклассической теории. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №3. С. 359–368.
21. Doan T.N., Van Thom D., Thanh N.T., Van Chuong P., Tho N.C., Ta N.T., Nguyen H.N. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory. *Composite Structures*. 2020. Vol. 232. 111526. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111526.

#### References

1. Vlasov V.Z. *Izbrannyye trudy. Obshchaya teoriya obolochek* [Selected works. The General theory of shells]. Moscow. Publishing House of the USSR Academy of Sciences. 1962. Vol. 1. 528 p. (In Russian).
2. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin Shells]. Leningrad. Sudpromgiz Publ. 1962. 432 p. (In Russian).
3. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *ASME J. Appl. Mech.* 1945. Vol. 12. P. A68–A77.
4. Owen D.R.J., Li Z.H. A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods I: Fundamentals and static analysis. *Comput. Struct.* 1987. Vol. 26. No 6. P. 907–914.
5. Gould P.L. *Analysis of Plates and Shells*. New Jersey. Prentice-Hall. 1999. 491 p.
6. Hosseini-Hashemi S., Fadaee M., Es' Haghi M. A novel approach for in-plane/out-of-plane frequency analysis of functionally graded circular/annular plates. *Int. J. Mech. Sci.* 2010. Vol. 52. No 8. P. 1025–1035. DOI:10.1016/j.ijmecsci.2010.04.009.
7. Temel B., Noori A.R. A unified solution for the vibration analysis of two-directional functionally graded axisymmetric Mindlin – Reissner plates with variable thickness. *Int. J. Mech. Sci.* 2020. Vol. 174. 105471. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105471>.
8. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton. CRC Press. 2004. 831 p.
9. Goldenweiser A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of Elastic Thin Shells]. Moscow. Nauka Publ. 1976. 512 p. (In Russian).
10. Agalovyan L.A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells]. Moscow. Nauka Publ. 1997. 414 p. (In Russian).
11. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L., Gevorgyan R.S. Asymptotic solution of the electro-elasticity problem for thickness-polarized piezoceramic shells. *J. Appl. Math. Mech.* 2015. Vol. 79. No 3. P. 293–303.
12. Friedlrichs K.O. A boundary-layer theory for elastic plates. *Comm. Pure Appl. Math.* 1961. Vol. 14. No 1. P. 1–33. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160140102>.
13. Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*. 1962. Vol. 266. No 1325. P. 143–160.
14. Dimitrienko Yu.I. Asimptoticheskaya teoriya mnogosloynnykh tonkikh plastin [Asymptotic theory of multilayer thin plates]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2012. No 3. P. 86–99 (In Russian).
15. Firsanov Val.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *J. Mach. Manufact. Reliab.* 2016. Vol. 45. No 6. P. 515–521.
16. Firsanov V.V. The basic stress – strain state of a circular plate of variable thickness based on a nonclassical theory. *J. Mach. Manufact. Reliab.* 2019. Vol. 48. No 1. P. 54–60. DOI: 10.3103/S1052618819010072.
17. Vasiliev V.V., Lurie S.A. K probleme utochneniya teorii pologikh obolochek [To the problem of clarifying the theory of shallow shells]. *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1990. No 6. P. 139–146 (In Russian).

18. Pikul V.V. Sovremennoe sostoyanie teorii obolochek i perspektivy ee razvitiya [The current state of the theory of shells and the prospects for its development]. *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2000. No 2. P. 153–168 (In Russian).

19. Firsanov V.V. The stressed state of the “boundary layer” type cylindrical shells investigated according to a nonclassical theory. *J. Mach. Manufact. Reliab.* 2018. Vol. 47. No 3. P. 241–248.

20. Firsanov V.V., Fam V.T. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie sfericheskoy obolochki pod deystviem proizvol'noy nagruzki na osnove neklassicheskoy teorii [Stress-strain state of the spherical shell exposed to an arbitrary load based on a non-classical theory]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81 No 3. P. 359–368 (In Russian).

21. Doan T.N., Van Thom D., Thanh N.T., Van Chuong P., Tho N.C., Ta N.T., Nguyen H.N. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory. *Compos. Struct.* 2020. Vol. 232. 111526. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111526.

### **STRESS-STRAIN STATE OF THE CONICAL SHELL OF VARIABLE THICKNESS BASED ON THREE-DIMENSIONAL EQUATIONS OF ELASTICITY THEORY**

**Firsanov Val.V.<sup>1</sup>, Pham V.T.<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam*

The results of a study of the stress-strain state of a conical shell of variable thickness based on a non-classical theory are presented. The sought-for displacements of the shell are approximated by polynomials in the normal coordinate to the median surface two degrees higher in relation to the classical theory of the Kirchhoff-Love type. When developing the theory, the three-dimensional equations of the theory of elasticity, as well as Lagrange variational principle are used as the equation of the shell state. As the result of minimizing the specified value of the total energy of the shell, a mathematical model is constructed, which is a system of differential equations of equilibrium in the displacements with variable coefficients and the corresponding boundary conditions. Two cases are considered: the shell is under the action of symmetric and asymmetric loads. Two-dimensional equations are transformed to the system of ordinary differential equations by means of trigonometric sequences as per circumferential coordinate.

To solve the formulated boundary value problem, finite difference and matrix sweep methods are applied. The calculations have been made by means of a computer program. After having determined the displacements, shell deformations and tangential stresses are found from geometric and physical equations, transverse stresses - from the equilibrium equations of the three-dimensional theory of elasticity.

As an example, a conical shell rigidly restrained at the two edges, with asymmetrically varying thickness is considered. Compared are the results of the VAT calculations obtained as per the improved and classical theories. The significant contribution of additional stresses in the boundary zone to the total stress state of the shell is shown. The received results can be used in the strength and durability calculations and tests of machine-building facilities of various purposes.

*Keywords:* conical shell, variable thickness, approximating polynomials, Lagrange variational principle, improved theory, boundary-layer stress state, transversal normal stresses.