

УДК 539.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ БАЛОЧНЫХ СИСТЕМ

В.А. Постнов, Г.А. Тумашик

Санкт-Петербург

Предложены новые подходы к решению задач идентификации упругой конструкции путем обработки экспериментальных данных о перемещениях поврежденной конструкции при действии заданных гармонических сил. Параметры рассматриваемой системы определяются из условия равенства перемещений расчетной модели экспериментальным перемещениям при действии одних и тех же внешних динамических нагрузок. Использование метода Ньютона в сочетании с методом наименьших квадратов позволяет построить эффективный алгоритм определения проектных параметров системы (закона распределения жесткости и массы по объему конструкции). Приведены результаты численного тестирования предложенных подходов на примерах решения задач идентификации балок.

1. Введение

В оценке работоспособности конструкций, особенно в определении полученных в процессе их эксплуатации повреждений, в настоящее время большую роль играют неразрушающие методы контроля: рентгеноскопии, акустической эмиссии и т.п. Однако использование этих методов позволяет установить наличие в конструкции лишь местных повреждений (трещин), но не позволяет получить информацию об общей ее несущей способности, которая необходима, например, для решения вопроса о возможности дальнейшей эксплуатации конструкции. Заметим, что изменение несущей способности конструкции (уменьшение ее жесткости) связано с целым рядом факторов: структурными повреждениями, износом ее отдельных элементов, изменениями жесткости крепления между ее отдельными элементами и т.д.

Точность оценки напряженно-деформированного состояния системы зависит от используемых для расчета математических моделей. Попытка повышения их эффективности путем увеличения числа степеней свободы (например, в методе конечных элементов (МКЭ)), к сожалению, часто не может привести к получению расчетных моделей, удовлетворительно отражающих работу реальной конструкции. В связи с этим тестирование пригодности используемых расчетных моделей при расчете сложных конструкций также имеет большое практическое значение. Таким образом, процесс идентификации можно рассматривать в качестве своеобразного “мониторинга” текущего состояния конструкции [1–9]. Развитию именно этих подходов к решению задач идентификации и посвящена настоящая работа.

Поясним содержание рассматриваемых ниже основных подходов к решению задач идентификации конструкций.

При определении структурных повреждений предполагается, что вся необходимая информация, относящаяся к исходному неповрежденному состоянию конструкции, известна или может быть определена расчетным путем. Если же задача идентификации ставится в отношении конструкции, для которой сведения об исходном состоянии отсутствуют, то значения параметров (жесткости и массы) исходного состояния можно назначать по “прототипу”.

Далее, для известного или выбранного по прототипу начального состояния расчетным путем определяются динамические отклики (перемещения или ускорения) на действие заданных внешних динамических нагрузок. Отклики же конструкции в ее “текущем” состоянии определяются экспериментальным путем при действии тех же внешних нагрузок.

Следует заметить, что при таком подходе к решению задач идентификации полученные параметры жесткости и массы не могут быть точно равными значениям этих параметров в реальной конструкции; они дополнительно отражают погрешность используемой расчетной модели.

Информации о динамических откликах, как будет показано ниже, вполне достаточно для решения задачи идентификации рассматриваемой конструкции.

Отметим, что при разработке новых методов идентификации желательно было удовлетворить следующие три положения:

- метод идентификации не должен обладать большой чувствительностью к погрешностям экспериментальных измерений и используемой при расчете численной модели конструкции;

- метод идентификации не должен требовать наличия полной информации о результатах эксперимента, так как их получение может оказаться практически невозможным;

- сходимость метода не должна сильно зависеть от выбранного допущения о начальном состоянии конструкции.

К сожалению, изложенные в статье подходы к решению задач идентификации в полной мере этим положениям не удовлетворяют. Предстоит еще значительная работа, направленная на использование при решении задач идентификации методов регуляризации А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, В.А. Морозова, с целью улучшения обусловленности расчетных алгоритмов.

2. Функции влияния

Любое изменение параметров упругой системы приводит к изменениям ее откликов на внешние динамические воздействия. Эти изменения служат базой для решения целого комплекса задач идентификации упругих систем.

После выполнения, например, с помощью МКЭ, процедуры пространственной дискретизации получим матричное уравнение для определения вынужденных колебаний упругой конструкции (без учета сил сопротивления):

$$\mathbf{K}_{din}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{K}_{din}(t)$ – обобщенная динамическая матрица системы [10], $\mathbf{q}(t)$ – вектор узловых обобщенных перемещений, $\mathbf{P}(t)$ – вектор узловых обобщенных внешних сил.

Введем в рассмотрение вектор проектных параметров системы $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. В качестве последних в задачах идентификации упругих систем принимаются параметры, определяющие жесткостные и инерционные свойства системы. Естественно, что динамическая матрица является функцией вектора \mathbf{r} .

Дифференцируя уравнение (1) по проектному параметру системы r_j , получим необходимую зависимость для определения функций влияния r_j на вектор узловых перемещений рассматриваемой упругой системы $\mathbf{q}(t)$:

$$\frac{\partial \mathbf{q}(t)}{\partial r_j} = -\mathbf{K}_{din}(r, t)^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{din}(r, t)}{\partial r_j} \mathbf{q}(t). \quad (2)$$

В дальнейшем ограничимся предположением о действии на рассматриваемую систему гармонической внешней нагрузки $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0(t) \sin(\omega t)$. В результате непосредственно из (2) получаем следующую формулу:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial r_j} = -\mathbf{K}_{din}(\mathbf{r})^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_{din}(\mathbf{r})}{\partial r_j} \mathbf{q}, \quad (3)$$

где \mathbf{q} – вектор узловых перемещений, определяющий форму вынужденных гармонических колебаний системы.

Отсюда при использовании обычной процедуры МКЭ ($\mathbf{K}_{din}(\mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{M}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ – соответственно матрицы жесткости и масс в общей системе координат) получаем следующие зависимости для определения функций влияния жесткости (k_j) и погонной массы (m_j) конечных элементов на вектор узловых перемещений системы \mathbf{q} :

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial k_j} = -(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial k_j} \mathbf{q}, \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial m_j} = \omega^2 (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial m_j} \mathbf{q}. \quad (4)$$

При этом изменения глобальных матриц жесткости и масс определяются соответственно по формулам:

$$\Delta \mathbf{K} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial k_j} dk_j, \quad \Delta \mathbf{M} = \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial m_j} dm_j, \quad (5)$$

где n_1, n_2 – число варьируемых параметров соответственно жесткости, массы рассматриваемой системы.

3. Идентификация упругой системы

Излагаемый ниже метод позволяет произвести “частичную” идентификацию рассматриваемой конструкции. Предполагается, что геометрия и топология рассматриваемой системы известны.

Дальнейшая процедура состоит в определении неизвестных жесткостей k_j и масс m_j каждого из конечных элементов конструкции, которые обеспечивают получение расчетным путем при действии той же внешней нагрузки $\mathbf{P} \sin(\omega t)$ перемещений \mathbf{q} , максимально приближенных к экспериментально полученным перемещениям \mathbf{q}^* :

$$\text{Minimize } \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{q}(\mathbf{r}) - \mathbf{q}^*. \quad (6)$$

При этом проблема идентификации может быть решена путем использования некоторой оптимизационной процедуры для поиска параметров \mathbf{r} , которые минимизируют значение целевой функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Рассматриваемая задача относительно основных неизвестных оказывается нелинейной, и для ее решения требуется применение итерационной процедуры. Ниже для этих целей используется метод Ньютона

в сочетании с процедурой минимизации нормы суммарной квадратичной погрешности в удовлетворении условия (6). В качестве первого приближения следует принять значения параметров жесткости и массы “исходной” системы.

Применяя для поиска точки минимума $\bar{\mathbf{r}}$ целевой функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ метод Ньютона, будем иметь:

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}^{(k)})}{(d\mathbf{F}/d\mathbf{r})_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(k)}}}. \quad (7)$$

Здесь k есть порядковый номер итерации в процедуре последовательного приближения. Входящие в (7) производные $d\mathbf{F}/d\mathbf{r}$, если учесть выражение для целевой функции, равны $d\mathbf{q}/d\mathbf{r}$ и, следовательно, определяются по формуле (3). В результате из матричного уравнения (7) получаем следующую систему скалярных уравнений:

$$\sum_{j=1}^T \frac{\partial q_i}{\partial r_j} \bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^{(k)}} \Delta r_j^{(k+1)} = -F_i(\mathbf{r}^{(k)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Как правило, при использовании МКЭ число неизвестных (T) меньше числа степеней свободы системы (n). Система (8) оказывается переопределенной. В этом случае для получения системы разрешающих уравнений относительно основных неизвестных Δr_j ($j = 1, 2, \dots, T$) следует воспользоваться условием минимума нормы суммарной квадратичной погрешности в удовлетворении уравнений (8). В результате для определения изменений проектных параметров Δr_j получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^T A_{p,j}^{(k)} \Delta r_j^{(k+1)} = B_p^{(k)} \quad (p, j = 1, 2, \dots, T), \quad (9)$$

где

$$A_{p,j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial r_p} \frac{\partial q_i}{\partial r_j}, \quad B_p = -\sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial q_i}{\partial r_p}. \quad (10)$$

Если же число неизвестных превышает число степеней свободы системы ($T > n$), то необходимо выполнить аналогичные расчеты для другой внешней нагрузки (например, изменив ее частоту). В результате в дополнение к системе (8) получим еще одну аналогичную по структуре систему уравнений. Общее число уравнений удвоится и будет равно $2n$, а число неизвестных остается неизменным, равным T . Далее, для получения системы разрешающих уравнений выполняется изложенная выше процедура минимизации нормы суммарной квадратичной погрешности системы из $2n$ уравнений. Полученные при этом параметры k_j и m_j для каждого из конечных элементов полностью идентифицируют рассматриваемую упругую систему.

Метод Ньютона, как правило, сходится достаточно быстро. Однако возможна его сходимостью к локальным минимумам. Чаще всего этот факт является результатом неудачного выбора нулевого приближения. Кроме того, при проведении итерационного процесса необходимо следить, чтобы получаемое решение находилось в физически допустимой области, то есть удовлетворяло условию $r_i^{(i)} \leq r_i \leq r_i^{(\hat{a})}$, где $r_i^{(i)}$ и $r_i^{(\hat{a})}$ – нижняя и верхняя допустимые границы параметра r_i соответственно.

4. Результаты численных расчетов и их анализ

Изложенный метод идентификации упругих систем был использован для определения структурных повреждений балок.

Рассмотрим балку, изображенную на рис. 1. Балка моделируется 20-ю балочными конечными элементами, каждый из которых имеет четыре степени свободы. При проведении эксперимента к балке прикладывается нагрузка интенсивностью $q(x) = 1$ Н/м, меняющаяся во времени по гармоническому закону.

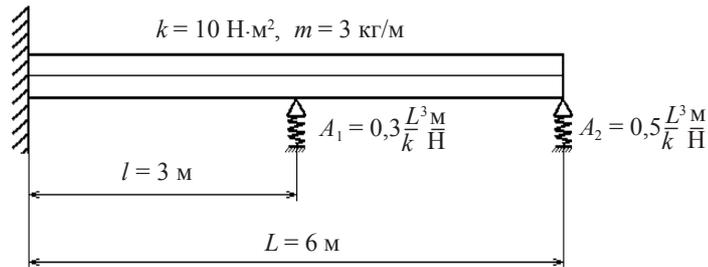
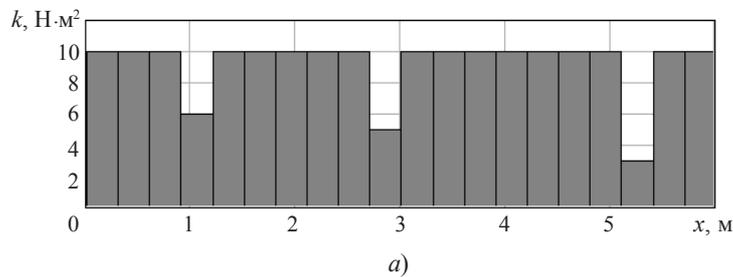
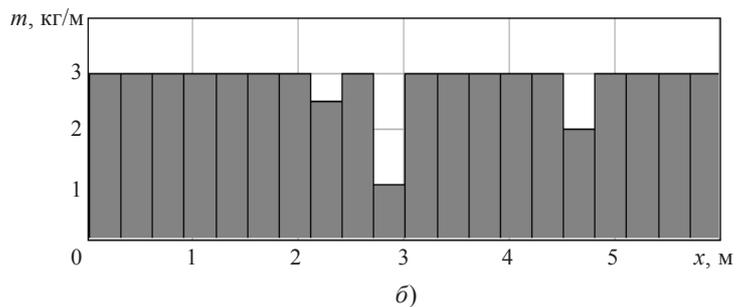


Рис. 1

В рамках вычислительного эксперимента полагаем, что структурные повреждения характеризуются уменьшением жесткости 4, 10 и 18-го элементов соответственно на величины: $dk_4 = 4$ Нм², $dk_{10} = 5$ Нм², $dk_{18} = 7$ Нм² (рис. 2,а) и уменьшением погонной массы 8, 10 и 16-го элементов на $dm_8 = 0,5$ кг/м, $dm_{10} = 2$ кг/м, $dm_{16} = 1$ кг/м (рис. 2,б).



а)



б)

Рис. 2

Рассмотрим подход к определению параметров поврежденной системы путем обработки данных единичного эксперимента. Частота изменения гармонической внешней нагрузки принимается равной $\omega = 2$ рад/с (располагается в интервале между второй и третьей собственными частотами как для исходной, так и для повреж-

денной балки). Сходимость процесса идентификации изгибной жесткости и погонной массы конечных элементов представлена соответственно на рис. 3, а и б (N – число итераций). Видим, что для получения результата с погрешностью менее 0,01% потребовалась 271 итерация. Низкая скорость сходимости связана с плохой обусловленностью задачи, которая проистекает из малой чувствительности форм вынужденных колебаний по отношению к изменениям массы ряда конечных элементов балки. В рассматриваемом случае такими являются элементы, находящиеся в районе жесткой заделки. Для некоторых из них на промежуточных шагах итерационного процесса отмечается появление отрицательных значений погонной массы.

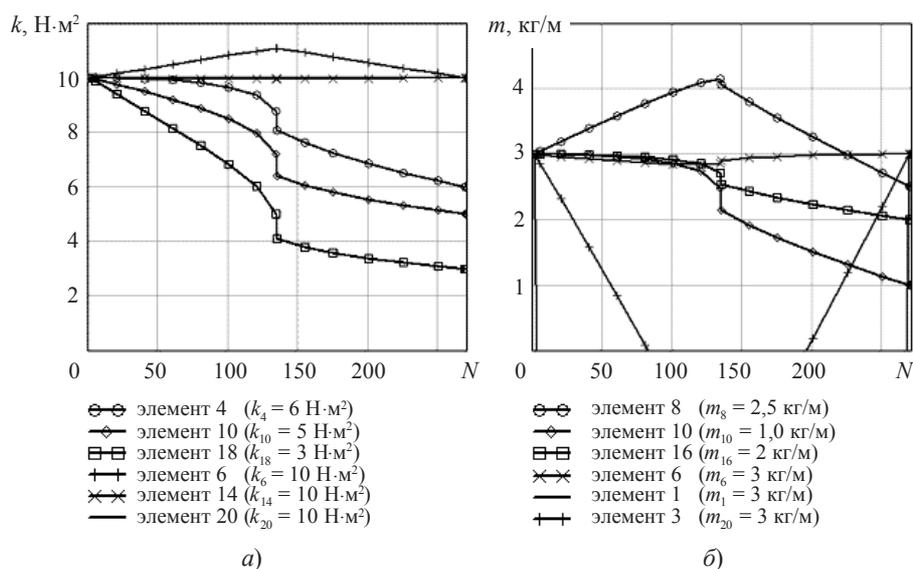


Рис. 3

Путем изменения частоты внешней нагрузки возможно получение более “чувствительных” форм колебаний, и, тем самым, улучшение обусловленности рассматриваемой задачи. Так, при действии нагрузки с частотой $\omega = 4$ рад/с (в интервале между третьей и четвертой собственными частотами системы) для получения той же точности решения оказалось достаточно 31 итерации. Заметим, что сходимость итерационного процесса сильно зависит от особенностей рассматриваемой конструкции. В частности, при введении вместо жесткой заделки свободной опоры необходимое число итераций уменьшается и составляет: при частоте возмущающей силы $\omega = 2$ рад/с – 105 итераций, а при частоте $\omega = 4$ рад/с – 20 итераций.

Дальнейшее повышение сходимости процедуры идентификации возможно за счет проведения не одного, а нескольких экспериментов, каждый из которых отвечает своему виду нагружения. В качестве примера рассмотрена идентификация той же балки при проведении экспериментов с частотами возмущающей нагрузки $\omega = 1,5$ рад/с и $\omega = 4$ рад/с. Сходимость процесса идентификации для данного случая представлена на рис. 4, а, б. Для получения той же точности расчета (0,01%) потребовалось всего лишь 12 итераций. Таким образом, эффективность идентификационной процедуры существенно зависит от соответствующего подбора частоты внешней нагрузки.

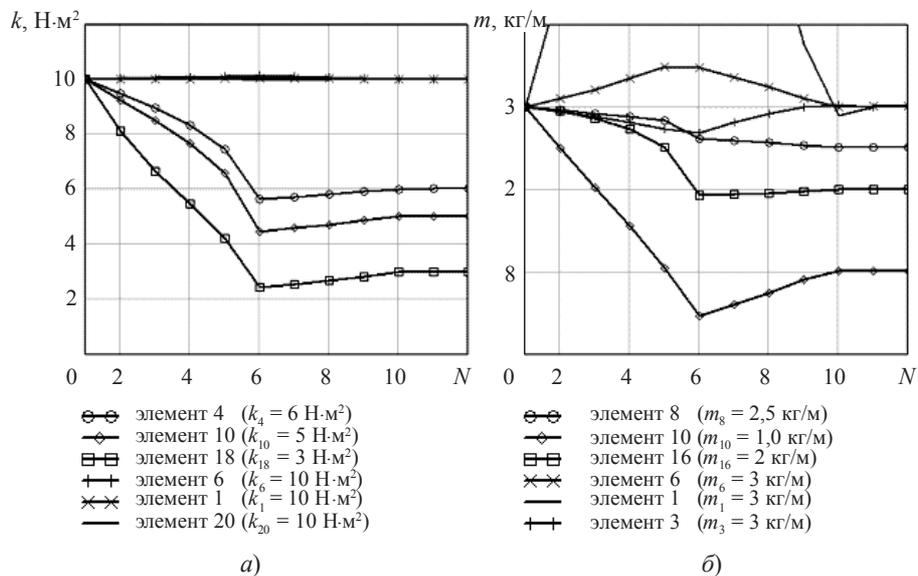


Рис. 4

Весьма эффективным оказывается метод идентификации, предусматривающий раздельное определение изменений жесткостных и инерционных характеристик системы с использованием результатов двух экспериментов. На основе данных первого статического эксперимента ($\omega=0$ рад/с) определяются изменения жесткости конечных элементов конструкции (рис. 5,а). При этом на седьмой итерации ошибка в определении жесткости поврежденной балки составляет менее 0,01%. На основе данных второго эксперимента (частота возмущающей силы $\omega=2$ рад/с) определяются изменения погонных масс конечных элементов (рис. 5,б).

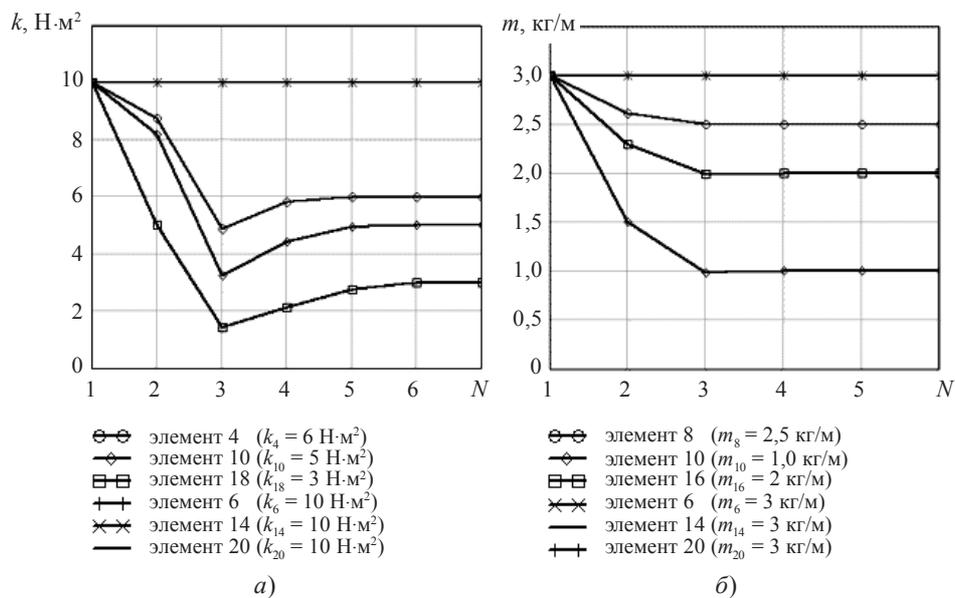


Рис. 5

Таким образом, при раздельном определении жесткостей и погонных масс конечных элементов поврежденной балки суммарное количество итераций (13), потребовавшихся для определения параметров поврежденной системы, оказалось более чем на порядок меньше числа итераций (271), необходимых для нахождения тех же параметров в рамках одного эксперимента с частотой возмущающей силы $\omega = 2$ рад/с.

Был также рассмотрен случай, когда изменения погонной массы и изгибной жесткости конечных элементов балки связаны между собой. Пусть рассмотренная выше балка имеет прямоугольное сечение. Тогда изгибная жесткость каждого из конечных элементов такой балки является кубической, а погонная масса – линейной функцией ее высоты. Предполагалось, что структурные повреждения приводят к уменьшению высоты балки в 4, 10 и 18-м элементах, в результате чего они становятся равными: $h_4 = 0,843h_0$, $h_{10} = 0,794h_0$, $h_{18} = 0,669h_0$, где h_0 – высота неповрежденной балки. В результате жесткость соответствующих конечных элементов уменьшается на величины: $dk_4 = 4$ Нм², $dk_{10} = 5$ Нм², $dk_{18} = 7$ Нм², а погонная масса – на величины: $dm_4 = 0,47$ кг/м, $dm_{10} = 0,619$ кг/м, $dm_{18} = 0,992$ кг/м.

При частоте внешней нагрузки $\omega = 2$ рад/с для решения задачи идентификации с погрешностью менее 0,01% потребовалось всего 12 итераций.

Заключение

1. Предложены новые подходы к решению задач идентификации упругой системы (конструкции). В качестве исходной информации используются перемещения системы при гармоническом внешнем воздействии. Задача идентификации сводится к решению системы нелинейных неявных уравнений. Для решения этой системы применен метод Ньютона в сочетании с методом наименьших квадратов.

2. Приведены многочисленные примеры использования предложенных подходов к решению задач идентификации балок. Они показывают их высокую эффективность.

3. При решении задач идентификации конструкций с большим числом степеней свободы наблюдается заметное ухудшение сходимости расчетного алгоритма. Требуется определенная модификация предложенных в данной работе подходов к решению задач идентификации на основе использования существующих методов регуляризации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00711).

Литература

1. Постнов, В.А. Определение повреждений упругих систем путем математической обработки частотных спектров, полученных из эксперимента / В.А. Постнов // Изв. РАН. МТТ. – 2000. – № 6. – С. 155–160.
2. Teughels, A. Damage assessment by FE modal updating using damage functions / A. Teughels, J. Maeck, D. Guido // Computers and structures. – 2002. – Vol. 80. – P. 1869–1879.
3. Lee, U. A frequency - domain method of structural identification formulated from the dynamic stiffness equation of motion / U. Lee, J. Shin // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – Vol. 257, No. 4. – P. 615–634.
4. Liu, G.R. A novel technique for inverse identification of distributed stiffness factor in structures / G.R. Liu, S.C. Chen // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – Vol. 254, No. 5. – P. 823–835.
5. Kim, J.T. Improved damage identification method based on modal information / J.T. Kim, N. Stubbs // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – Vol. 252, No. 2. – P. 223–238.

6. *Postnov, V.A.* Inverse eigenvalue problem and identification of structures / V.A. Postnov, U. Rohr, G. Schlotmann // *Mathematical Modeling in Solid Mechanics: Proc. of 20-th Int. Conf.*, St. Petersburg. 24–26 Sept. 2003. – St. Petersburg. – 2003. – Vol. 3. – P. 107–120.

7. *Alvin, K.F.* Structural system identification: from reality to modals / K.F. Alvin, A.N. Robertson, G.W. Reich, K.C. Park // *Computers and Structures*. – 2003. – Vol. 81. – P. 1149–1179.

8. *Постнов, В.А.* Использование экспериментальных данных об изменении динамических свойств упругих систем в задачах определения структурных повреждений / В.А. Постнов, Г. Шлотманн // *Вестник ННГУ. Серия Механика* / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2004. – Вып. 1(6). – С. 32–42.

9. *Постнов, В.А.* Использование метода конечных элементов для определения структурных повреждений / В.А. Постнов // *Вестник гражданских инженеров* / СПб.: Изд-во СПбГАСУ. – 2004. – № 1. – С. 70–76.

10. *Постнов, В.А.* Динамические матрицы жесткости балочных элементов и их использование в методе конечных элементов для расчета структурных повреждений стержневых систем / В.А. Постнов // *Вестник ННГУ. Серия Механика* / Н. Новгород: Изд-во ННГУ. – 2006. – Вып. 1(7). – С. 99–113.

[28.07.2006]

USE OF NEWTON METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF BEAM SYSTEM IDENTIFICATION

V.A. Postnov, G.A. Tumashik

The new approaches to solving identification problems of an elastic structure by the experimental data processing on the displacements of a damaged structure under given harmonic forces are proposed. The parameters of the system considered are determined subject to the displacement equality of the calculated model to the experimental displacements under the action of one and the same external dynamic loads. The use of Newton method in combination with the least squares method allows to construct an effective algorithm of determining design system parameters (law of stiffness and mass distribution over the structure volume). The results of numerical testing of the considered approaches, based on the examples of solving beam identification problems, are given in the paper.