

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-156-167

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СВЯЗАННЫХ МЕХАНОДИФфуЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ИЗОТРОПНОМ СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ

© 2020 г. **Зверев Н.А.¹, Земсков А.В.^{1,2}, Тарлаковский Д.В.^{1,2}**

¹*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*

²*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

azemskov1975@mail.ru

Поступила в редакцию 12.05.2020

Рассматривается одномерная полярно-симметричная задача об определении напряженно-деформированного состояния изотропного сплошного многокомпонентного цилиндра, находящегося под влиянием нестационарных поверхностных упругодиффузионных возмущений. В качестве математической модели используется связанная система уравнений упругой диффузии в полярной системе координат.

Решение задачи ищется в интегральной форме и представляется в виде свертки функций Грина с функциями, задающими поверхностные упругодиффузионные возмущения. В качестве внешних воздействий рассматриваются механические нагрузки и диффузионные поля. Для нахождения функций Грина применяются преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье по цилиндрическим функциям Бесселя 1-го рода. Для вычисления коэффициентов этих рядов получены формулы для преобразования дифференциальных операторов первого, второго и третьего порядков с помощью интегрального преобразования Ханкеля на отрезке, что позволило исходную начально-краевую задачу механоидиффузии свести к системе линейных алгебраических уравнений.

Трансформанты Лапласа функций Грина представлены через рациональные функции параметра преобразования Лапласа. Переход в пространство оригиналов осуществляется аналитически с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Получены аналитические выражения для поверхностных функций Грина рассматриваемой задачи.

На примере двухкомпонентного материала выполнено численное исследование взаимодействия механического и диффузионного полей в сплошном изотропном цилиндре, находящемся под действием равномерно распределенного по поверхности давления. Решение представлено в аналитической форме и в виде трехмерных графиков зависимости искомых полей перемещения и приращений концентрации компонентов среды от времени и радиальной координаты. Расчетный пример позволяет продемонстрировать эффект связанности механического и диффузионного полей, что проявляется в изменении концентраций компонентов вещества под действием внешнего нестационарного поверхностного давления.

Ключевые слова: упругая диффузия, преобразование Лапласа, ряды Фурье, функции Грина, полярно-симметричные задачи, нестационарные задачи.

Введение

Анализ современных публикаций как в России, так и за рубежом показывает, что проблема, связанная с исследованием напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов, работающих в условиях нестационарных нагрузок различной физической природы, очень актуальна. Основное внимание исследователей применительно к моделям механодиффузии направлено на решение задач в декартовой системе координат. Рассмотрению задач в криволинейных системах координат, в которых основной проблемой становится нахождение системы собственных функций, являющихся решениями соответствующей задачи Штурма – Лиувилля, посвящено сравнительно небольшое количество работ, среди которых можно выделить [1–14].

В статье рассматривается полярно-симметричная задача для изотропного сплошного цилиндра, в которой в качестве собственных функций используются функции Бесселя 0-го и 1-го рода. Упругая среда является N -компонентным твердым раствором, в котором под действием нестационарных поверхностных возмущений возникают связанные механодиффузионные поля.

1. Постановка задачи

Имеется изотропный сплошной N -компонентный бесконечный цилиндр, на поверхности которого заданы нестационарные возмущения в виде равномерно распределенных по поверхности давления и диффузионных полей. Уравнения, описывающие связанные упругодиффузионные процессы без учета массовых сил в полярно-симметричной постановке, имеют вид [15–17]:

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{q=1}^N \alpha_q \eta'_q, \\ \dot{\eta}_q &= -\Lambda_q \left(u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + D_q \left(\eta''_q + \frac{\eta'_q}{r} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Начальные условия полагаются нулевыми. Краевые условия, соответствующие постановке задачи, имеют вид

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_j \eta_j \right) \right|_{r=\lambda} = f_1(\tau), \quad \eta_q \Big|_{r=\lambda} = f_{q+1}(\tau). \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) все величины являются безразмерными. Их связь со своими размерными аналогами определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} r &= \frac{r^*}{L}, \quad u = \frac{u_r}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho}, \quad \lambda = \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, \\ \alpha_q &= \frac{\alpha^{(q)}}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad D_q = \frac{D^{(q)}}{CL}, \quad \Lambda_q = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D^{(q)} \alpha^{(q)}}{\rho RT_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

где t – время; u_r – радиальная компонента вектора перемещений; r^* – радиальная координата; η_q – приращение концентрации q -го вещества в составе N -компонентной

среды; $n_0^{(q)}$ и $m^{(q)}$ – начальная концентрация и молярная масса q -го компонента; λ^* и μ^* – упругие постоянные Ламе; ρ – плотность среды; $\alpha^{(q)}$ – коэффициент, характеризующий деформации, возникающие вследствие диффузии; $D^{(q)}$ – коэффициент самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура сплошной среды. Характерный линейный размер L выбирается таким образом, чтобы безразмерный радиус цилиндра равнялся λ .

2. Алгоритм решения

Решение задачи ищется в интегральной форме [15]:

$$u(r, \tau) = \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^{\tau} G_{1m}(r, t) f_m(\tau - t) dt, \quad \eta_q(r, \tau) = \sum_{m=1}^{N+1} \int_0^{\tau} G_{q+1,m}(r, t) f_m(\tau - t) dt, \quad (4)$$

где $G_{nm}(r, \tau)$, $n, m = 1, N+1$, – поверхностные функции Грина рассматриваемой задачи, то есть решения следующих начально-краевых задач:

$$\begin{aligned} & \left(G_{1m}'' + \frac{G_{1m}'}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G'_{j+1,m} = \ddot{G}_{1m}, \\ & - \Lambda_q \left(G_{1m}'' + \frac{2G_{1m}''}{r} - \frac{G_{1m}'}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + D_q \left(G_{q+1,m}'' + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) = \dot{G}_{q+1,m}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \left(G'_{1m} + \frac{\lambda}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=\lambda} = \delta_{1m} \delta(\tau), \quad G_{q+1,m} \Big|_{r=\lambda} = \delta_{q+1,m} \delta(\tau), \\ & G_{1m} \Big|_{\tau=0} = \dot{G}_{1m} \Big|_{\tau=0} = G_{q+1,m} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака, δ_{ij} – символ Кронекера.

Для нахождения функций Грина применяем к (5) и (6) преобразование Лапласа. Затем первое уравнение (5) умножаем на $rJ_1(\lambda_n r/\lambda)$, а второе – на $rJ_0(\lambda_n r/\lambda)$ и интегрируем по r в промежутке $[0, \lambda]$. Получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda \left(G_{1m}''^L + \frac{G_{1m}'^L}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} \right) J_1 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr - \sum_{j=1}^N \alpha_j \int_0^\lambda G_{j+1,m}'^L J_1 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = s^2 \int_0^\lambda G_{1m}^L J_1 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr, \\ & - \Lambda_q \int_0^\lambda \left(G_{1m}''^L + \frac{2G_{1m}'^L}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} + \frac{G_{1m}^L}{r^3} \right) J_0 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr + \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & + D_q \int_0^\lambda \left(G_{q+1,m}''^L + \frac{G_{q+1,m}'^L}{r} \right) J_0 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = s \int_0^\lambda G_{q+1,m}^L J_0 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr, \\ & \left(G_{1m}'^L + \frac{\lambda}{r} G_{1m}^L - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,m}^L \right) \Big|_{r=\lambda} = \delta_{1m}, \quad G_{q+1,m}^L \Big|_{r=\lambda} = \delta_{q+1,m}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь верхний индекс L обозначает трансформанту Лапласа, s – параметр преобразования Лапласа; $J_\nu(z)$ – функции Бесселя первого рода порядка ν ; λ_n – корни уравнения $J_0(\lambda_n) = 0$. При этом [18]

$$J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) \Rightarrow J_1'(\lambda_n) = -\frac{1}{\lambda_n} J_1(\lambda_n) \Rightarrow J_1(\lambda_n) + \lambda_n J_1'(\lambda_n) = 0.$$

Далее имеем следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned}
\int_0^\lambda \left\{ \frac{G'_{q+1,m}}{G'_{1m}} \right\} J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr &= \int_0^\lambda J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r d \left\{ \frac{G_{q+1,m}^L}{G_{1m}^L} \right\} = \left\{ \frac{G_{q+1,m}^L}{G_{1m}^L} \right\} J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r \Big|_0^\lambda - \\
&- \int_0^\lambda \left\{ \frac{G_{q+1,m}^L}{G_{1m}^L} \right\} \frac{d}{dr} \left[J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r \right] dr = - \int_0^\lambda \left\{ \frac{G_{q+1,m}^L}{G_{1m}^L} \right\} \left[(1-\nu) J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) + \right. \\
&+ \left. \lambda_n \frac{r}{\lambda} J_{\nu-1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) \right] dr = \lambda \left\{ \frac{G_{q+1,m}^L}{G_{1m}^L} \right\} J_\nu(\lambda_n) - \frac{\lambda\lambda_n}{2} \left\{ \frac{J_\nu^2(\lambda_n) G_{q+1,m}^{LH_{\nu-1}}(\lambda_n, s)}{\mu_{\nu-1} J_{\nu-1}^2(\lambda_n) G_{1m}^{LH_{\nu-1}}(\lambda_n, s)} \right\} - \\
&- (1-\nu) \int_0^\lambda \frac{1}{r} \left\{ \frac{G_{q+1,m}^L}{G_{1m}^L} \right\} J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr, \tag{9}
\end{aligned}$$

где [19]

$$\begin{aligned}
G_{q+1,m}^{LH_\nu}(\lambda_n, s) &= \frac{2}{\lambda^2 J_{\nu+1}^2(\lambda_n)} \int_0^\lambda G_{q+1,m}^L(r, s) J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr, \quad J_\nu(\lambda) = 0, \\
G_{1m}^{LH_\nu}(\lambda_n, s) &= \frac{2}{\lambda^2 \mu_{\nu n} J_\nu^2(\lambda_n)} \int_0^\lambda G_{1m}^L(r, s) J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr, \quad \mu_{\nu n} = \left(1 + \frac{1-\nu^2}{\lambda_n^2} \right). \tag{10}
\end{aligned}$$

При $\nu = 1$ получаем

$$\int_0^\lambda G'_{q+1,m} J_1 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = -\lambda\lambda_n \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G_{q+1,m}^{LH_0}(\lambda_n, s) + \lambda G_{km}^L(\lambda, s) J_1(\lambda_n). \tag{11}$$

Используя равенство $J'_\nu(z) = (\nu/z) J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z)$, вместо (9) получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^\lambda \left\{ \frac{G'_{q+1,m}}{G'_{1m}} \right\} J_\nu \left(\lambda_n \frac{r}{\lambda} \right) r dr &= - \int_0^\lambda \left[(1+\nu) J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) - \lambda_n \frac{r}{\lambda_n} J_{\nu+1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) \right] \left\{ \frac{G'_{q+1,m}}{G'_{1m}} \right\} dr = \\
&= -(1+\nu) \int_0^\lambda \frac{1}{r} \left\{ \frac{G_{q+1,m}^L}{G_{1m}^L} \right\} J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr + \frac{\lambda\lambda_n}{2} \left\{ \frac{J_{\nu+2}^2(\lambda_n) G_{q+1,m}^{LH_{\nu+1}}(\lambda_n, s)}{\mu_{\nu+1,n} J_{\nu+2}^2(\lambda_n) G_{1m}^{LH_{\nu+1}}(\lambda_n, s)} \right\}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Для преобразования выражения $G_{km}^{nL} + G_{km}^L/r - G_{km}^L/r^2$ воспользуемся представлением

$$\begin{aligned}
&\int_0^\lambda \left(G_{km}^{nL} + \frac{1}{r} G_{km}^L - \frac{\nu^2}{r^2} G_{km}^L \right) J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = \\
&= \int_0^\lambda \frac{d}{dr} (r G_{km}^L) J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dr - \int_0^\lambda \frac{\nu^2}{r^2} G_{km}^L J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr. \tag{13}
\end{aligned}$$

Первое слагаемое для функции $G_{q+1,m}^L(\lambda_n, s)$ с учетом (12) преобразуется так:

$$\begin{aligned}
\int_0^\lambda \frac{d}{dr} (r G_{q+1,m}^L) J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dr &= \int_0^\lambda J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) d(r G_{q+1,m}^L) = J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r G_{q+1,m}^L \Big|_0^\lambda - \\
&- \int_0^\lambda r G_{q+1,m}^L \frac{d}{dr} \left[J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) \right] dr = J_\nu(\lambda_n) \lambda G_{q+1,m}^L(\lambda, s) + \nu \int_0^\lambda G_{q+1,m}^L J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dr -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda_n}{\lambda} \int_0^\lambda r G'_{q+1,m} J_{\nu-1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dr = J_\nu(\lambda_n) \lambda G'_{q+1,m}(\lambda, s) + \nu \int_0^\lambda J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dG'_{q+1,m} - \\
& -\lambda_n^2 \frac{J_{\nu+1}^2(\lambda_n)}{2} G_{q+1,m}^{LH_\nu}(\lambda_n, s) + \nu \frac{\lambda_n}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{G_{q+1,m}^L}{r} J_{\nu-1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr - \lambda_n G_{q+1,m}^L(\lambda, s) J_{\nu-1}(\lambda_n) = \\
& = J_\nu(\lambda_n) \lambda G'_{q+1,m}(\lambda, s) + \nu J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) G_{q+1,m}^L \Big|_0^\lambda - \nu \int_0^\lambda G_{q+1,m}^L \frac{d}{dr} \left[J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) \right] dr - \\
& -\lambda_n^2 \frac{J_{\nu+1}^2(\lambda_n)}{2} G_{q+1,m}^{LH_\nu}(\lambda_n, s) + \nu \frac{\lambda_n}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{G_{q+1,m}^L}{r} J_{\nu-1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr - \lambda_n G_{q+1,m}^L(\lambda, s) J_{\nu-1}(\lambda_n) = \\
& = \nu^2 \int_0^\lambda \frac{G_{q+1,m}^L}{r^2} J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr - \lambda_n^2 \frac{J_{\nu+1}^2(\lambda_n)}{2} G_{q+1,m}^{L,H_\nu}(\lambda_n, s) - \lambda_n G_{q+1,m}^L(\lambda, s) J_{\nu-1}(\lambda_n) + \\
& + \lambda J_\nu(\lambda_n) G'_{q+1,m}(\lambda, s) - \nu J_\nu(\lambda_n) G_{q+1,m}^L(\lambda, s) + \nu J_\nu(0) G_{q+1,m}^L(0, s).
\end{aligned}$$

Подставляя этот результат в (13), находим

$$\begin{aligned}
& \int_0^\lambda \left(G_{q+1,m}^{nL} + \frac{1}{r} G'_{q+1,m} - \frac{\nu^2}{r^2} G_{q+1,m}^L \right) J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = \nu^2 \int_0^\lambda \frac{G_{q+1,m}^L}{r^2} J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr - \\
& -\lambda_n^2 \frac{J_{\nu+1}^2(\lambda_n)}{2} G_{q+1,m}^{LH_\nu} + \nu J_\nu(0) G_{q+1,m}^L(0, s) - \nu^2 \int_0^\lambda \frac{G_{q+1,m}^L}{r^2} J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr - \\
& -\lambda_n G_{q+1,m}^L(\lambda, s) J_{\nu-1}(\lambda_n) = -\lambda_n^2 \frac{J_{\nu+1}^2(\lambda_n)}{2} G_{q+1,m}^{LH_\nu} + \nu J_\nu(0) G_{q+1,m}^L(0, s) - \\
& -\lambda_n G_{q+1,m}^L(\lambda, s) J_{\nu-1}(\lambda_n).
\end{aligned}$$

Учитывая, что $J_0(\lambda_n) = 0$, $J_{-1}(\lambda_n) = -J_1(\lambda_n)$ и $J_1(0) = 0$, получаем

$$\int_0^\lambda \left(G_{q+1,m}^{nL} + \frac{G'_{q+1,m}}{r} \right) J_0 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = -\lambda_n^2 \frac{J_1^2(\lambda_n)}{2} G_{q+1,m}^{LH_0}(\lambda_n, s) + \lambda_n G_{q+1,m}^L(\lambda, s) J_1(\lambda_n). \quad (14)$$

С другой стороны, для функции $G_{1m}^L(\lambda_n, s)$ с учетом (9) имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^\lambda \frac{d}{dr} (r G'_{1m}) J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dr = \int_0^\lambda J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) d(r G'_{1m}) = J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r G'_{1m} \Big|_0^\lambda - \\
& - \int_0^\lambda r G'_{1m} \frac{d}{dr} \left[J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) \right] dr = J_\nu(\lambda_n) \lambda G'_{1m}(\lambda, s) - \nu \int_0^\lambda G'_{1m} J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dr + \\
& + \frac{\lambda_n}{\lambda} \int_0^\lambda r G'_{1m} J_{\nu+1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dr = J_\nu(\lambda_n) \lambda G'_{1m}(\lambda, s) - \nu \int_0^\lambda J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dG_{1m}^L + \\
& + \lambda_n G_{1m}^L(\lambda, s) J_{\nu+1}(\lambda_n) - \lambda_n^2 \frac{\mu_{\nu n}}{2} J_\nu^2(\lambda_n) G_{1m}^{LH_\nu}(\lambda_n, s) - \frac{\nu \lambda_n}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{G_{1m}^L}{r} J_{\nu+1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = \\
& = J_\nu(\lambda_n) \lambda G'_{1m}(\lambda, s) - \nu J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) G_{1m}^L \Big|_0^\lambda + \nu \int_0^\lambda G_{1m}^L \frac{d}{dr} \left[J_\nu \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) \right] dr +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_n G_{1m}^L(\lambda, s) J_{v+1}(\lambda_n) - \lambda_n^2 \frac{\mu_{vn}}{2} J_v^2(\lambda_n) G_{1m}^{LHv}(\lambda_n, s) - \frac{\lambda_n}{\lambda} v \int_0^\lambda \frac{G_{1m}^L}{r} J_{v+1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = \\
& = J_v(\lambda_n) \lambda G_{1m}'^L(\lambda, s) - v J_v(\lambda_n) G_{1m}^L(\lambda, s) + v J_v(0) G_{1m}^L(0, s) + \lambda_n G_{1m}^L(\lambda, s) J_{v+1}(\lambda_n) + \\
& + v^2 \int_0^\lambda \frac{G_{1m}^L}{r} J_v \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dr - v \frac{\lambda_n}{\lambda} \int_0^\lambda G_{1m}^L J_{v+1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) dr - \lambda_n^2 \frac{\mu_{vn}}{2} J_v^2(\lambda_n) G_{1m}^{LHv}(\lambda_n, s) - \\
& - v \frac{\lambda_n}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{G_{1m}^L}{r} J_{v+1} \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = v^2 \int_0^\lambda \frac{G_{1m}^L}{r^2} J_v \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr - \lambda_n^2 \frac{\mu_{vn}}{2} J_v^2(\lambda_n) G_{1m}^{LHv}(\lambda_n, s) + \\
& + J_v(\lambda_n) \lambda G_{1m}'^L(\lambda, s) - v J_v(\lambda_n) G_{1m}^L(\lambda, s) + v J_v(0) G_{1m}^L(0, s) + \lambda_n G_{1m}^L(\lambda, s) J_{v+1}(\lambda_n).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \int_0^\lambda \left(G_{1m}^{nL} + \frac{1}{r} G_{1m}'^L - \frac{v^2}{r^2} G_{1m}^L \right) J_v \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = v^2 \int_0^\lambda \frac{G_{1m}^L}{r^2} J_v \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr - \\
& - \lambda_n^2 \frac{\mu_{vn}}{2} J_v^2(\lambda_n) G_{1m}^{LH0}(\lambda_n, s) + \lambda J_v(\lambda_n) G_{1m}'^L(\lambda, s) - v J_v(\lambda_n) G_{1m}^L(\lambda, s) + \\
& + v J_v(0) G_{1m}^L(0, s) + \lambda_n G_{1m}^L(\lambda, s) J_{v+1}(\lambda_n) - v^2 \int_0^\lambda \frac{f}{r^2} J_v \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = \\
& = -\lambda_n^2 \frac{\mu_{vn}}{2} J_v^2(\lambda_n) G_{1m}^{LH0}(\lambda_n, s) + \lambda J_v(\lambda_n) G_{1m}'^L(\lambda, s) - \\
& - v J_v(\lambda_n) G_{1m}^L(\lambda, s) + v J_v(0) G_{1m}^L(0, s) + \lambda_n G_{1m}^L(\lambda, s) J_{v+1}(\lambda_n).
\end{aligned}$$

При $v = 0$ и $v = 1$ с учетом равенств $J_1(0) = 0$ и $J_0(\lambda_n) = 0$, а также равенства [18]

$$\frac{2}{\lambda_m} J_1(\lambda_n) = J_0(\lambda_n) + J_2(\lambda_n) = J_2(\lambda_n) \quad (15)$$

имеем ($\mu_{1n} = 1$)

$$\begin{aligned}
& \int_0^\lambda \left(G_{1m}^{nL} + \frac{G_{1m}'^L}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} \right) J_1 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = -\frac{\lambda_n^2}{2} J_1^2(\lambda_n) G_{1m}^{LH1}(\lambda_n, s) + \\
& + J_1(\lambda_n) [G_{1m}'^L(\lambda, s) + G_{1m}^L(\lambda, s)]. \quad (16)
\end{aligned}$$

Наконец, для выражения $G_{1m}^{nL} + 2G_{1m}^{nL}/r - G_{1m}'^L/r^2 + G_{1m}^L/r^3$ воспользуемся представлением

$$\begin{aligned}
& \int_0^\lambda \left(G_{1m}^{nL} + \frac{2G_{1m}^{nL}}{r} - \frac{G_{1m}'^L}{r^2} + \frac{G_{1m}^L}{r^3} \right) J_0 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = \int_0^\lambda \frac{d}{dr} \left(G_{1m}^{nL} + \frac{G_{1m}'^L}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} \right) J_0 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr + \\
& + \int_0^\lambda \frac{1}{r} \left(G_{1m}^{nL} + \frac{G_{1m}'^L}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} \right) J_0 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\int_0^\lambda \frac{d}{dr} \left(G_{1m}^{nL} + \frac{G_{1m}'^L}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} \right) J_0 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r dr = \int_0^\lambda J_0 \left(\frac{r\lambda_n}{\lambda} \right) r d \left(G_{1m}^{nL} + \frac{G_{1m}'^L}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= J_0\left(\frac{r\lambda_n}{\lambda}\right)r\left(G_{1m}^{nL} + \frac{G_{1m}^{\prime L}}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2}\right)\Big|_0^\lambda - \int_0^\lambda \left(G_{1m}^{nL} + \frac{G_{1m}^{\prime L}}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2}\right)\frac{d}{dr}\left[J_0\left(\frac{r\lambda_n}{\lambda}\right)r\right]dr = \\
&= J_0(\lambda_n)[G_{1m}^{nL}(\lambda, s) + G_{1m}^{\prime L}(\lambda, s) - G_{1m}^L(\lambda, s)] - \\
&\quad - \int_0^\lambda \left(G_{1m}^{nL} + \frac{G_{1m}^{\prime L}}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2}\right)\left[J_0\left(\frac{r\lambda_n}{\lambda}\right) + \frac{r\lambda_n}{\lambda}J_0'\left(\frac{r\lambda_n}{\lambda}\right)\right]dr = \{J_0'(z) = -J_1(z)\} = \\
&= -\int_0^\lambda \left(G_{1m}^{nL} + \frac{G_{1m}^{\prime L}}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2}\right)J_0\left(\frac{r\lambda_n}{\lambda}\right)dr + J_0(\lambda_n)[G_{1m}^{nL}(\lambda, s) + G_{1m}^{\prime L}(\lambda, s) - G_{1m}^L(\lambda, s)] + \\
&\quad + \frac{\lambda_n}{\lambda}\left[-\lambda_k^2 \frac{\mu_{1n}}{2}J_1^2(\lambda_n)G_{1m}^{LH_1}(\lambda, s) + J_1(\lambda_n)[G_{1m}^{\prime L}(\lambda, s) - G_{1m}^L(\lambda, s)] + \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + \lambda_n G_{1m}^L(\lambda, s)J_2(\lambda_n)\right].
\end{aligned}$$

Используя формулу (15), получаем ($\mu_{1n} = 1$)

$$\begin{aligned}
&\int_0^\lambda \left(G_{1m}^{nL} + \frac{2G_{1m}^{\prime L}}{r} - \frac{G_{1m}^L}{r^2} + \frac{G_{1m}^L}{r^3}\right)J_0\left(\frac{r\lambda_n}{\lambda}\right)rdr = -\frac{\lambda_n^3}{2\lambda}J_1^2(\lambda_n)G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, s) + \\
&\quad + \frac{\lambda_n}{\lambda}J_1(\lambda_n)[G_{1m}^{\prime L}(\lambda, s) + G_{1m}^L(\lambda, s)]. \tag{17}
\end{aligned}$$

В результате с учетом полученных равенств (11), (14), (16) и (17) задача (7), (8) преобразуется к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
&k_1(\lambda_n, s)G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, s) - \lambda\lambda_n \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1, m}^{LH_0}(\lambda_n, s) = \frac{2}{J_1(\lambda_n)}\delta_{1m}, \\
&\Lambda_q \lambda_n^3 G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, s) - \lambda k_{q+1}(\lambda_n, s)G_{q+1, m}^{LH_0}(\lambda_n, s) = \\
&= \frac{2\lambda_n \Lambda_q}{J_1(\lambda_n)}\left(\delta_{1m} + \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{j+1, m} - \lambda \frac{D_q}{\Lambda_q} \delta_{q+1, m}\right), \tag{18} \\
&k_1(\lambda_n, s) = \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{q+1}(\lambda_n, s) = D_q \lambda_n^2 + s,
\end{aligned}$$

где в соответствии с (10) использованы обозначения:

$$\begin{aligned}
G_{1m}^L(r, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, s)J_1\left(\frac{\lambda_n r}{\lambda}\right), \quad G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, s) = \frac{2}{\lambda^2 J_1^2(\lambda_n)} \int_0^\lambda r G_{1m}^L(r, s)J_1\left(\frac{\lambda_n r}{\lambda}\right)dr, \\
G_{q+1, m}^L(r, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1, m}^{LH_0}(\lambda_n, s)J_0\left(\frac{\lambda_n r}{\lambda}\right), \\
G_{q+1, m}^{LH_0}(\lambda_n, s) &= \frac{2}{\lambda^2 J_1^2(\lambda_n)} \int_0^\lambda r G_{q+1, m}^L(r, s)J_0\left(\frac{\lambda_n r}{\lambda}\right)dr.
\end{aligned}$$

Решение системы (18) имеет вид [17]:

$$G_{1k}^{LH_1}(\lambda_n, s) = \frac{2P_{1k}(\lambda_n, s)}{J_1(\lambda_n)P(\lambda_n, s)}, \quad G_{q+1, 1}^{LH_0}(\lambda_n, s) = -\frac{2}{J_1(\lambda_n)}\left[\frac{\lambda_n \Lambda_q}{\lambda k_{q+1}} + \frac{P_{q+1, 1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}\right],$$

$$G_{q+1,p+1}^{LH_0}(\lambda_n, s) = -\frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[\frac{\lambda_n(\Lambda_q \alpha_p - \lambda D_q \delta_{pq})}{\lambda k_{q+1}} + \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} \right]. \quad (19)$$

В формулах (19) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P(\lambda_n, s) &= k_1(\lambda_n, s) \Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j(\lambda_n, s), \\ Q(\lambda_n, s) &= \lambda k_{q+1}(\lambda_n, s) P(\lambda_n, s), \\ \Pi(\lambda_n, s) &= \prod_{j=1}^N k_{j+1}(\lambda_n, s), \quad \Pi_j(\lambda_n, s) = \prod_{k=1, k \neq j}^N k_{k+1}(\lambda_n, s), \\ P_{11}(\lambda_n, s) &= \Pi - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j, \quad P_{1,q+1}(\lambda_n, s) = \lambda_n^2 \alpha_q \left(\lambda D_q \Pi_q - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j \right), \\ P_{q+1,k}(\lambda_n, s) &= -\Lambda_q \lambda_n^3 P_{1k}(\lambda_n, s). \end{aligned} \quad (20)$$

Так как все функции в (19) и (20) являются рациональными функциями параметра s , то оригиналы функций влияния находятся аналитически с помощью теории вычетов и таблиц операционного исчисления [20]:

$$\begin{aligned} G_{1k}^{H_1}(\lambda_n, \tau) &= \frac{2}{J_1(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{N+2} A_{1k}^{(l)} \exp s_l \tau, \quad A_{1k}^{(l)} = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_l)}{P'(\lambda_n, s_l)}, \\ G_{q+1,1}^{H_0}(\lambda_n, \tau) &= \frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[\sum_{l=1}^{N+3} A_{q+1,1}^{(l)} \exp s_l \tau - \frac{\lambda_n \Lambda_q \exp(-D_q \lambda_n^2 \tau)}{\lambda} \right], \quad A_{q+1,k}^{(l)} = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_l)}{Q'(\lambda_n, s_l)}, \\ G_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \tau) &= \frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[\sum_{l=1}^{N+3} A_{q+1,p+1}^{(l)} \exp s_l \tau - \frac{\lambda_n(\Lambda_q \alpha_p - \lambda D_q \delta_{pq}) \exp(-D_q \lambda_n^2 \tau)}{\lambda} \right]. \end{aligned}$$

3. Расчетный пример

В качестве примера рассматриваем двухкомпонентный ($N = 2$) цилиндр из дюралюминия, физические характеристики которого [21] после приведения к безразмерному виду (3) следующие:

$$\begin{aligned} \lambda &= 4,92 \cdot 10^{-1}, \quad \mu = 2,54 \cdot 10^{-1}, \quad \alpha_1 = 1,50 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_2 = 5,92 \cdot 10^{-4}, \\ D_1 &= 1,27 \cdot 10^{-16}, \quad D_2 = 5,02 \cdot 10^{-21}, \quad \Lambda_1 = 2,77 \cdot 10^{-18}, \quad \Lambda_2 = 5,50 \cdot 10^{-23}. \end{aligned}$$

Полагаем для расчета в граничных условиях (2): $f_1(\tau) = H(\tau)$, $f_{q+1}(\tau) = 0$, $H(\tau)$ – функция Хевисайда. Тогда, вычисляя свертки по времени (4), получаем:

$$\begin{aligned} u &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{N+2} A_{1k}^{(l)} \frac{(\exp s_l \tau - 1) J_1(\lambda_n r / \lambda)}{s_l J_1(\lambda_n)}, \\ \eta_q &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{l=1}^{N+3} A_{q+1,1}^{(l)} \frac{\exp s_l \tau - 1}{s_l} + \frac{\lambda_n \Lambda_q (\exp(-D_q \lambda_n^2 \tau) - 1)}{\lambda D_q \lambda_n^2} \right] \frac{J_0(\lambda_n r / \lambda)}{J_1(\lambda_n)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Для вычислений в (21) использовалось 100 членов ряда Фурье. Дальнейшее увеличение количества точек не приводит к видимому изменению результатов. Результаты вычислений представлены на рис. 1–3.

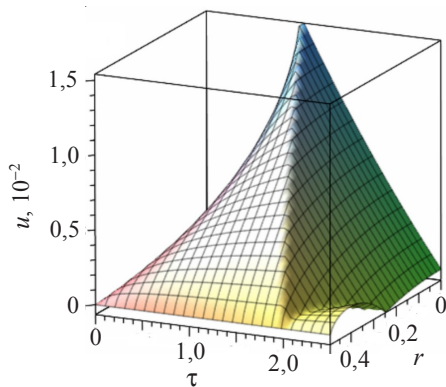


Рис. 1. Зависимость перемещений $u(r, \tau)$ от времени и радиальной координаты

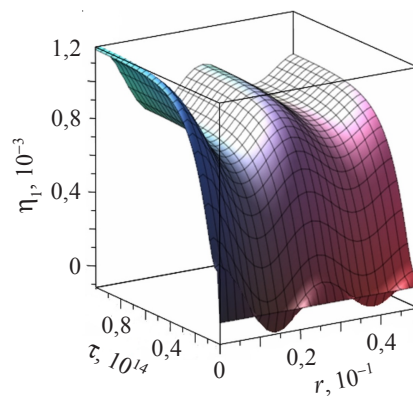


Рис. 2. Зависимость приращения концентрации $\eta_1(r, \tau)$ от времени и радиальной координаты

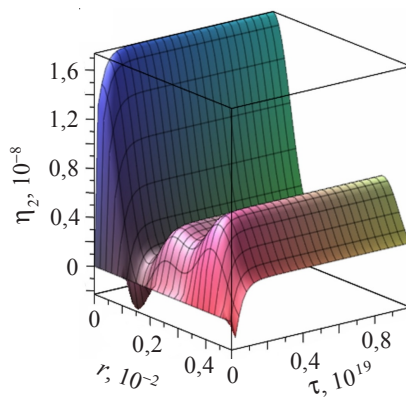


Рис. 3. Зависимость приращения концентрации $\eta_2(r, \tau)$ от времени и радиальной координаты

Заключение

Представлен алгоритм решения полярно-симметричной нестационарной задачи упругой диффузии для изотропного сплошного цилиндра. Найдены функции влияния, позволяющие определять поля перемещений и приращения концентраций компонентов среды по заданным поверхностным возмущениям. Для демонстрации работы алгоритма рассмотрен пример, иллюстрирующий эффект связанности механического и диффузионных полей. Результаты вычислений представлены в виде графиков зависимости искомых полей от времени в различных точках цилиндра.

Список литературы

1. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 13. P. 1–15. DOI: 10.1155/IJMMS/2006/25976.
2. Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. Iss. 17. P. 5711–5722. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2007.01.019.
3. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic

diffusion inside a spherical shell. *International Journal of Engineering and Technical Research*. 2014. Vol. 2. Iss. 5. P. 151–159.

4. Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction. *Physica B: Condensed Matter*. 2016. Vol. 496. P. 57–68. DOI:10.1016/j.physb.2016.05.008.

5. Elhagary M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times. *Acta Mechanica*. 2011. Vol. 218. P. 205–215. DOI:10.1007/s00707-010-0415-5.

6. Hwang C.C., Huang I.B. Diffusion in hollow cylinders with mathematical treatment. *International Journal of Engineering Research and Development*. 2012. Vol. 3. Iss. 8. P. 57–75.

7. Hwang C.C., Huang I.B. Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state. *IOSR Journal of Engineering*. 2012. Vol. 2. Iss. 8. P. 166–182. DOI: 10.9790/3021-0281166182.

8. Kumar R., Kansal T. Propagation of cylindrical Rayleigh waves in a transversely isotropic thermoelastic diffusive solid half-space. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2013. Vol. 43. No 3. P. 3–20. DOI: 10.2478/jtam-2013-0020.

9. Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C. Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions. *Acta Mechanica*. 2015. Vol. 226. P. 3263–3274. DOI: 10.1007/s00707-015-1383-6.

10. Xia R.H., Tian X.G., Shen Y.P. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity. *International Journal of Engineering Science*. 2009. Vol. 47. P. 669–679. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2009.01.003.

11. Abbas A.I. The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium. *Journal of Measurements in Engineering*. 2014. Vol. 2. Iss. 4. P. 175–184.

12. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. Finite element method to study elasto-thermodiffusive response inside a hollow cylinder with three-phase-lag effect. *International Journal of Computer Sciences and Engineering*. 2019. Vol. 7. Iss. 1. P. 148–156. DOI: 10.26438/ijcse/v7i1.148156.

13. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources. *Computational Methods in Science and Technology*. 2019. Vol. 25. No 4. P. 167–176. DOI:10.12921/cmst.2018.0000034.

14. Lata P. Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate. *Coupled Systems Mechanics*. 2019. Vol. 8. No 1. P. 39–53. DOI: <https://doi.org/10.12989/csm.2019.8.1.039>.

15. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016. Vol. 158. No 1. P. 1–8. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012101.

16. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №1. С. 5–14.

17. Зверев Н.А., Земсков А.В. Постановка нестационарной задачи упругой диффузии для изотропного сплошного цилиндра. *Проблемы безопасности на транспорте: Матер. IX Междунар. научн.-практ. конф.* Гомель: БелГУТ, 2019. Ч. 2. С. 212–214.

18. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. Ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

19. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Основные дифференциальные уравнения математической физики*. М.: ГИФМЛ, 1962. 768 с.

20. Диткин В.А., Прудников А.П. *Справочник по операционному исчислению*. М.: Высшая школа, 1965. 568 с.

21. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. *Физические величины: Справочник*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

References

1. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *Int. J. Solids Struct.* 2006. Vol. 13. P. 1–15. DOI: 10.1155/IJMMS/2006/25976.

2. Aouadi M. A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of ge-

neralized thermoelastic diffusion. *Int. J. Solids Struct.* 2007. Vol. 44. Iss. 17. P. 5711–5722. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.01.019.

3. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell. *International Journal of Engineering and Technical Research.* 2014. Vol. 2. Iss. 5. P. 151–159.

4. Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S. Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction. *Physica B: Condensed Matter.* 2016. Vol. 496. P. 57–68. DOI:10.1016/j.physb.2016.05.008.

5. Elhagary M.A. Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times. *Acta Mech.* 2011. Vol. 218. P. 205–215. DOI:10.1007/s00707-010-0415-5.

6. Hwang C.C., Huang I.B. Diffusion in hollow cylinders with mathematical treatment. *International Journal of Engineering Research and Development.* 2012. Vol. 3. Iss. 8. P. 57–75.

7. Hwang C.C., Huang I.B. Diffusion-induced stresses in hollow cylinders for transient state. *IOSR Journal of Engineering.* 2012. Vol. 2. Iss. 8. P. 166–182. DOI: 10.9790/3021-0281166182.

8. Kumar R., Kansal T. Propagation of cylindrical Rayleigh waves in a transversely isotropic thermoelastic diffusive solid half-space. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.* 2013. Vol. 43. No 3. P. 3–20. DOI: 10.2478/jtam-2013-0020.

9. Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C. Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions. *Acta Mech.* 2015. Vol. 226. P. 3263–3274. DOI: 10.1007/s00707-015-1383-6.

10. Xia R.H., Tian X.G., Shen Y.P. The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity. *International Journal of Engineering Science.* 2009. Vol. 47. P. 669–679. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2009.01.003.

11. Abbas A.I. The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium. *Journal of Measurements in Engineering.* 2014. Vol. 2. Iss. 4. P. 175–184.

12. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. Finite element method to study elasto-thermodiffusive response inside a hollow cylinder with three-phase-lag effect. *International Journal of Computer Sciences and Engineering.* 2019. Vol. 7. Iss. 1. P. 148–156. DOI: 10.26438/ijcse/v7i1.148156.

13. Kumar R., Devi S. Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources. *Computational Methods in Science and Technology.* 2019. Vol. 25. No 4. P. 167–176. DOI:10.12921/cmst.2018.0000034.

14. Lata P. Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate. *Coupled Systems Mechanics.* 2019. Vol. 8. No 1. P. 39–53. DOI: <https://doi.org/10.12989/csm.2019.8.1.039>.

15. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2016. Vol. 158. No 1. P. 1–8. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012101.

16. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Polyarno-simmetrichnaya zadacha uprugoy diffuzii dlya mnogokomponentnoy sredy [Polar-symmetric problem of elastic diffusion for a multicomponent medium]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2018. Vol. 80. No 1. P. 5–14 (In Russian).

17. Zverev N.A., Zemskov A.V. Postanovka nestatsionarnoy zadachi uprugoy diffuzii dlya izotropnogo sploshnogo tsilindra [Formulation of the unsteady problem of elastic diffusion for an isotropic continuous cylinder]. *Problemy bezopasnosti na transporte: Materialy IX Mezhdunar. Nauchno-prakticheskoy konferentsii [Transport Security Issues: Proceedings of the IX International Scientific and Practical Conference]*. Gomel. BelGUT Publ. 2019. Pt. 2. P. 212–214 (In Russian).

18. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.* Eds. M. Abramowitz, I.A. Stegun. Eastford, USA. Martino Fine Books. 1964. 1064 p.

19. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Osnovnye differentsialnye uravneniya matematicheskoy fiziki [Basic Differential Equations of Mathematical Physics]*. Moscow. GIFML Publ. 1962. 768 p. (In Russian).

20. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Handbook of Operational Calculus]*. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 1965. 568 p. (In Russian).

21. Babichev A.P., Babushkina N.A., Bratkovskiy A.M. et al. *Fizicheskie velichiny. Spravochnik [Physical Quantities. Reference]*. Moscow. Energoatomizdat Publ. 1991. 1232 p. (In Russian).

MODELING OF UNSTEADY COUPLED MECHANODIFFUSION PROCESSES IN A CONTINUUM ISOTROPIC CYLINDER

Zverev N.A.¹, Zemskov A.V.^{1,2}, Tarlakovskii D.V.^{1,2}

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

²*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

We considered the one-dimensional polar-symmetric problem of stress-strain state determining of a continuum isotropic multicomponent cylinder. The cylinder is affected by unsteady surface elastic diffusive perturbations. The coupled system of elastic diffusion equations in the polar coordinate system is used as a mathematical model.

The problem solution is sought in the integral form and is represented as convolutions of Green's functions with functions defining surface elastodiffusive perturbations. Mechanical loads and diffusion fields are considered as external influences. We used the Laplace transform by time, and Fourier series expansion in first kind Bessel functions to find the Green's functions. To calculate the coefficients of these series, we obtained formulas for transforming differential operators of the first, second, and third orders using the Hankel integral transform on a segment, which allowed us to reduce the initial boundary-value problem of mechanodiffusion to a system of linear algebraic equations.

Laplace transforms of Green's functions are represented through rational functions of the Laplace transform parameter. The Laplace transform inversion is done analytically due to residues and operational calculus tables. As a result, Analytical expressions of surface Green's functions are obtained for the considering problem.

Numerical study of the mechanical and diffusion fields interaction in a continuous isotropic cylinder is performed. We used two-component material as an example. The cylinder is under pressure uniformly distributed over the surface. The solution is presented in analytical form and in the form of three-dimensional graphs of the desired displacement fields and concentration increments as functions of time and radial coordinate. This calculation example allows us to demonstrate the coupling effect of mechanical and diffusion fields. It manifests itself as a change in the concentrations of the continuum components under the influence of external unsteady surface pressure.

Keywords: elastic diffusion, Laplace transform, Fourier series, Green's function, polar-symmetric problem, unsteady problem.