

УДК 519.65:539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-147-155

О ГЛАДКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ТРИАНГУЛИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ*

© 2020 г. **Чекмарев Д.Т.¹, Абузьяров М.Х.¹, Cheng Wang²**

¹*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Пекинский технологический институт, Пекин, Китай*

4ekm@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 26.12.2019

Предложен метод и алгоритм перестроения в трехмерном пространстве триангуляции поверхности, заданной STL-файлом, в котором поверхность в трехмерном пространстве представляется в виде многогранника, составленного из треугольных граней. Метод основан на аналитическом представлении поверхности в виде кусочно-полиномиальной функции. Эта функция строится на многогранной поверхности, составленной из треугольников, и удовлетворяет следующим требованиям: 1) в пределах одной грани функция является алгебраическим полиномом третьей степени; 2) функция является непрерывной на всей поверхности и сохраняет непрерывность первых частных производных; 3) поверхность, определяемая функцией, проходит через вершины исходной триангулированной поверхности. Перестроение расчетных сеток требуется в случаях искажения формы ячеек при решении задач математической физики сеточными методами (конечно-разностными, конечно-элементными и т.д.). Искажение ячеек может быть обусловлено разными причинами. Это могут быть большие искажения подвижных лагранжевых сеток в расчетах в текущей конфигурации, при неустойчивости типа «песочные часы», при искажении граней поверхности раздела взаимодействующих газообразных, жидких и упругопластических тел.

Перестроение сетки сводится к решению задачи о построении гладкой поверхности, проходящей через узлы имеющейся триангулированной поверхности, или ее части. Далее на построенной гладкой поверхности размещаются узлы новой сетки, соответствующей имеющимся требованиям по размерам и форме ячеек. Построение гладкой кусочно-полиномиальной поверхности основывается на идеях сплайн-аппроксимации и сводится к построению на каждой треугольной грани кубического полинома с учетом гладкого сопряжения построенных на соседних гранях полиномиальных кусков поверхности.

Предложенный метод перестроения триангуляции поверхности может быть полезен для расчета движения деформируемых тел при решении задач динамики сплошных сред на неподвижных эйлеровых сетках.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты №19-58-53005 ГФЕН_а, №19-08-00320_а).

Ключевые слова: интерполяция, кубический сплайн, эрмитов интерполянт, лагранжево-эйлеров метод, подвижная граница.

Введение

Проблема перестроения треугольных сеток, аппроксимирующих границы или поверхности раздела деформируемых сред в трехмерном пространстве, весьма актуальна при численном решении динамических задач механики жидкости, газа и деформируемых твердых тел с учетом геометрической нелинейности [1–3]. Для численного решения динамических задач механики сплошных сред сеточными методами используются лагранжев (в начальной и текущей конфигурациях) и эйлеров подходы. В задачах механики деформируемого твердого тела традиционно используется метод конечных элементов в сочетании с лагранжевым подходом на подвижной сетке [4–7]. Альтернативой ему является метод конечных объемов (схема С.К. Годунова) [8–10], нашедший наибольшее применение при решении задач механики жидкости и газа, но иногда применяемый и для задач механики деформируемого твердого тела. В процессе численного решения задач узлы сетки движутся в пространстве, что может приводить к искажению сеток. Причинами таких искажений могут быть как реальные большие формоизменения тел в процессе деформирования, так и некоторые численные эффекты, например неустойчивость типа «песочные часы» [11–13]. Ухудшение качества методик численного решения при больших искажениях сеток приводит к необходимости перестройки сеток и переноса узловых значений физических полей на новые сетки [14].

В последнее время активно развиваются подходы к решению динамических задач механики сплошных сред на неподвижных эйлеровых сетках [15–18], в которых деформируемое тело движется сквозь равномерную ортогональную сетку, а граница тела или раздела двух сред интерполируется многогранной поверхностью, которая движется в процессе решения задачи.

При численном решении задач динамики упругопластических, жидких и газобразных сред на базе методики [18] расчеты проводятся на неподвижной равномерной ортогональной эйлеровой сетке, сквозь которую движется деформируемое тело. Граница тела (расчетной подобласти) задается в виде многогранной поверхности, составленной из треугольных граней (STL-файла). В процессе решения задачи вершины многогранной поверхности перемещаются, что во многих случаях может приводить к недопустимому деформированию треугольных граней. В частности, могут появляться грани слишком большого размера, чересчур вытянутые или сплюснутые и т.п. В связи с этим актуальна проблема локального перестроения триангулированных поверхностей. Предлагается подход к решению этой проблемы. В его основе лежит описанный в теории метода конечных элементов способ построения базисных функций конечных элементов высокого порядка [19, 20] в сочетании со сплайн-аппроксимацией [21, 22]. Указанный подход состоит в выполнении следующей последовательности действий.

1. Исходя из имеющихся критериев определяется подобласть, в которой необходима перестройка сетки треугольников, и на имеющихся гранях отмечаются точки – прообразы будущих новых вершин граней.

2. Определяются касательные плоскости к формируемой поверхности в вершинах граней.

3. На каждой грани в местной системе координат строится гладкая поверхность,

проходящая через вершины этой грани, касательная в вершинах к определяемым плоскостям.

4. В отмеченных на исходных гранях точках вычисляются координаты их образов – новых точек, лежащих на построенных поверхностях. Эти точки являются вершинами новой сетки из треугольников.

5. При необходимости производится стыковка новой локальной сетки с исходной сеткой и оптимизация полученной сетки одним из известных методов.

Построение поверхностей на гранях

Введем обозначения: \bar{V}_i – вершины триангулированной поверхности; \bar{E}_i – ребра граней; G_i – треугольные грани; \bar{n}_i – единичные векторы нормали к граням; \bar{N}_i – единичные векторы нормали в вершинах; $\bar{x} = (x, y, z)$ – глобальная декартова система координат; $\bar{\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma)$ – локальная декартова система координат; \bar{e}_i – базисные векторы локальной системы координат.

Пусть выделена локальная часть триангулированной поверхности, на которой производится перестройка сетки, содержащей множество граней $\{G_1, \dots, G_k\}$ и множество вершин этих граней $\{\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_m\}$. Определим единичные векторы нормали в вершинах с помощью соотношений

$$\bar{N}_i = \frac{\sum_{j \in S(i)} (\bar{n}_j / \rho(\bar{E}_i, \bar{x}_{cj}))}{|\sum_{j \in S(i)} (\bar{n}_j / \rho(\bar{E}_i, \bar{x}_{cj}))|} \quad (1)$$

Здесь $S(i)$ – множество номеров граней, инцидентных вершине \bar{E}_i ; \bar{x}_{cj} – координаты центра j -й грани; $\rho(\bar{E}_i, \bar{x}_{cj})$ – расстояние от вершины \bar{E}_i до центра j -й грани \bar{x}_{cj} .

Имея векторы нормалей \bar{N}_i , через каждую вершину проведем плоскость, ортогональную данному вектору, являющуюся касательной к конструируемой гладкой поверхности. Эта плоскость описывается уравнением в глобальной системе координат:

$$\bar{N}_i \cdot (\bar{V}_i - \bar{x}) = 0. \quad (2)$$

После построения касательных плоскостей можно переходить к построению поверхностей на гранях.

Введем в рассмотрение локальную систему координат $\bar{\alpha} = (\alpha, \beta, \gamma)$, связанную с гранью. Пусть грань имеет вершины $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ и ребра $\bar{E}_1 = \bar{V}_2 - \bar{V}_1$, $\bar{E}_2 = \bar{V}_3 - \bar{V}_1$, $\bar{E}_3 = \bar{V}_3 - \bar{V}_2$, \bar{n} – вектор нормали к грани. Начало координат поместим в вершину \bar{V}_1 , базисные векторы определим соотношениями:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{E}_1}{|\bar{E}_1|}, \quad \bar{e}_2 = \bar{n} \times \bar{e}_1, \quad \bar{e}_3 = \bar{n}. \quad (3)$$

В заданной системе координат грань лежит в координатной плоскости $\gamma = 0$, а формируемая поверхность может быть представлена полным кубическим полиномом в местной системе координат:

$$\gamma(\alpha, \beta) = C_0 + C_1\alpha + C_2\beta + C_3\alpha\beta + C_4\alpha^2 + C_5\beta^2 + C_6\alpha^2\beta + C_7\alpha\beta^2 + C_8\alpha^3 + C_9\beta^3. \quad (4)$$

Полином (4) может быть построен аналогично интерполяционному полиному Лагранжа по его значениям в 10 точках (см. [2, 3]). Точки определяются так (рис. 1):

$$\begin{aligned}\bar{P}_1 = \bar{V}_1, \quad \bar{P}_2 = \bar{V}_2, \quad \bar{P}_3 = \bar{V}_3, \quad \bar{P}_4 = \frac{2\bar{V}_1 + \bar{V}_2}{3}, \quad \bar{P}_5 = \frac{\bar{V}_1 + 2\bar{V}_2}{3}, \quad \bar{P}_6 = \frac{2\bar{V}_2 + \bar{V}_3}{3}, \\ \bar{P}_7 = \frac{\bar{V}_2 + 2\bar{V}_3}{3}, \quad \bar{P}_8 = \frac{\bar{V}_1 + 2\bar{V}_3}{3}, \quad \bar{P}_9 = \frac{2\bar{V}_1 + \bar{V}_3}{3}, \quad \bar{P}_{10} = \frac{\bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3}{3}.\end{aligned}$$

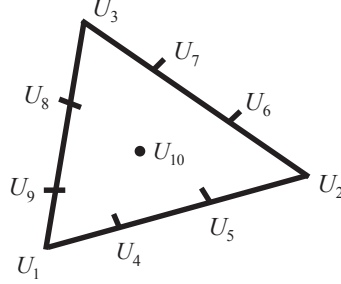


Рис. 1

Поскольку поверхность должна проходить через вершины треугольника, то значения функции $U_i = \gamma(\bar{P}_i)$ в точках P_1, P_2, P_3 равны нулю: $U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = 0$.

Значения $U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9$ будем строить с помощью кубического сплайна дефекта 2 (эрмитова интерполянта) [21] на ребрах $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$. Для этого воспользуемся условием, что касательные плоскости в вершинах $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$ будут касательными к формируемой поверхности. Отсюда получим значения производных по направлениям $\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$ в соответствующих вершинах:

$$\begin{aligned}q_{11} = \frac{\partial\gamma(\bar{V}_1)}{\partial\bar{E}_1} = -\frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{e}_1}{\bar{N}_1 \cdot \bar{e}_3}, \quad q_{12} = \frac{\partial\gamma(\bar{V}_2)}{\partial\bar{E}_1} = -\frac{\bar{N}_2 \cdot \bar{e}_1}{\bar{N}_2 \cdot \bar{e}_3}, \\ q_{21} = \frac{\partial\gamma(\bar{V}_1)}{\partial\bar{E}_2} = -\frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{E}_2}{|\bar{E}_2| \bar{N}_1 \cdot \bar{e}_3}, \quad q_{23} = \frac{\partial\gamma(\bar{V}_3)}{\partial\bar{E}_2} = -\frac{\bar{N}_3 \cdot \bar{E}_2}{|\bar{E}_2| \bar{N}_3 \cdot \bar{e}_3}, \\ q_{32} = \frac{\partial\gamma(\bar{V}_2)}{\partial\bar{E}_3} = -\frac{\bar{N}_2 \cdot \bar{E}_3}{|\bar{E}_3| \bar{N}_2 \cdot \bar{e}_3}, \quad q_{33} = \frac{\partial\gamma(\bar{V}_3)}{\partial\bar{E}_3} = -\frac{\bar{N}_3 \cdot \bar{E}_3}{|\bar{E}_3| \bar{N}_3 \cdot \bar{e}_3}.\end{aligned}\quad (5)$$

Вычисляя значения полиномов Эрмита в точках с 4-й по 9-ю, получим окончательные формулы:

$$\begin{aligned}U_4 = \frac{2|\bar{E}_1|}{27}(2q_{11} - q_{12}), \quad U_5 = \frac{2|\bar{E}_1|}{27}(q_{11} - 2q_{12}), \quad U_6 = \frac{2|\bar{E}_3|}{27}(2q_{32} - q_{33}), \\ U_7 = \frac{2|\bar{E}_3|}{27}(q_{32} - 2q_{33}), \quad U_8 = \frac{2|\bar{E}_2|}{27}(q_{21} - 2q_{23}), \quad U_9 = \frac{2|\bar{E}_2|}{27}(2q_{21} - q_{23}).\end{aligned}\quad (6)$$

Значения в центре треугольной грани определим, используя описанный в [19, 20] метод конденсации:

$$U_{10} = \frac{1}{4} \sum_{i=4}^9 U_i - \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 U_i.\quad (7)$$

Имея значения полинома (4) в десяти точках, можно составить систему уравнений относительно его коэффициентов и решить ее. Более удобно строить полином по формуле, аналогичной формуле интерполяционного полинома Лагранжа:

$$\gamma(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{10} U_i \varphi_i(\alpha, \beta),\quad (8)$$

где функции формы $\varphi_i(\alpha, \beta)$ определяются следующим образом. Пусть $L_{ij}(\alpha, \beta) = (\alpha - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i) - (\beta - \beta_i)(\alpha_j - \alpha_i)$ – линейная функция, которая обращается в ноль на прямой, соединяющей точки $\bar{P}_i = (\alpha_i, \beta_i, 0)$ и $\bar{P}_j = (\alpha_j, \beta_j, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(\alpha, \beta) &= \frac{L_{23}(\alpha, \beta)L_{58}(\alpha, \beta)L_{49}(\alpha, \beta)}{L_{23}(\alpha_1, \beta_1)L_{58}(\alpha_1, \beta_1)L_{49}(\alpha_1, \beta_1)}, \\
 \varphi_2(\alpha, \beta) &= \frac{L_{13}(\alpha, \beta)L_{47}(\alpha, \beta)L_{56}(\alpha, \beta)}{L_{13}(\alpha_2, \beta_2)L_{47}(\alpha_2, \beta_2)L_{56}(\alpha_2, \beta_2)}, \\
 \varphi_3(\alpha, \beta) &= \frac{L_{12}(\alpha, \beta)L_{69}(\alpha, \beta)L_{78}(\alpha, \beta)}{L_{12}(\alpha_3, \beta_3)L_{69}(\alpha_3, \beta_3)L_{78}(\alpha_3, \beta_3)}, \\
 \varphi_4(\alpha, \beta) &= \frac{L_{13}(\alpha, \beta)L_{23}(\alpha, \beta)L_{58}(\alpha, \beta)}{L_{13}(\alpha_4, \beta_4)L_{23}(\alpha_4, \beta_4)L_{58}(\alpha_4, \beta_4)}, \\
 \varphi_5(\alpha, \beta) &= \frac{L_{13}(\alpha, \beta)L_{23}(\alpha, \beta)L_{47}(\alpha, \beta)}{L_{13}(\alpha_5, \beta_5)L_{23}(\alpha_5, \beta_5)L_{47}(\alpha_5, \beta_5)}, \\
 \varphi_6(\alpha, \beta) &= \frac{L_{12}(\alpha, \beta)L_{13}(\alpha, \beta)L_{47}(\alpha, \beta)}{L_{12}(\alpha_6, \beta_6)L_{13}(\alpha_6, \beta_6)L_{47}(\alpha_6, \beta_6)}, \\
 \varphi_7(\alpha, \beta) &= \frac{L_{12}(\alpha, \beta)L_{13}(\alpha, \beta)L_{69}(\alpha, \beta)}{L_{12}(\alpha_7, \beta_7)L_{13}(\alpha_7, \beta_7)L_{69}(\alpha_7, \beta_7)}, \\
 \varphi_8(\alpha, \beta) &= \frac{L_{12}(\alpha, \beta)L_{23}(\alpha, \beta)L_{69}(\alpha, \beta)}{L_{12}(\alpha_8, \beta_8)L_{23}(\alpha_8, \beta_8)L_{69}(\alpha_8, \beta_8)}, \\
 \varphi_9(\alpha, \beta) &= \frac{L_{12}(\alpha, \beta)L_{23}(\alpha, \beta)L_{58}(\alpha, \beta)}{L_{12}(\alpha_9, \beta_9)L_{23}(\alpha_9, \beta_9)L_{58}(\alpha_9, \beta_9)}, \\
 \varphi_{10}(\alpha, \beta) &= \frac{L_{12}(\alpha, \beta)L_{23}(\alpha, \beta)L_{13}(\alpha, \beta)}{L_{12}(\alpha_{10}, \beta_{10})L_{23}(\alpha_{10}, \beta_{10})L_{13}(\alpha_{10}, \beta_{10})}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Окончательное значение функции получаем по формуле (8).

В итоге построение новых вершин поверхности производится по следующему общему алгоритму:

- 1) сетка из треугольников нужного размера («заплатка») проецируется на исходную триангулированную поверхность;
- 2) для каждой грани, содержащей хотя бы один образ узла «заплатки», в вершинах строятся векторы нормали к поверхности;
- 3) по описанному выше алгоритму вычисляются значения функции в 10 точках грани;
- 4) по формуле (8) вычисляется локальная координата γ новой точки поверхности;
- 5) вычисляются глобальные координаты новой вершины поверхности;
- 6) полученные вершины объединяются в новые грани;
- 7) происходит стыковка новых и старых граней исправленной поверхности.

Стыковка поверхностей, построенных на гранях

Поверхности, построенные на гранях по описанному выше алгоритму (формула (8)), гладко стыкуются в вершинах треугольников. Но они не образуют общей

непрерывной гладкой поверхности, так как если у двух соседних граней (имеющих общее ребро) векторы нормали различны, то между ними будет промежуток (рис. 2).

В соответствии с алгоритмом построения ни одна из вновь построенных точек новой поверхности не попадет в какой-либо из промежутков, и они останутся незаполненными. Во многих случаях эту проблему можно игнорировать, так как при малом отличии векторов нормалей соседних граней эти разрывы будут весьма малы и их существование мало скажется на итоговом результате. Опишем, тем не менее, алгоритм гладкого сопряжения поверхностей, построенных на треугольных гранях. Для этого в каждой треугольной грани выделим зоны (рис. 3).

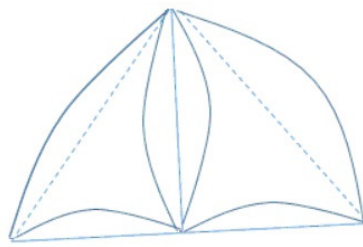


Рис. 2

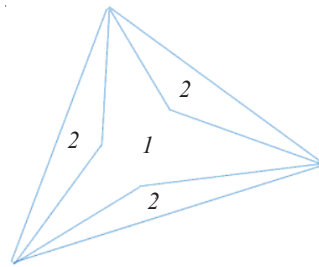


Рис. 3

Зона 2 состоит из трех треугольников, примыкающих к ребрам граней. Если прообраз новой вершины попадает в зону 1, то новая вершина строится по описанному выше алгоритму. Если же она попадает в зону 2, то выполняются следующие действия. Пусть прообраз новой вершины – точка \bar{A} i -й грани, лежащая вблизи границы j -й грани (рис. 4).

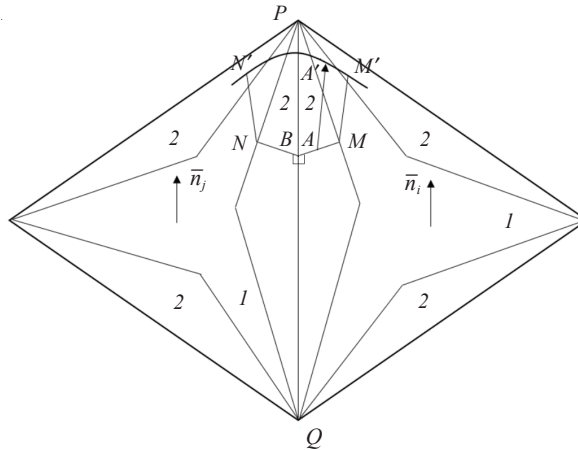


Рис. 4

Из этой точки опускается перпендикуляр \bar{AB} на общее ребро \bar{PQ} с j -й гранью. Этот же перпендикуляр продолжается до границы зоны 2 – точки \bar{M} . Из точки \bar{B} в j -й грани восстанавливается перпендикуляр \bar{BN} к ребру \bar{PQ} до границы зоны 2. В точках \bar{M} и \bar{N} с помощью формулы (8) определяются точки новой поверхности \bar{M}' и \bar{N}' (каждая в своей локальной системе координат своей грани) и производные по направлениям \bar{BM} и \bar{NB} соответственно.

Далее значения функций и производных пересчитываются в новую локальную систему координат с базисом

$$\bar{e}_1 = \frac{\overline{PQ}}{|\overline{PQ}|}, \quad \bar{e}_2 = \bar{e}_3 \times \bar{e}_1, \quad \bar{e}_3 = \frac{\bar{n}_i + \bar{n}_j}{|\bar{n}_i + \bar{n}_j|}$$

и строится интерполяционный полином Эрмита по значениям функций и производных в двух точках \bar{M} и \bar{N} . Вычисленное значение в точке \bar{A} позволяет получить новую точку поверхности \bar{A}' . Далее остается только преобразовать ее координаты в глобальную систему координат.

Заключение

Описан метод и алгоритм перестроения триангуляции поверхности на базе гладкой интерполяции. Метод базируется на сплайн-интерполяции с использованием кубических полиномов. Построенные на гранях поверхности гладко сопрягаются в узлах и на ребрах. Предложенные метод и алгоритм могут быть полезны при численном решении трехмерных динамических задач механики сплошных сред с подвижными границами раздела движущихся твердых, жидких и газообразных тел.

Список литературы

1. Truesdell C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. New York: Academic Press, 1977. 304 p.
2. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. М.: Наука, 1986. 232 с.
3. Голованов А.И., Султанов Л.У. *Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред*. Казань: КГУ, 2009. 464 с.
4. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. In: *Methods in Computational Physics. Vol. 3. Fundamental Methods in Hydrodynamics*. New York: Academic Press, 1964. P. 211–263.
5. Hallquist J.O. *LS-DYNA Theory Manual*. Livermore: Livermore Software Technology Corporation, 2015. 680 p.
6. *AUTODYN-2D & 3D User Documentation*. Century Dynamics, 2005. 73 p.
7. Hallquist J.O. *Theoretical Manual for DYNA3D*. Livermore: Lawrence Livermore National Laboratory, 1982. 366 p.
8. Christensen R.B. *Godunov Methods on a Staggered Mesh. An Improved Artificial Viscosity*. Livermore: Lawrence Livermore National Laboratory, 1990. 11 p.
9. Van Leer B. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Computational Physics*. 1977. Vol. 14. No 4. P. 361–370.
10. Van Dorsselaer N., Eveillard S., Trélat S. Experiments and simulations of explosives: shock wave propagation around a convex structure. *15th International LS-DYNA Users Conference*. Detroit. June 10-12, 2018. P. 1–10.
11. Flanagan D.P., Belytschko T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1981. Vol. 17. P. 679–706. DOI:10.1002/nme.1620170504.
12. Баженов В.Г., Кибец А.И., Тулинцев О.В. Применение моментной схемы МКЭ для анализа нелинейных трехмерных задач динамики массивных и оболочечных элементов конструкций. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения*. 1991. Вып. 47. С. 46–53.
13. Ganzenmüller G., Sauer M., May M. et al. Hourglass control for smooth particle hydrodynamics removes tensile and rank-deficiency instabilities. *The European Physical Journal Special Topics*. 2016. Vol. 225. P. 385–395. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2016-02631-x>.
14. Dukowicz J. K. Conservative rezoning (remapping) for general quadrilateral meshes. *Journal of Computational Physics*. 1984. Vol. 54. P. 411–424.
15. Puso M., Sanders J., Settigast R., Liu B. An embedded mesh method in a multiple material ALE. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2012. Vol. 245-246. P. 273289. DOI: 10.1016/j.cma.2012.07.014.

16. Gilson L., Van Roey J., Gueders C., Gallant J., Rabet L. A simple coupling of ALE domain with empirical blast load function in LS-DYNA. *DYMAT 2012 – 10th International Conference on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading*. Aug. 31, 2012. DOI: 10.1051/epjconf/20122604018.
17. Schwer L. A brief introduction to coupling load blast enhanced with multi-material ALE: The best of both worlds for air blast simulation. *9th LS-DYNA Forum*. Bamberg, 2010. P. 1–12.
18. Абузьяров К.М., Абузьяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В., Маслов Е.Е., Романов В.И. Численное моделирование трехмерных задач разгона упругопластических тел взрывом. *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80. №2. С. 255–266.
19. Норри Д., де Фриз Ж. *Введение в метод конечных элементов*. М.: Мир, 1981. 304 с.
20. Mitchell A.R., Wait R. *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*. London – New York – Sydney – Toronto: John Wiley & Sons, 1977. 198 p.
21. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. *Численные методы и программное обеспечение*. М.: Мир, 2001. 575 с.
22. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике*. М.: Наука, 1976. 248 с.

References

1. Truesdell C. *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. New York. Academic Press. 1977. 304 p.
2. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bolshie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya [Large Elastoplastic Deformations. Theory, Algorithms, Applications]*. Moscow. Nauka Publ. 1986. 232 p. (In Russian).
3. Golovanov A.I., Sultanov L.U. *Matematicheskie modeli vychislitelnoy nelineynoy mekhaniki deformiruemyykh sred [Mathematical Models of Computational Mechanics of Deformable Continuous Medium]*. Kazan. Kazan State University Publ. 2009. 464 p. (In Russian).
4. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. In: *Methods in Computational Physics. Vol. 3. Fundamental Methods in Hydrodynamics*. New York. Academic Press. 1964. P. 211–263.
5. Hallquist J.O. *LS-DYNA Theory Manual*. Livermore. Livermore Software Technology Corporation. 2015. 680 p.
6. *AUTODYN-2D & 3D User Documentation*. Century Dynamics. 2005. 73 p.
7. Hallquist J.O. *Theoretical Manual for DYNA3D*. Livermore. Lawrence Livermore National Laboratory. 1982. 366 p.
8. Christensen R.B. *Godunov Methods on a Staggered Mesh. An Improved Artificial Viscosity*. Livermore. Lawrence Livermore National Laboratory. 1990. 11 p.
9. Van Leer B. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *J. Comp. Phys.* 1977. Vol. 14. No 4. P. 361–370.
10. Van Dorselaer N., Eveillard S., Trélat S. Experiments and simulations of explosives: shock wave propagation around a convex structure. *15th International LS-DYNA Users Conference*. Detroit. June 10-12, 2018. P. 1–10.
11. Flanagan D.P., Belytschko T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1981. Vol. 17. P. 679–706. DOI:10.1002/nme.1620170504.
12. Bazhenov V.G., Kibets A.I., Tulintsev O.V. Primenenie momentnoy skhemy MKE dlya analiza nelineynykh trekhmernykh zadach dinamiki massivnykh i obolocheynykh elementov konstruktsiy [Application of the FEM moment scheme for the analysis of nonlinear 3D problems of the dynamics of massive and shell structural elements]. *Problemy prochnosti i plastichnosti. Metody resheniya [The Problems of Strength and Plasticity. Analysis Methods]*. 1991. Iss. 47. P. 46–53 (In Russian).
13. Ganzenmüller G., Sauer M., May M. et al. Hourglass control for smooth particle hydrodynamics removes tensile and rank-deficiency instabilities. *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2016. Vol. 225. P. 385–395. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2016-02631-x>.
14. Dukowicz J. K. Conservative rezoning (remapping) for general quadrilateral meshes. *J. Comp. Phys.* 1984. Vol. 54. P. 411–424.
15. Puso M., Sanders J., Settgast R., Liu B. An embedded mesh method in a multiple material

- ALE. *Comput. Method Appl. M.* 2012. Vol. 245-246. P. 273–289. DOI: 10.1016/j.cma.2012.07.014.
16. Gilson L., Van Roey J., Gueders C., Gallant J., Rabet L. A simple coupling of ALE domain with empirical blast load function in LS-DYNA. *DYMAT 2012 – 10th International Conference on the Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading*. Aug. 31, 2012. DOI: 10.1051/epjconf/20122604018.
17. Schwer L. A brief introduction to coupling load blast enhanced with multi-material ALE: The best of both worlds for air blast simulation. *9th LS-DYNA Forum*. Bamberg. 2010. P. 1–12.
18. Abuzyarov K.M., Abuzyarov M.Kh., Glazova E.G., Kochetkov A.V., Krylov S.V., Maslov E.E., Romanov V.I. Chislennoe modelirovanie trekhmernykh protsessov razgona uprugoplasticheskikh tel vzryvom [Numerically modeling 3D processes of explosive acceleration of elastoplastic bodies]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [The Problems of Strength and Plasticity]*. 2018. Vol. 80. No 2. P. 255–266 (In Russian).
19. Norrie D.H., De Vries G. *An Introduction to Finite Element Analysis*. New York. San Francisco. London. Academic Press. 1978. 378 p.
20. Mitchell A.R., Wait R. *The Finite Element Method in Partial Differential Equations*. London. New York. Sydney. Toronto. John Wiley & Sons. 1977. 198 p.
21. Kahaner D., Moler C., Nash S. *Numerical Methods and Software*. Prentice Hall. 1988. 495 p.
22. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splayny v vychislitelnoy matematike [Splines in Computational Mathematics]*. Moscow. Nauka Publ. 1976. 248 p. (In Russian).

ABOUT SMOOTH INTERPOLATION OF A TRIANGULATED SURFACE

Chekmarev D.T.¹, Abuzyarov M.Kh.¹, Cheng Wang²

¹*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

³*Beijing Institute of Technology, Beijing, China*

A method and algorithm for rebuilding a surface triangulation in three-dimensional space defined by an STL file is proposed. An initial surface in 3D space (STL file) is represented as a polyhedron composed of triangular faces. The method is based on the analytical representation of the surface as a piecewise polynomial function. This function is built on a polyhedral surface composed of triangles and satisfies the following requirements: 1) within one face, the function is an algebraic polynomial of the third degree; 2) the function is continuous on the entire surface and preserves the continuity of the first partial derivatives; 3) the surface determined by the function passes through the vertices of the initial triangulated surface. The restructuring of computational meshes is required in cases of distortion of the shape of cells when solving problems of mathematical physics using mesh methods (finite-difference, FEM, etc.). Cell distortion can be due to various reasons. These can be large distortions of moving Lagrangian meshes in the calculations in the current configuration, with instability of the hourglass type, with distortion of the faces of the interface between interacting gaseous, liquid and elastoplastic bodies.

The rebuilding of the mesh reduces to solving the problem of constructing a smooth surface passing through the nodes of an existing triangulated surface or part of it. Later the nodes of the new mesh are placed on the constructed smooth surface with existing requirements for the size and shape of the cells. The construction of a smooth piecewise polynomial surface is based on the ideas of spline approximation and reduces to the building of a cubic polynomial on each triangular face, taking into account the smooth conjugation of polynomial pieces of the surface constructed on adjacent faces.

The proposed method for rebuilding surface triangulation can be useful for calculating the motion of deformable bodies when solving problems of the dynamics of continuous media on immovable Euler grids.

Keywords: interpolation, cubic spline, hermitian interpolant, Lagrangian–Euler method, moving border.