

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-123-134

О КОЛЕБАНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО СЛОИСТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА*

© 2020 г.

Леви Г.Ю., Игумнов Л.А.

*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

galias@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.03.2020

Исследуются контактные задачи о возбуждении гармонических колебаний термоупругого слоистого преднапряженного тела осциллирующим жестким штампом на его поверхности. На границе раздела сред рассмотрены два режима механических условий при идеальном тепловом контакте: жесткое сцепление и отсутствие трения по одной из координат. Начально-деформированное состояние создается за счет тепловых и механических воздействий. Для отыскания решения контактных задач введены краевые задачи с однородными граничными условиями на поверхности. Построена функция Грина вспомогательных задач. Методами операционного исчисления система интегральных уравнений относительно функции распределения напряжений сведена к одномерному интегральному уравнению. Его решение получено с использованием метода фиктивного поглощения. Рассмотрены контактные задачи о колебаниях полупространства из оксида магния с покрытием из сульфида кадмия. Вычислено и представлено на графиках решение задач – распределение вертикальных смещений на всей поверхности термоупругого преднапряженного тела. Исследовано влияние предварительного нагрева покрытия и условий на границе раздела сред на распределение по поверхности слоистого полупространства вертикальных напряжений и смещения. Показано, что в условиях преднагрева и растяжения слоя в направлении горизонтальной координаты при воздействии жесткого штампа на поверхности возникают бóльшие вертикальные напряжения в случае жесткого защемления покрытия с основанием, чем при неидеальном сцеплении. На вертикальные смещения вне области контакта преднагрев и растяжение слоя, напротив, влияют больше при неидеальной сцепке.

Ключевые слова: термоупругость, контактная задача, предварительный нагрев, напряжения, начальная деформация, колебания.

Введение

Развитие современных технологий вызывает значительный интерес к процессам возбуждения механических колебаний за счет воздействия лазерного излуче-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-38-50032).

ния [1, 2]. Достаточно обширный обзор публикаций в этой области приведен в [3]. В большинстве работ для исследования используются подходы, позволяющие эффективно анализировать различные аспекты динамических процессов термоупругости. Это прежде всего особенности распространения объемных [4, 5] и рэлеевских [6] волн. Вопросы наличия начальных напряжений [7] занимают особое место в проблеме распространения термоупругих волн в полуграниченных телах. В статье [8], следуя подходу, рассмотренному в монографии [9], была проведена последовательная линеаризация нелинейных уравнений термоупругой среды, а также построены уравнения движения и определяющие соотношения динамики предварительно напряженной термоупругой среды. Интерес представляют вопросы контактного взаимодействия однородных и неоднородных тел [10–16]. В публикациях [17–21] исследовались спектральные свойства преднапряженных термоупругих тел. В настоящей статье в рамках линеаризованной теории распространения связанных термоупругих волн [8] рассмотрена контактная задача о колебании структурно неоднородного полупространства под действием механической нагрузки, индуцируемой на поверхности среды.

1. Постановка задачи

Рассмотрим две контактные задачи о возбуждении колебаний в слоистом термоупругом теле, находящемся под действием однородного начального напряжения, обусловленного механической нагрузкой и температурным воздействием. Тело представлено слоем $-h \leq x_3 \leq 0$, лежащим на полупространстве $x_3 \leq -h$. На границе слоя с полупространством выполняются условия идеального теплового контакта и жесткого сцепления (задача I) или сцепления с отсутствием трения по координате x_1 (задача II). Колебания $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ($\{u_1, u_2, u_3\}$ – компоненты вектора механических перемещений, u_4 – температура) вызваны колебаниями в области $\Omega = \{|x_1| \leq 1, |x_2| < \infty\}$ на поверхности слоя жесткого штампа, то есть $\mathbf{u}_0 e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{u}_0 = \{0, 0, u_3^0, 0\}$ – расширенный вектор смещения поверхности тела, ω – круговая частота колебаний). Вне области нагрузки поверхность тела предполагается теплоизолированной, свободной от механических напряжений.

В общем случае колебания преднапряженной слоистой термоупругой среды описываются уравнениями движения и теплопроводности [9, 22, 23]:

$$\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad \Theta_{ij}^{(n)} = c_{ijkl}^{(n)*} u_{k,l}^{(n)} - \beta_{ij}^{(n)*} u_4^{(n)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (1)$$

$$\lambda_{ik}^{(n)} u_{4,ik}^{(n)} = \frac{\tau_1^{(n)}}{\tau_0} c_{\varepsilon}^{(n)} \rho^{(n)} \frac{\partial u_4^{(n)}}{\partial t} + \tau_1^{(n)} \beta_{ik}^{(n)*} \frac{\partial u_{k,i}^{(n)}}{\partial t}, \quad n = 0, 1. \quad (2)$$

Здесь индекс $n=0$ соответствует параметрам полупространства, $n=1$ – параметрам слоя.

Участвующие в уравнениях (1), (2) константы среды при однородной начальной деформации и преднагреве определяются выражениями [8]:

$$c_{ijkl}^{(n)*} = \frac{\delta_{kj}}{2} c_{ilmm}^{(n)} (v_m^{(n)2} - 1) + c_{ijkl}^{(n)} v_j^{(n)} v_k^{(n)} - \delta_{kj} (\tau_1^{(n)} - \tau_0) \beta_{il}^{(n)}, \quad \beta_{ij}^{(n)*} = v_j^{(n)} \beta_{ij}^{(n)}. \quad (3)$$

В выражениях (1)–(3) по индексам, повторяющимся в одном слагаемом, проводится суммирование в диапазоне значений 1–3.

Перейдем к безразмерным нормализованным параметрам, как описано в [4, 10–20]. В формулах (1)–(3) $c_{ijkl}^{(n)}, \lambda_{ij}^{(n)}, \alpha_{ij}^{(n)}, \beta_{kl}^{(n)} = \alpha_{ij}^{(n)} c_{ijkl}^{(n)}$ – компоненты тензоров упругих постоянных, коэффициентов удельной теплопроводности, теплового расширения, термоупругости; $\rho^{(n)}$ – плотность материала в естественном состоянии; $c_\varepsilon^{(n)}$ – удельная теплоемкость; τ_0 и $\tau_1^{(n)}$ – соответственно температура тела в недеформированном состоянии и температура n -го слоя в начальном деформированном состоянии; $v_k^{(n)} = 1 + \delta_k^{(n)}$, где $\delta_k^{(n)}$ ($k = 1, 2, 3$) – относительные удлинения волокон тела, направленных вдоль координатных осей. Предполагается, что колебания происходят по гармоническому закону, поэтому все функции представляются в виде $f = f_0 e^{-i\omega t}$. Далее нули в индексах, экспоненты и штрихи опущены.

Введем расширенный вектор поверхностных напряжений

$$\mathbf{q}^{(1)} = \left\{ \theta_{31}^{(1)}, \theta_{32}^{(1)}, \theta_{33}^{(1)}, -\frac{\lambda_{33}^{(1)} \partial u_4^{(1)}}{\partial x_3} \right\}.$$

Запишем линейризованные граничные условия:

$$x_3 = 0: \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)\tau} &= \mathbf{u}_0^\tau, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \\ \mathbf{q}^{(1)\tau} &= 0, \quad (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

$$x_3 = -h: \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)\tau} &= \mathbf{u}^{(0)\tau}, \\ \mathbf{q}^{(1)\tau} &= \mathbf{q}^{(0)\tau}, \end{aligned} \quad (I) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} &= u_2^{(0)}, \quad u_3^{(1)} = u_3^{(0)}, \quad u_4^{(1)} = u_4^{(0)}, \\ q_2^{(1)} &= q_2^{(0)}, \quad q_3^{(1)} = q_3^{(0)}, \quad q_4^{(1)} = q_4^{(0)}, \quad (III) \\ q_1^{(1)} &= 0, \quad q_1^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Вспомогательные краевые задачи

Для решения задач со смешанными граничными условиями на поверхности (1), (2), (4)–(6) введем вспомогательные краевые задачи с однородными условиями [10–20]. Полагаем, что колебания в теле возбуждаются распределенным на поверхности слоя вертикальным напряжением $\mathbf{q}_0 = \{0 \ 0 \ q_3 \ 0\}$. Тогда перепишем граничные условия (4) в виде:

$$x_3 = 0: \quad \mathbf{q}^{(1)\tau} = \begin{cases} \mathbf{q}_0^\tau(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega. \end{cases} \quad (7)$$

К системе уравнений движения (1) и теплопроводности (2), граничным условиям (5)–(7) применим одномерное преобразование Фурье по координате x_1 и будем рассматривать случай плоских колебаний [18]:

$$\begin{aligned} -\alpha^2 c_{1111}^{(n)*} U_1^{(n)} + c_{3113}^{(n)*} U_1^{(n)} + \omega^2 U_1^{(n)} - i\alpha c_2^{(n)} U_3^{(n)} + i\alpha \beta_{11}^{(n)*} U_4^{(n)} &= 0, \\ -i\alpha c_2^{(n)} U_1^{(n)} - \alpha^2 c_{1331}^{(n)*} U_3^{(n)} + \omega^2 U_3^{(n)} + c_{3333}^{(n)*} U_3^{(n)} - \beta_{33}^{(n)*} U_4^{(n)} &= 0, \\ -\alpha^2 U_4^{(n)} + \lambda_{33}^{(n)} U_4^{(n)} + i\omega \theta_1^{(n)} U_4^{(n)} + i\omega E^{(n)} (-i\alpha \beta_{11}^{(n)*} U_1^{(n)} + \beta_{33}^{(n)*} U_3^{(n)}) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$x_3 = 0: \begin{cases} c_{3113}^{(1)*} U_1^{(1)} - i\alpha c_{1313}^{(1)*} U_3^{(1)} = 0, \\ c_{3333}^{(1)*} U_3^{(1)} - i\alpha c_{1133}^{(1)*} U_1^{(1)} - \beta_{33}^{(1)*} U_4^{(1)} = Q_3, \\ -\lambda_{33}^{(1)*} U_4^{(1)} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

$$x_3 = -h: \begin{cases} U_3^{(1)} = U_3^{(0)}, U_4^{(1)} = U_4^{(0)}, \\ c_{3333}^{(1)*} U_3^{(1)} - i\alpha c_{1133}^{(1)*} U_1^{(1)} - \beta_{33}^{(1)*} U_4^{(1)} = \\ = c_{3333}^{(0)*} U_3^{(0)} - i\alpha c_{1133}^{(0)*} U_1^{(0)} - \beta_{33}^{(0)*} U_4^{(0)}, \\ -\lambda_{33}^{(1)*} U_4^{(1)} = -\lambda_{33}^{(0)*} U_4^{(0)} \end{cases} \quad (10)$$

$$x_3 = -h: \begin{cases} U_1^{(1)} = U_1^{(0)}, \\ c_{3113}^{(1)*} U_1^{(1)} - i\alpha c_{1313}^{(1)*} U_3^{(1)} = c_{3113}^{(0)*} U_1^{(0)} - i\alpha c_{1313}^{(0)*} U_3^{(0)}, \end{cases} \quad (I) \quad (11)$$

$$x_3 = -h: \begin{cases} c_{3113}^{(1)*} U_1^{(1)} - i\alpha c_{1313}^{(1)*} U_3^{(1)} = 0, \\ c_{3113}^{(0)*} U_1^{(0)} - i\alpha c_{1313}^{(0)*} U_3^{(0)} = 0. \end{cases} \quad (III)$$

Здесь введен параметр одномерного преобразования Фурье α и и постоянная термоупругой связи

$$E^{(n)} = \frac{T_0 \beta_1^{(n)*} \beta_1^{(0)}}{\rho_0 c_\varepsilon^{(n)} c_{11}^{(n)*}}.$$

3. Решение вспомогательных краевых задач

Решение системы (8)–(11) будем искать в виде [18–20]:

$$U_1^{(1)}(\alpha, x_3, \omega) = -i\alpha \sum_{k=1}^3 f_{1k}^{(1)} (C_k \operatorname{sh}(\sigma_k^{(1)} x_3) + C_{k+3} \operatorname{ch}(\sigma_k^{(1)} x_3)),$$

$$U_3^{(1)}(\alpha, x_3, \omega) = \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(1)} (C_k \operatorname{ch}(\sigma_k^{(1)} x_3) + C_{k+3} \operatorname{sh}(\sigma_k^{(1)} x_3)), \quad (12)$$

$$U_4^{(1)}(\alpha, x_3, \omega) = \sum_{k=1}^3 f_{4k}^{(1)} (C_k \operatorname{sh}(\sigma_k^{(1)} x_3) + C_{k+3} \operatorname{ch}(\sigma_k^{(1)} x_3)), \quad -h \leq x_3 \leq 0;$$

$$U_1^{(0)}(\alpha, x_3, \omega) = -i\alpha \sum_{k=1}^3 f_{1k}^{(0)} D_k \exp(\sigma_k^{(0)} x_3),$$

$$U_3^{(0)}(\alpha, x_3, \omega) = \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(0)} D_k \exp(\sigma_k^{(0)} x_3),$$

$$U_4^{(0)}(\alpha, x_3, \omega) = \sum_{k=1}^3 f_{4k}^{(0)} D_k \exp(\sigma_k^{(0)} x_3), \quad x_3 \leq -h. \quad (13)$$

В (12), (13) σ_k находятся численно для каждого значения α и ω из характеристического уравнения, приведенного в [11]. Для отыскания неизвестных коэффициентов C_k , D_k подставим решения (12), (13) в граничные условия и получим систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{LC} = \mathbf{Q}, \quad (14)$$

где $\mathbf{Q} = \{0 \ Q_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$, Q_3 – образ Фурье q_3 . Дисперсионное уравнение задач:

$$\det \mathbf{L}^{(BE)} = 0.$$

$$\mathbf{L}^I = \begin{pmatrix} l_{11}^{(1)} & l_{12}^{(1)} & l_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{31}^{(1)} & l_{32}^{(1)} & l_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ l_{41}^{(1)} & l_{42}^{(1)} & l_{43}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1^{(1)} s_1^{(1)} & u_1^{(1)} s_2^{(1)} & u_1^{(1)} s_3^{(1)} & u_1^{(1)} c_1^{(1)} & u_1^{(1)} c_2^{(1)} & u_1^{(1)} c_3^{(1)} & -u_1^{(0)} e_1^{(0)} & -u_1^{(0)} e_2^{(0)} & -u_1^{(0)} e_3^{(0)} \\ u_3^{(1)} c_1^{(1)} & u_3^{(1)} c_2^{(1)} & u_3^{(1)} c_3^{(1)} & u_3^{(1)} s_1^{(1)} & u_3^{(1)} s_2^{(1)} & u_3^{(1)} s_3^{(1)} & -u_3^{(0)} e_1^{(0)} & -u_3^{(0)} e_2^{(0)} & -u_3^{(0)} e_3^{(0)} \\ u_4^{(1)} s_1^{(1)} & u_4^{(1)} s_2^{(1)} & u_4^{(1)} s_3^{(1)} & u_4^{(1)} c_1^{(1)} & u_4^{(1)} c_2^{(1)} & u_4^{(1)} c_3^{(1)} & -u_4^{(0)} e_1^{(0)} & -u_4^{(0)} e_2^{(0)} & -u_4^{(0)} e_3^{(0)} \\ l_{11}^{(1)} c_1^{(1)} & l_{12}^{(1)} c_2^{(1)} & l_{13}^{(1)} c_3^{(1)} & l_{11}^{(1)} s_1^{(1)} & l_{12}^{(1)} s_2^{(1)} & l_{13}^{(1)} s_3^{(1)} & -l_{11}^{(0)} e_1^{(0)} & -l_{12}^{(0)} e_2^{(0)} & -l_{13}^{(0)} e_3^{(0)} \\ l_{31}^{(1)} s_1^{(1)} & l_{32}^{(1)} s_2^{(1)} & l_{33}^{(1)} s_3^{(1)} & l_{31}^{(1)} c_1^{(1)} & l_{32}^{(1)} c_2^{(1)} & l_{33}^{(1)} c_3^{(1)} & -l_{31}^{(0)} e_1^{(0)} & -l_{32}^{(0)} e_2^{(0)} & -l_{33}^{(0)} e_3^{(0)} \\ l_{41}^{(1)} c_1^{(1)} & l_{42}^{(1)} c_2^{(1)} & l_{43}^{(1)} c_3^{(1)} & l_{41}^{(1)} s_1^{(1)} & l_{42}^{(1)} s_2^{(1)} & l_{43}^{(1)} s_3^{(1)} & -l_{41}^{(0)} e_1^{(0)} & -l_{42}^{(0)} e_2^{(0)} & -l_{43}^{(0)} e_3^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где

$$l_{1k}^{(n)} = -i\alpha(c_{3113}^{(n)}\sigma_k^{(n)}f_{1k}^{(n)} + c_{1313}^{(n)}f_{3k}^{(n)}), \quad l_{3k}^{(n)} = -\alpha_1^2 c_{1133}^{(n)}f_{1k}^{(n)} + \sigma_k^{(n)}c_{3333}^{(n)}f_{3k}^{(n)} - \beta_3^{(n)}f_{4k}^{(n)},$$

$$l_{4k}^{(n)} = \sigma_k^{(n)}f_{4k}^{(n)}, \quad u_p^{(n)}s_k^{(n)} = f_{pk}^{(n)}\text{sh}(-h\sigma_k^{(n)}), \quad u_p^{(n)}c_k^{(n)} = f_{pk}^{(n)}\text{ch}(-h\sigma_k^{(n)}), \quad (16)$$

$$u_p^{(n)}e_k^{(n)} = f_{pk}^{(n)}\exp(-h\sigma_k^{(n)}), \quad c_k^{(1)} = \text{ch}(-h\sigma_k^{(1)}), \quad s_k^{(1)} = \text{sh}(-h\sigma_k^{(1)}), \quad e_k^{(0)} = \exp(-h\sigma_k^{(0)}).$$

$$\mathbf{L}^{III} = \begin{pmatrix} l_{11}^{(1)} & l_{12}^{(1)} & l_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{31}^{(1)} & l_{32}^{(1)} & l_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ l_{41}^{(1)} & l_{42}^{(1)} & l_{43}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{11}^{(1)} c_1^{(1)} & l_{12}^{(1)} c_2^{(1)} & l_{13}^{(1)} c_3^{(1)} & l_{11}^{(1)} s_1^{(1)} & l_{12}^{(1)} s_2^{(1)} & l_{13}^{(1)} s_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ u_3^{(1)} c_1^{(1)} & u_3^{(1)} c_2^{(1)} & u_3^{(1)} c_3^{(1)} & u_3^{(1)} s_1^{(1)} & u_3^{(1)} s_2^{(1)} & u_3^{(1)} s_3^{(1)} & -u_3^{(0)} e_1^{(0)} & -u_3^{(0)} e_2^{(0)} & -u_3^{(0)} e_3^{(0)} \\ u_4^{(1)} s_1^{(1)} & u_4^{(1)} s_2^{(1)} & u_4^{(1)} s_3^{(1)} & u_4^{(1)} c_1^{(1)} & u_4^{(1)} c_2^{(1)} & u_4^{(1)} c_3^{(1)} & -u_4^{(0)} e_1^{(0)} & -u_4^{(0)} e_2^{(0)} & -u_4^{(0)} e_3^{(0)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{11}^{(0)} e_1^{(0)} & l_{12}^{(0)} e_2^{(0)} & l_{13}^{(0)} e_3^{(0)} \\ l_{31}^{(1)} s_1^{(1)} & l_{32}^{(1)} s_2^{(1)} & l_{33}^{(1)} s_3^{(1)} & l_{31}^{(1)} c_1^{(1)} & l_{32}^{(1)} c_2^{(1)} & l_{33}^{(1)} c_3^{(1)} & -l_{31}^{(0)} e_1^{(0)} & -l_{32}^{(0)} e_2^{(0)} & -l_{33}^{(0)} e_3^{(0)} \\ l_{41}^{(1)} c_1^{(1)} & l_{42}^{(1)} c_2^{(1)} & l_{43}^{(1)} c_3^{(1)} & l_{41}^{(1)} s_1^{(1)} & l_{42}^{(1)} s_2^{(1)} & l_{43}^{(1)} s_3^{(1)} & -l_{41}^{(0)} e_1^{(0)} & -l_{42}^{(0)} e_2^{(0)} & -l_{43}^{(0)} e_3^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Найдя C_k, D_k из уравнений (14), решение вспомогательных краевых задач можем представить в виде [17]:

$$u_i^{(n)}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k_{i3}^{(n)}(x_1 - \xi, x_3, \omega) q_3(\xi) d\xi, \quad i = 1, 3, 4, \quad (18)$$

$$k_{i3}^{(n)}(s, x_3, \omega) = \int_{\Gamma} K_{i3}^{(n)}(\alpha, x_3, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha, \quad (19)$$

где $K_{i3}^{(n)}(\alpha, x_3, \omega)$ – элементы матрицы функции Грина, которые вычисляются по формулам, приведенным в [10]. Контур Γ в представлении (19) выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [24] и, как правило, совпадает с вещественной осью почти всюду, отклоняясь от нее в окрестности вещественных полюсов функции $K_{i3}^{(n)}(\alpha, x_3, \omega)$. Но, учитывая поведение функции Грина термо-

упругой среды и то, что она не имеет вещественных полюсов [12, 13, 18], контур Γ был выбран совпадающим с вещественной осью.

4. Решение контактных задач

Представление (18) описывает смещение и температуру произвольной точки термоупругого тела под действием заданной в области $x_1 \in [-1, 1]$ нагрузки $q_3(x_1)$.

Рассмотрим задачи I и III о колебаниях слоистого тела, состоящего из слоя из сульфида кадмия CdS и полупространства из оксида магния MgO, при условии, что в области $[-1, 1]$ на поверхности действие жесткого штампа определяется формулой $u_{30} = \text{const} = 1$. Для их решения в формуле (18) необходимо положить $x_3 = 0$ и учесть условие (4) для смещения $u_{30}(x_1)$. В результате получим интегральное уравнение (ИУ):

$$u_{30}(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k_{33}^{(n)}(x_1 - \xi, 0, \omega) q_3(\xi) d\xi, \quad (20)$$

$$k_{33}^{(1)}(s, 0, \omega) = \int_{\Gamma} K_{33}^{(1)}(\alpha, 0, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha. \quad (21)$$

Решение ИУ (20) строится методом граничных элементов. С этой целью функцию $q_3(x_1)$ будем искать в виде

$$q_3(x_1) = \sum_{k=1}^{2M} C_k \Phi_k(x_1),$$

где

$$\Phi_k(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \in [a_{k-1}, a_k], \\ 0, & x_1 \notin [a_{k-1}, a_k], \quad k = \overline{1, M}, \end{cases}$$

– система координатных функций [24–25]. Тогда решение исходных краевых задач будет строиться путем подстановки решения ИУ в выражение (18).

Физические характеристики исследуемых материалов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Материал	$c_{ij}, 10^{10} \text{ Н/М}^2$	$\beta_{ij}, 10^6 \text{ Н/К/М}^2$	$\lambda_{ij}, \text{ Вт/К/М}$	$c_\varepsilon, \text{ Дж/кг/К}$	$\rho, 10^3 \text{ кг/М}^3$
CdS Слой 1	$c_{11} = 9,07$ $c_{33} = 9,38$ $c_{44} = 1,50$ $c_{66} = 1,63$ $c_{13} = 5,10$ $c_{12} = 5,81$	$\beta_{11} = 0,709$ $\beta_{33} = 0,724$	$\lambda_{11} = 20$ $\lambda_{33} = 20$	329	4,82
MgO Полу- пространство 0	$c_{11} = 30$ $c_{33} = 30$ $c_{44} = 8,21$ $c_{66} = 8,21$ $c_{13} = 11,1$ $c_{12} = 11,1$	$\beta_{11} = 4,49$ $\beta_{33} = 4,49$	$\lambda_{11} = 58$ $\lambda_{33} = 58$	875	3,58

Рисунки 1–4 иллюстрируют влияние преднагрева и начальных деформаций на поверхностные напряжения и вертикальные смещения на поверхности в зависимости от условий на границе сред. На рис. 1 и 3 сплошные линии соответствуют нагреву $d\theta = 0,1$, пунктирные линии – нагреву $d\theta = 0,3$, штриховые линии – $d\theta = 0,5$, штрихпунктирные – $d\theta = 1$. На рис. 2 и 4 сплошные линии соответствуют состоянию одноосной деформации слоя в направлении x_1 с $\nu_1 = 1,01$, пунктирные линии – $\nu_1 = 1,03$, штриховые – $\nu_1 = 1,05$, штрихпунктирные – $\nu_1 = 1,1$.

На рис. 1 представлены эпюры распределения в области воздействия штампа на поверхности разностей вертикального напряжения $dq_3^{\tau}(x_1) = |q_3^{\tau}| - |q_3|$, где q_3^{τ} – решение контактной задачи в условиях преднагрева покрываемого слоя, q_3 – вертикальное напряжение при отсутствии начально-деформированного состояния.

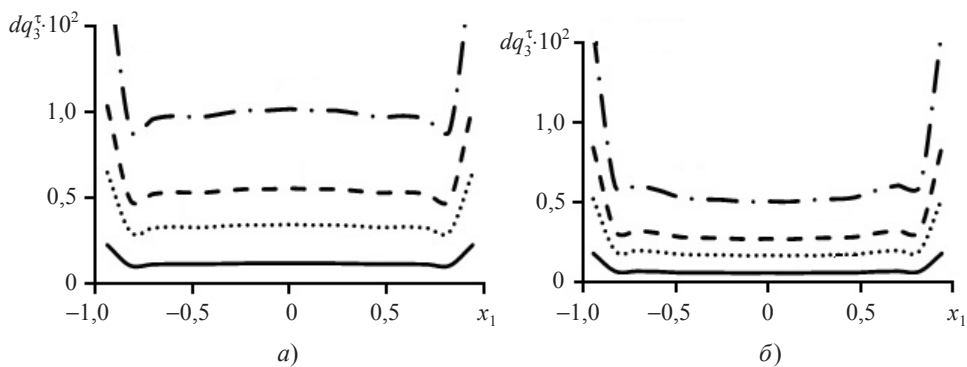


Рис. 1. Влияние преднагрева слоя на поверхностные напряжения в зависимости от условий на границе сред: а) жесткое сцепление, б) проскальзывание

На рис. 2 приведены эпюры распределения в области воздействия штампа на поверхности разностей вертикального напряжения $dq_3^{\xi}(x_1) = |q_3^{\xi}| - |q_3|$, где q_3^{ξ} – решение контактной задачи в условиях начального растяжения покрываемого слоя.

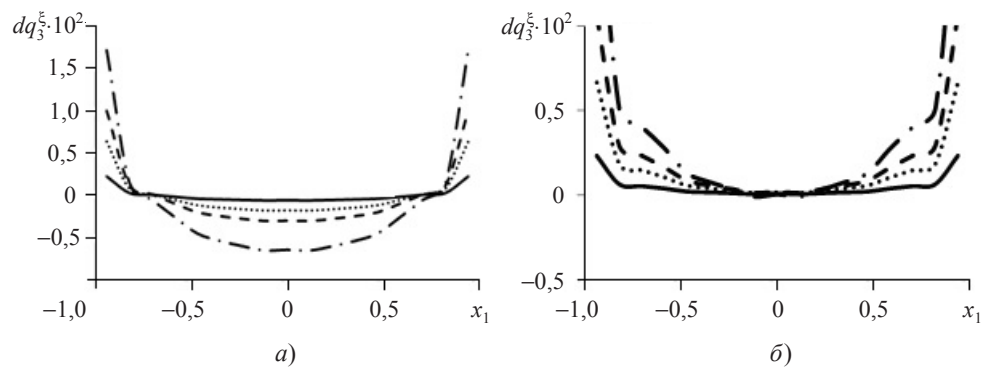


Рис. 2. Влияние начальных деформаций слоя на поверхностные напряжения в зависимости от условий на границе сред: а) жесткое сцепление, б) проскальзывание

Из рис. 1, 2 видно, что влияние преднагрева слоя на вертикальные напряжения, возникающие в области контакта, в условиях неидеального сцепления слоя и полупространства значительно меньше, чем при жестком сцеплении. Аналогично влияние растяжения слоя на вертикальное напряжение при проскальзывании между слоями становится меньше по сравнению со случаем жесткой склейки.

На рис. 3 приведены эпюры распределения в области воздействия штампа на поверхности разностей вертикальных смещений $du_3^\tau(x_1) = |u_3^\tau| - |u_3|$, где u_3^τ – решение исходных задач в условиях преднагрева покрывающего слоя, u_3 – вертикальное смещение при отсутствии начально-деформированного состояния.

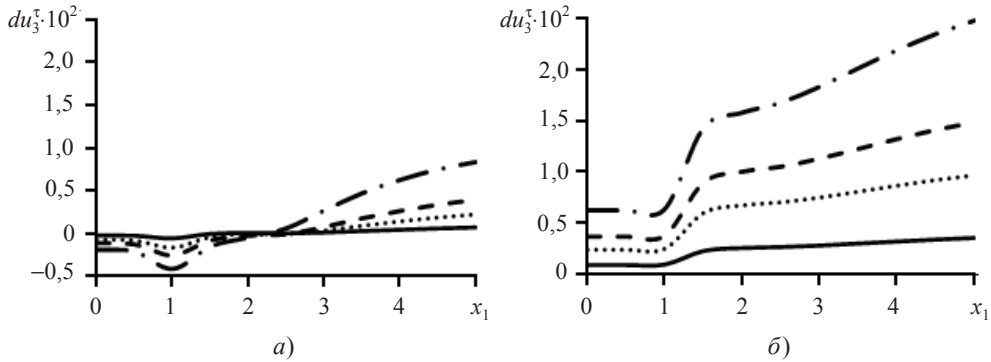


Рис. 3. Влияние преднагрева слоя на вертикальное смещение на поверхности в зависимости от условий на границе сред: а) жесткое сцепление; б) проскальзывание

На рис. 4 приведены эпюры распределения на поверхности в области воздействия штампа разностей вертикальных смещений $du_3^\xi(x_1) = |u_3^\xi| - |u_3|$, где u_3^ξ – решение исходных задач в условиях начального растяжения покрывающего слоя.

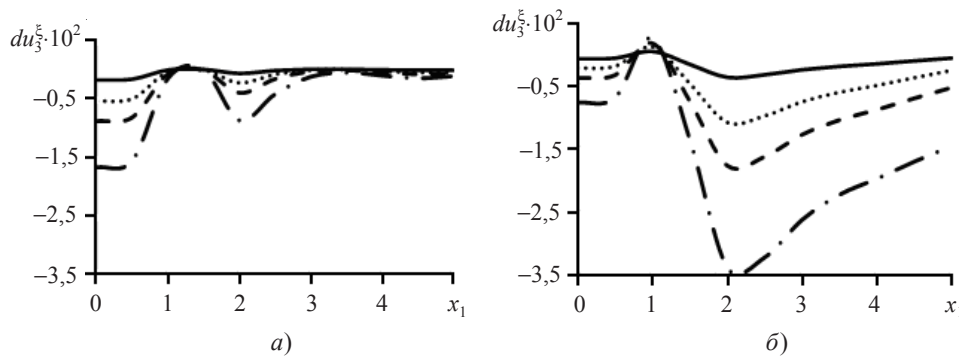


Рис. 4. Влияние начальных деформаций слоя на вертикальное смещение на поверхности в зависимости от условий на границе сред: а) жесткое сцепление; б) проскальзывание

На рис. 3, 4 видно, что влияние преднагрева слоя на вертикальные смещения на поверхности в условиях неидеального сцепления слоев значительно больше, чем при жестком сцеплении. Влияние растяжения слоя на вертикальное напряжение при жесткой склейке мало по сравнению со случаем проскальзывания.

Заключение

Исследованы контактные задачи о возбуждении гармонических колебаний осциллирующим жестким штампом на поверхности термоупругого слоистого полупространства, находящегося в условиях предварительного напряжения. Получено и исследовано решение задач – распределение вертикальных смещений на всей поверхности термоупругого преднапряженного тела в зависимости от режимов начальной деформации и нагрева. Показано, что для уменьшения влияния предва-

рительных нагрева и растяжения слоя в горизонтальном направлении на вертикальные напряжения, возникающие от воздействия жесткого штампа, необходимо создать условие отсутствия трения между покрывающим слоем и основанием. Для сокращения влияния предварительных напряжений на вертикальные колебания следует, напротив, обеспечить жесткое сцепление между слоями. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании процессов деформирования слоистой среды, находящейся в условиях нагревания.

Список литературы

1. Муратиков К.Л. К теории генерации механических колебаний лазерным излучением в твердых телах с внутренними напряжениями термоупругим методом. *Письма в ЖТФ*. 1998. Т. 24. №13. С. 82–88.
2. Youssef H.M., Al-Felali A.S. Generalized thermoelasticity problem of material subjected to thermal loading due to laser pulse. *Applied Mathematics*. 2012. Vol. 3. P. 142–146. DOI: 10.4236/am.2012.32022.
3. Achenbach J.D. Laser excitation of surface wave motion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003. Vol. 51. Iss. 11-12. P. 1885–1902. DOI: 10.1016/j.jmps.2003.09.021.
4. Singh H., Sharma J.N. Generalized thermoelastic waves in transversely isotropic media. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1985. Vol. 77. Iss. 3. P. 1046–1053. DOI: 10.1121/1.392391.
5. Das N., Sarkar N., Lahiri A. Reflection of plane waves from the stress-free isothermal and insulated boundaries of a nonlocal thermoelastic solid. *Applied Mathematical Modelling*. 2019. Vol. 73. P. 526–544. DOI: 10.1016/j.apm.2019.04.028.
6. Chirita S. On the Rayleigh surface waves on an anisotropic homogeneous thermoelastic half space. *Acta Mechanica*. 2013. Vol. 224. Iss. 3. P. 657–674. DOI: 10.1007/s00707-012-0776-z.
7. Singh B. Wave propagation in an initially stressed transversely isotropic thermoelastic solid half-space. *Applied Mathematics and Computation*. 2010. Vol. 217. Iss. 2. P. 705–715. DOI: 10.1016/j.amc.2010.06.008.
8. Шейдаков Д.Н., Белянкова Т.И., Шейдаков Н.Е., Калинчук В.В. Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды. *Вестник Южного научного центра РАН*. 2008. Т. 4. №3. С. 9–15. <https://elibrary.ru/item.asp?id=12771583>.
9. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.
10. Калинчук В.В., Леви Г.Ю. Одна динамическая контактная задача для преднапряженного термоупругого полупространства. *Вестник Южного научного центра РАН*. 2014. Т. 10. №2. С. 3–8. <https://elibrary.ru/item.asp?id=21705446>.
11. Леви Г.Ю., Михайлова И.Б., Ворovich Е.И. Динамическая смешанная задача для слоистого преднапряженного термоупругого полупространства. *Наука Юга России*. 2018. Т. 14. №1. С. 11–20. DOI: 10.23885/2500-0640-2018-14-1-11-20.
12. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu. A dynamic contact problem for a thermoelastic prestressed layer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76. Iss. 5. P. 537–546. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.013.
13. Levi G.Yu., Belyankova T.I. The influence of thermal contact between medium on the surface waves propagation in a prestressed thermoelastic layered half-space. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1260. Iss. 5. P. 1–8. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/5/052018.
14. Levi M.O., Levi G.Yu., Lyzhov V.A. Some features of the dynamics of ferroelectric (ferromagnetic) heterostructures. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58. P. 47–53. DOI: 10.1134/S0021894417010059.
15. Levi M.O. Contact problem for electro-magneto-elastic half-space with initial deformations. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics): Proceeding conf.* 13–15 Nov. 2018. Omsk, Russia. 2019. DOI: 10.1109/Dynamics.2018.8601458.
16. Леви М.О., Агаян К.Л., Атоян Л.А., Калинчук В.В. Смешанная задача для слоисто-неоднородного электромагнитоупругого полупространства. *Наука Юга России*. 2018. Т. 14. №3. С. 12–20. DOI: 10.7868/S25000640180302.

17. Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинин В.В., Пузанов Ю.Е. Динамическая контактная задача для термоупругого слоя. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 1999. №4. С. 107–110. <https://elibrary.ru/item.asp?id=21926406>.
18. Levi G.Yu., Igunnov L.A. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function. *Materials Physics and Mechanics*. 2015. Vol. 23. No 1. P. 42–46. http://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no_12315/MPM123_09_levi.html.
19. Леви Г.Ю., Калинин В.В., Ворович Е.И. Некоторые спектральные свойства краевой задачи для термоупругого слоя. *Наука Юга России*. 2019. Т. 15. №1. С. 12–20. DOI: 10.7868/S25000640190102.
20. Levi G.Yu., Belyankova T.I. Some properties of transversely isotropic thermoelastic layer under initial stress. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1210. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012080.
21. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Функция Грина для предварительно напряженного термоупругого полупространства с неоднородным покрытием. *Прикл. мат. и техн. физ.* 2016. Т. 57. №5. С. 76–89. DOI: 10.15372/PMTF20160509.
22. Burlayenko V.N., Altenbach H., Sadowski T., Dimitrova S.D., Bhaskar A. Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2017. Vol. 45. P. 422–438. DOI:10.1016/j.apm.2017.01.005.
23. Yang L., Li Y., Gao Y., Pan E. Three-dimensional exact thermo-elastic analysis of multi-layered two-dimensional quasicrystal nanoplates. *Applied Mathematical Modelling*. 2018. Vol. 63. P. 203–218. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.06.050>.
24. Ворович И.И., Бабешко В.А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М.: Наука, 1979. 320 с.
25. Бабешко В.А. *Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости*. М.: Наука, 1984. 256 с.

References

1. Muratkov K.L. К теории генерации механических колебаний лазерным излучением в твердых телах с внутренними напряжениями термупругим методом [On the theory of oscillations generation by laser radiation in solids with internal stresses by the thermoelastic method]. *Pisma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki [Technical Physics Letters]*. 1998. Vol. 24(13). P. 82–88 (In Russian).
2. Youssef H.M., Al-Felali A.S. Generalized thermoelasticity problem of material subjected to thermal loading due to laser pulse. *Applied Maths*. 2012. Vol. 3. P. 142–146. DOI:10.4236/am.2012.32022.
3. Achenbach J.D. Laser excitation of surface wave motion. *J. Mech. Phys. Solids*. 2003. Vol. 51. Iss. 11-12. P. 1885–1902. DOI: 10.1016/j.jmps.2003.09.021.
4. Singh H., Sharma J.N. Generalized thermoelastic waves in transversely isotropic media. *J. Acoust. Soc. Am*. 1985. Vol. 77. Iss 3. P. 1046–1053. DOI: 10.1121/1.392391.
5. Das N., Sarkar N., Lahiri A. Reflection of plane waves from the stress-free isothermal and insulated boundaries of a nonlocal thermoelastic solid. *Appl. Math. Model*. 2019. Vol. 73. P. 526–544. DOI: 10.1016/j.apm.2019.04.028.
6. Chirita S. On the Rayleigh surface waves on an anisotropic homogeneous thermoelastic half space. *Acta Mech*. 2013. Vol. 224. Iss. 3. P. 657–674. DOI: 10.1007/s00707-012-0776-z.
7. Singh B. Wave propagation in an initially stressed transversely isotropic thermoelastic solid half-space. *Appl. Math. Comput*. 2010. Vol. 217. Iss. 2. P. 705–715. DOI: 10.1016/j.amc. 2010. 06.008.
8. Sheidakov D.N., Belyankova T.I., Sheidakov N.E., Kalinchuk V.V. Uravneniya dinamiki prednapryazhennoy termouprugoy sredy [Dynamics equations for prestressed thermo-elastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN [Bulletin of Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]*. 2008. Vol. 4. No 3. P. 9–15 (In Russian).
9. Lurye A.I. *Nelineynaya teoriya uprugosti [Nonlinear Theory of Elasticity]*. Moscow. Nauka Publ. 1980. 512 p. (In Russian).
10. Kalinchuk V.V., Levi G.Yu. Odnа dinamicheskaya kontaktnaya zadacha dlya prednaprya-

zhennogo termouprugogo poluprostranstva [The dynamic contact problem for prestressed thermoelastic half-space]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN [Bulletin of Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]*. 2014. Vol. 10. No 2. P. 3–9 (In Russian).

11. Levi G.Yu., Mikhailova I.B., Vorovich E.I. Dinamicheskaya smeshannaya zadacha dlya sloistogo prednapryazhennogo termouprugogo poluprostranstva. [The dynamic mixed problem for a pre-stressed layered thermoelastic half-space]. *Nauka Yuga Rossii [Science in the South of Russia]*. 2018. Vol. 14. No 1. P. 11–20 (In Russian).

12. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu. A dynamic contact problem for a thermoelastic prestressed layer. *J. Appl. Math. Mech.* 2012. Vol. 76. Iss. 5. P. 537–546. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.013.

13. Levi G.Yu., Belyankova T.I. The influence of thermal contact between medium on the surface waves propagation in a prestressed thermoelastic layered half-space. *J. Phys. Conf. Ser.* 2019. Vol. 1260. Iss. 5. P. 1–8. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/5/052018.

14. Levi M.O., Levi G.Yu., Lyzhov V.A. Some features of the dynamics of ferroelectric (ferromagnetic) heterostructures. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2017. Vol. 58. P. 47–53. DOI: 10.1134/S0021894417010059.

15. Levi M.O. Contact problem for electro-magneto-elastic half-space with initial deformations. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). Proceeding conf.* 13–15 Nov. 2018. Omsk, Russia. 2019. DOI: 10.1109/Dynamics.2018.8601458.

16. Levi M.O., Agayan K.L., Atoyan L.A., Kalinchuk V.V. Smeshannaya zadacha dlya sloistoneodnorodnogo elektromagnitnouprugogo poluprostranstva [Mixed problem for a layered inhomogeneous electromagnetically half-space]. *Nauka Yuga Rossii [Science in the South of Russia]*. 2018. Vol. 14. No 3. P. 12–20 (In Russian).

17. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Puzanov Yu.E. Dinamicheskaya kontaktnaya zadacha dlya termouprugogo sloya [Dynamic contact problem for thermo-elastic layer]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki [Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Series Natural Sciences]*. 1999. No 4. P. 107–110 (In Russian).

18. Levi G.Yu., Igumnov L.A. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function. *Mater. Phys. Mech.* 2015. Vol. 23. No 1. P. 42–46. http://www.ipme.ru/e-journals/MPM/no_12315/MPM123_09_levi.html.

19. Levi G.Yu., Kalinchuk V.V., Vorovich E.I. Nekotorye spektral'nye svoystva kraevoy zadachi dlya termouprugogo sloya. [Some spectral properties of the boundary value problem for a thermoelastic layer]. *Nauka Yuga Rossii [Science in the South of Russia]*. 2019. Vol. 15. No 1. P. 12–20 (In Russian).

20. Levi G.Yu., Belyankova T.I. Some properties of transversely isotropic thermoelastic layer under initial stress. *J. Phys. Conf. Ser.* 2019. Vol. 1210. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012080.

21. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Funktsiya Grina dlya predvaritelno napryazhennogo termouprugogo poluprostranstva s neodnorodnym pokrytiem [Green's function for a prestressed thermoelastic half-space with an inhomogeneous coating]. *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika [J. Appl. Mech. Tech. Phys.]*. 2016. Vol. 57. No 5. P. 76–89 (In Russian).

22. Burlayenko V.N., Altenbach H., Sadowski T., Dimitrova S.D., Bhaskar A. Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements. *J. Comput. Appl. Math.* 2017. Vol. 45. P. 422–438. DOI:10.1016/j.apm.2017.01.005.

23. Yang L., Li Y., Gao Y., Pan E. Three-dimensional exact thermo-elastic analysis of multi-layered two-dimensional quasicrystal nanoplates. *Appl. Math. Model.* 2018. Vol. 63. P. 203–218. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.06.050>.

24. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey [Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Non-Classical Domains]*. Moscow. Nauka Publ. 1979. 320 p. (In Russian).

25. Babeshko V.A. *Obobshchennyi metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti [Generalized Factorization Method in Spatial Dynamic Mixed Problems of the Theory of Elasticity]*. Moscow. Nauka Publ. 1984. 256 p. (In Russian).

THE OSCILLATIONS ON SURFACE OF THE PRE-STRESSED THERMOELASTIC LAYERED HALF-SPACE

Levi G.Yu., Igumnov L.A.

Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

The contact problems of the excitation of harmonic oscillations by an oscillating rigid stamp on the thermoelastic layered pre-stressed body surface are considered. The body is represented by a layer lying on half-space. At the interface, two modes of mechanical boundary conditions are assumed: rigid adhesion and the absence of friction along one of the coordinates. In addition thermal contact condition is assumed. The initial deformed state is created due to thermal and mechanical effects. To find a solution of contact problems we introduced a boundary value problems with homogeneous boundary conditions on the surface. The Green function of auxiliary problems is constructed. Using operational calculus, the system of integral equations for the stress distribution function is reduced to a one-dimensional integral equation. Its solution is constructed by using the method of fictitious absorption. As an example, the contact problems on vibrations of a half-space of magnesium oxide coated with cadmium sulfide are considered. The solution to the contact problems, the distribution of vertical displacements over the entire surface of a thermoelastic prestressed body, is calculated and presented graphically. The influence of preheating and conditions at the interface is studied on the distribution of vertical stresses and displacements over the surface of a layered half-space. It is shown that under conditions of preheating and stretching of the layer in the direction of the horizontal coordinate under the action of a hard stamp on the surface the larger vertical stresses arise in the case of hard pinching of the coating with the base than with non-ideal adhesion. On the contrary, preheating and extension of the layer affect vertical displacements outside the contact area more when imperfect coupling.

Keywords: thermoelasticity, contact problem, preheating, stresses, initial deformation, vibrations.