

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-1-52-63

ОЦЕНКА КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВНЕДРЕНИИ УДАРНИКА В ПРОЧНЫЙ ГРУНТ*

© 2020 г.

Линник Е.Ю.

*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

elenkalinnik@gmail.com

Поступила в редакцию 25.11.2019

Получены конечные формулы для оценки контактных напряжений при внедрении жесткого ударника в грунт при учете трения в рамках модели локального взаимодействия. При динамическом деформировании грунта учитывается его объемная сжимаемость, сопротивление сдвигу и начальная прочность. Полученные оценки сопротивления внедрению ударника в грунт основаны на квадратичной зависимости нормального к поверхности ударника напряжения от скорости удара. Впервые получены конечные выражения для коэффициентов трехчленной аппроксимации в зависимости от экспериментально определяемых физико-механических параметров грунта – динамической диаграммы сжимаемости (ударной адиабаты) и зависимости предела текучести от давления. Ударная сжимаемость среды описывается на основе адиабаты Гюгоннио – линейной связи скорости ударной волны и массовой скорости частиц среды за фронтом ударной волны. Пластическое деформирование подчиняется критерию текучести Мора – Кулона с ограничением на предельную величину максимальных касательных напряжений в соответствии с критерием Треска – условие пластичности Мора – Кулона – Треска.

Используется полученное ранее аналитическое решение одномерной задачи о расширении сферической полости с постоянной скоростью из точки в полупространстве, занимаемом пластической грунтовой средой. Также применяется формула для определения критического давления – минимального давления, необходимого для образования полости при учете внутреннего трения в рамках критерия текучести Мора – Кулона, – обобщающая известное решение для упруго-идеально-пластической среды с критерием Треска.

Проведена верификация полученных формул путем сравнения с известными данными экспериментов по внедрению стального конического ударника в мерзлый песчаный грунт. Показано, что отличие результатов расчетов и экспериментов не превышает 10%.

Ключевые слова: грунт, прочность, внутреннее трение, сжимаемость, расширение сферической полости, условие пластичности Мора – Кулона – Треска, внедрение, конический ударник.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №19-08-00430).

Введение

В теории высокоскоростного удара и проникания особая роль отводится определению параметров контактного взаимодействия тел. В исследовательских и обзорных публикациях [1–5] показано, что решение задачи о расширении сферической или цилиндрической полости в среде может служить аппроксимацией давления на поверхности контакта жесткого ударника и сопротивляющейся среды.

Для определения полей напряжений и скоростей в области пластического деформирования, примыкающей к полости, разработан эффективный алгоритм численного решения [6, 7], который позволяет получить решение задачи при нелинейном уравнении состояния среды. В статьях [8–11] численное решение применяется для анализа погрешности аналитического решения данной задачи, полученного в предположении о несжимаемости грунтовой среды за фронтом ударной волны; динамическая сжимаемость грунта характеризуется ударной адиабатой, сопротивление сдвигу определяется условием пластичности Мора – Кулона. На основе предложенного аналитического решения разработана методика вычисления сил сопротивления прониканию жесткого тела в мягкий грунт, получены зависимости максимального значения силы сопротивления внедрению жесткой сферы и ударника с конической головной частью в сухой и водонасыщенный песок [11–13].

В статье [14] на основе экспериментальных и теоретических данных делается вывод об ограниченности предела текучести грунта при высоких давлениях. Нелинейная в общем случае зависимость предела текучести от давления, как показано в [15], с учетом разброса данных и ошибок измерений может быть представлена двухзвенной ломаной. Первое звено ломаной реализуется при малых давлениях и соответствует условию пластичности Мора – Кулона, при больших давлениях максимальное значение предела текучести ограничено в соответствии с условием Треска. В [16] получены формулы для определения диапазона скоростей расширения полости, в котором применимо простое решение для среды с условием пластичности Треска. В настоящей статье рассматривается проблема решения задач высокоскоростного проникания жестких тел в мягкие грунты на основе аналитического решения задачи о расширении сферической полости в среде с условием пластичности Мора – Кулона – Треска.

1. Модель расширения полости в грунтовой среде с условием пластичности Мора – Кулона – Треска

В соответствии с получившей широкое распространение моделью локального взаимодействия (МЛВ) в качестве контактного давления при взаимодействии ударника с сопротивляющейся средой принимается напряжение на границе полости, расширяющейся с постоянной скоростью из точки в бесконечной среде. В качестве скорости расширения полости принимается проекция вектора скорости движения ударника на нормаль к элементу поверхности тела. Подобный подход применялся для оценки сил сопротивления прониканию сферических и конических ударников в сухой и влажный песчаные грунты в диапазоне скоростей проникания 50–400 м/с, получены хорошие результаты в сравнении с экспериментальными данными [13].

Динамическая сжимаемость грунтовых сред [17–19] характеризуется ударной адиабатой Гюгонио в виде линейного соотношения:

$$U_s = C_0 + su_p, \quad (1)$$

связывающего скорость плоской ударной волны U_s и скорость частиц за фронтом волны u_p . Здесь C_0 соответствует скорости звука в среде при нулевом давлении, s – константа.

Применяя соотношение (1) и условия Ренкина – Гюгонио, получим связь напряжения σ_r и объемной деформации θ , которая в условиях одноосного деформированного состояния будет иметь вид:

$$\sigma_r(\theta) = \rho_0 C_0^2 \theta (1 - s\theta)^{-2},$$

где $\theta = 1 - \rho_0/\rho$ – объемная деформация, ρ_0 и ρ – начальная и текущая плотности среды. В этой форме записи константа s характеризует предельную сжимаемость среды.

Зависимость предела текучести от давления в соответствии с условием пластичности Мора – Кулона при учете ограничения на максимальную величину предела текучести Треска имеет вид:

$$\sigma(p) \equiv \begin{cases} \tau + kp, & 0 < p \leq p_M, \\ \tau_M, & p > p_M, \end{cases} \quad (2)$$

где τ и τ_M – начальное и максимальное значения предела текучести, k – коэффициент внутреннего трения, $p_M = (\tau_M - \tau)/k$.

Аналитическое решение задачи о расширении сферической полости в жестко-пластической среде с условием пластичности Мора – Кулона – Треска в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны получено в [16]. В соответствии с решением [16] напряжение на границе полости определится выражением:

$$\sigma(V) = \quad (3)$$

$$= \begin{cases} \frac{\tau_0}{\mu} (\varepsilon^{-2\mu} - 1) + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{3}{(\mu - 2)(2\mu - 1)} + \frac{2\mu + 1}{2\mu - 1} \varepsilon^{1-2\mu} - \frac{\mu - 1}{\mu - 2} \varepsilon^{4-2\mu} \right), & 0 < V < V_0; \\ \sigma_M + \tau_M \ln \left(\frac{\xi_M}{\varepsilon} \right)^2 + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{3}{2} - \frac{2\varepsilon}{\xi_M} + \frac{\varepsilon^4}{2\xi_M^4} \right), & V_0 \leq V \leq V_M; \\ -2\tau_M \ln \varepsilon + \frac{\rho_0 V^2}{1 - \varepsilon^3} \left(\frac{3}{2} - \varepsilon - \frac{\varepsilon^4}{2} \right), & V > V_M, \end{cases}$$

где обозначено: $\tau_0 = 3\tau/(3 + 2k)$, $\mu = 3k/(3 + 2k)$, $\sigma_M = (\tau_M - \tau_0)/\mu$; $\varepsilon = V/c$ – безразмерная скорость расширения полости, c – скорость распространения фронта пластической волны; $\xi = \xi_M$ – значение безразмерной координаты, при котором выполняется равенство $\sigma_r = \sigma_M$; V_0 и V_M – скорости расширения полости, ограничивающие диапазон применения условия Кулона – Мора и Треска сверху и снизу соответственно.

Для определения скорости фронта пластической волны принимается приближенная формула:

$$c = \sqrt[3]{sV} + C_0/3. \quad (4)$$

Значения скоростей расширения полости V_M и V_0 определяются следующим образом. Из соотношений на ударной волне (УВ) при $\xi = 1$ следует: $\sigma_r = \rho_0 c^2 \theta$. Обозначим величины скорости УВ, объемной деформации и ε , соответствующие $V = V_M$, как c_M , θ_M и ε_M . Примем для определения c_M формулу (4), тогда:

$$c_M = \sqrt[3]{s}V_M + \frac{C_0}{3}, \quad \theta_M = \varepsilon_M^3 = \frac{V_M^3}{c_M^3}, \quad \sigma_M = \rho_0 c_M^2 \theta_M = \rho_0 \frac{V_M^3}{c_M},$$

и для определения V_M получается кубическое уравнение:

$$\frac{\tau_M - \tau_0}{\mu} \left(\sqrt[3]{s}V_M + \frac{C_0}{3} \right) = \rho_0 V_M^3. \quad (5a)$$

При значении скорости расширения полости V_0 выполняется равенство $\sigma_r|_{\xi=\varepsilon} = \sigma_M$. Для определения V_0 необходимо решить нелинейное уравнение

$$\frac{\tau_M - \tau_0}{\mu} = \frac{\tau_0}{\mu} (1 - \varepsilon_0^{-2\mu}) + \frac{\rho_0 V_0^2}{1 - \varepsilon_0^3} \left(\frac{3}{(\mu-2)(2\mu-1)} + \frac{2\mu+1}{2\mu-1} \varepsilon_0^{1-2\mu} - \frac{\mu-1}{\mu-2} \varepsilon_0^{4-2\mu} \right), \quad (5b)$$

где введены обозначения: $\varepsilon_0 = V_0/c_0$, $c_0 = \sqrt[3]{s}V_0 + C_0/3$.

2. Аппроксимация зависимости напряжения от скорости

Анализ выражения (4) показывает, что при скорости, равной нулю, приближенное выражение для величины ε также обращается в нуль:

$$\varepsilon|_{V=0} = \frac{V}{\sqrt[3]{s}V + C_0/3} \Big|_{V=0} = 0.$$

Напряжение на границе полости (3) при этом будет стремиться к бесконечности. Таким образом, при малых скоростях выражение (3) для оценки напряжения использоваться не может.

Ранее рассматривался вопрос оценки минимального напряжения на границе полости, необходимого для ее расширения (критического напряжения). Была получена задача Коши, решение которой определяет критическое напряжение в линейно сжимаемой упруго-идеально-пластической среде с условием пластичности Треска [20] и Мора – Кулона [10, 21]:

$$\frac{d\sigma_r}{d\xi} + 2 \frac{\tau_0 + \mu\sigma_r}{\xi} = 0, \quad \varepsilon \leq \xi \leq 1,$$

$$\sigma_r|_{\xi=1} = \frac{2\tau}{3}.$$

Решение задачи Коши есть функция

$$\sigma_r(\xi) = \frac{2}{3} \tau \xi^{-2\mu} + \frac{\tau}{k} (\xi^{-2\mu} - 1),$$

которая при значении $\xi = \varepsilon$ определяет критическое напряжение.

В настоящей статье величину критического напряжения предлагается использовать в качестве значения напряжения при нулевой скорости:

$$\sigma_C = \frac{2}{3} \tau \varepsilon_C^{-2\mu} + \frac{\tau}{k} (\varepsilon_C^{-2\mu} - 1), \quad \varepsilon_C = \sqrt[3]{\frac{3(1-\nu)\tau}{E}}, \quad (6a)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Значение критического напряжения при значении $\mu = 0$ может быть получено предельным переходом $\mu \rightarrow 0$ в (6a):

$$\sigma_C = \frac{2}{3} \tau (1 + \ln \varepsilon_C^{-3}). \quad (6b)$$

В статье [10] показано, что ошибка аппроксимации формулы (6) не превышает 6% при изменении коэффициента внутреннего трения во всем допустимом диапазоне $0 < k < 1,5$ и начального значения предела текучести на три порядка величины в диапазоне $0,01 < \tau < 10$ МПа. В [21] приводится уточнение формулы (6).

При стремлении скорости к бесконечности величина $\varepsilon < \varepsilon_s$ остается ограниченной $\varepsilon_s = s^{-1/3}$. Анализ выражения (3) показывает, что напряжение на границе полости при скоростях расширения $V > C_0$ будет удовлетворять неравенству

$$\rho_0 V^2 < \sigma < 1,1\rho_0 V^2 \quad (7)$$

при изменении величины, которая характеризует предельную сжимаемость грунта, в достаточно широком диапазоне $1 < s < 4$. Таким образом, на основании (7) может быть определен коэффициент при квадрате скорости в трехчленной квадратичной зависимости напряжения от скорости. При учете (6) будем иметь, например,

$$\sigma(V) = \sigma_C + 1,05\rho_0 V^2. \quad (8a)$$

Конструируемая аппроксимация зависимости нормального напряжения от скорости вида (8a) хорошо приближает напряжения на границе полости при малых и высоких скоростях. Аппроксимация (8a) для лучшего соответствия (3) в среднем диапазоне скоростей может быть дополнена линейным членом. Коэффициент при линейном по скорости члене может определяться методом наименьших квадратов в задаваемом диапазоне скоростей. Можно также выбрать коэффициент исходя из условия равенства значений напряжений при $V = V_M$. Напомним, что при $V > V_M$ напряжения во всей области пластического течения удовлетворяют критерию Треска.

В итоге будем иметь искомую трехчленную квадратичную аппроксимацию зависимости напряжения от скорости:

$$\sigma(V) = \gamma + \beta V + \alpha V^2, \quad (8b)$$

$$\gamma = \frac{2}{3} \tau_0 \varepsilon_C^{-2\mu} + \tau_0 \frac{\varepsilon_C^{-2\mu} - 1}{\mu}, \quad \beta = -\frac{2\tau_M \ln \varepsilon_M}{V_M}, \quad \alpha = \frac{\rho_0}{1 - \varepsilon_M^3} \left(\frac{3}{2} - \varepsilon_M - \frac{\varepsilon_M^4}{2} \right),$$

где ε_C определяется в соответствии с уравнением (6a), $\varepsilon_M = V_M / (\sqrt[3]{sV_M + C_0/3})$, V_M определяется в результате решения кубического уравнения (5a) по формулам Кардано, параметр β полагается большим либо равным нулю.

3. Результаты численной верификации

В качестве примера численной реализации соотношений (8) используется грунтовая среда с параметрами ударной адиабаты $C_0 = 1700$ м/с, $s = 3,4$. Параметры условия пластичности Мора – Кулона – Треска будем варьировать.

Рассмотрим два варианта задания предела текучести (2). В первом варианте варьируется максимальное значение предела текучести $\tau_M = 20, 35$ и 50 МПа при неизменных значениях $\tau = 5$ МПа и $k = 0,3$. Во втором варианте фиксированы $\tau = 5$ МПа и $\tau_M = 50$ МПа, коэффициент k принимает значения $0,3, 0,45$ и $0,6$. Соответствующие зависимости представлены на рис. 1a и б.

На рис. 2 представлены значения критического напряжения (напряжения, необходимого для расширения полости со скоростью, близкой к нулю) в зависимости от изменения начального значения предела текучести (a) и изменения коэффициента внутреннего трения (б). Точное решение получено на основе алгоритма [6] в ре-

зультате численного решения [10] краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с применением метода Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Приближенное решение получено по формулам (6), отличие от точного не превышает 2–3%.

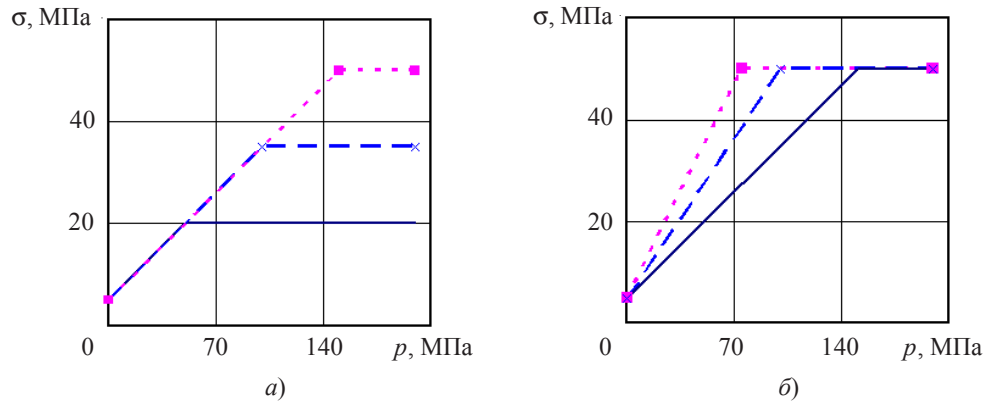


Рис. 1

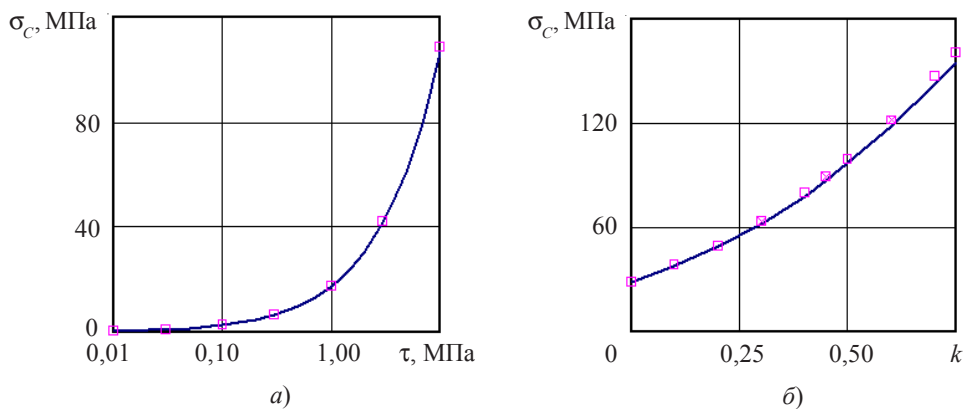


Рис. 2

В первом варианте задания предела текучести (см. рис. 1а) получено значение критического давления $\sigma_c = 63,5$ МПа. Значения напряжения $\sigma_M = 80, 120$ и 180 МПа, границы диапазона скоростей $V_0 = 97,4, 144$ и 194 м/с, $V_M = 310, 408$ и 481 м/с.

Во втором варианте задания предела текучести (см. рис. 1б) получены значения критического давления $\sigma_c = 63,5, 89,4$ и 122 МПа соответственно, при $k = 0,3, 0,45$ и $0,6$. Значения напряжения $\sigma_M = 180, 130$ и 117 МПа, границы диапазона скоростей $V_0 = 194, 130$ и $87,5$ м/с, $V_M = 481, 422$ и 387 м/с.

Результаты расчетов при $\tau = 5$ МПа представлены в таблице 1.

Таблица 1

k	τ_M , МПа	σ_M , МПа	σ_c , МПа	V_0 , м/с	V_M , м/с	α , кг/м ³	$\beta \cdot 10^{-3}$, кг/(м ² ·с)	γ , МПа
0,30	20	80	63,5	97,4	310	2250	46,6	63,5
0,30	35	120	63,5	144,0	408	2120	176,0	63,5
0,30	50	180	63,5	194,0	481	2080	252,0	63,5
0,45	50	130	89,4	130,0	422	2120	188,0	89,4
0,60	50	117	122,0	87,5	387	2160	97,6	122,0

На рис. 3 приведены зависимости напряжения на стенке полости от скорости ее расширения при $k = 0,3$, $\tau_M = 20$ МПа (а) и $k = 0,6$, $\tau_M = 50$ МПа (б), полученные в результате применения решения задачи о расширении сферической полости в среде с условием пластичности: Мора – Кулона (штриховая линия с треугольниками), Треска при постоянном значении предела текучести, равном τ_M (штриховая линия с квадратами); сплошная линия соответствует квадратичной аппроксимации по формуле (8б).

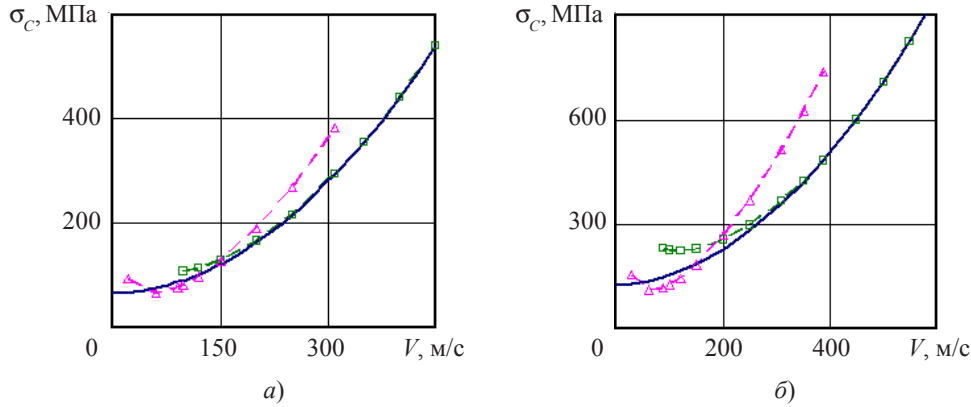


Рис. 3

Наблюдается хорошее соответствие результатов аппроксимации при значении скорости расширения полости $V > V_M$. Проведенные расчеты показали, что максимальная относительная погрешность аппроксимации (8) в диапазоне скоростей $V_M < V < 10V_M$ не превышает 2-3%.

Ранее было показано [13], что МЛВ на базе аналитического решения задачи о расширении сферической полости в предположении несжимаемости грунта за фронтом ударной волны удовлетворительно описывает силы сопротивления внедрению цилиндрических ударников в уплотненный сухой и водонасыщенный песчаные грунты в общем случае при учете ограниченности зависимости предела текучести от давления. Однако в ограниченном диапазоне скоростей удара удовлетворительные результаты могут быть получены и с использованием более простых моделей. Например, для сухого песка в [13] продемонстрировано хорошее соответствие с экспериментальными данными результатов расчетов с применением критерия текучести Мора – Кулона при скоростях удара от 100 до 400 м/с.

В случае моделирования сопротивления водонасыщенного грунта прониканию модель с использованием критерия текучести Мора – Кулона удовлетворительно описывает зависимость силы от скорости лишь при скоростях удара не более 120 м/с. При более высоких скоростях удара необходимо использовать общую модель, которая учитывает ограниченность зависимости предела текучести от давления в соответствии с критерием текучести Мора – Кулона – Треска. При этом полное пренебрежение сдвиговыми свойствами водонасыщенного грунта приводит к ошибкам в определении силы сопротивления внедрению, кратно превосходящим ошибку эксперимента. Таким образом, нелинейное сопротивление сухого и водонасыщенного грунта сдвигу необходимо учитывать при решении задач удара и проникания.

Однако сцепление или начальная прочность как сухого, так и влажного грунта является пренебрежимо малой величиной. Оценим применимость МЛВ на основе

решения задачи о расширении сферической полости к определению максимального значения силы сопротивления внедрению конического ударника при проникании в грунтовую среду с учетом начальной прочности.

Согласно МЛВ, сила сопротивления внедрению конуса с углом раствора 2η с постоянной скоростью V_0 определяется по формуле

$$F = (\sigma_n + \sigma_\tau \operatorname{ctg} \eta) S,$$

где σ_n , σ_τ – нормальное и касательное напряжения, действующие на боковую поверхность конического ударника, S – площадь основания конуса.

Нормальное напряжение определяется на основе формулы (8б), где $V = V_0 \sin \eta$ – проекция вектора скорости на нормаль к поверхности конуса. Касательные напряжения при $V < V_M$ определяются на основе закона сухого трения Кулона $\tau = k_f \sigma$. При больших скоростях удара $V \geq V_M$ касательное напряжение полагается ограниченным сверху величиной

$$\tau = k_f (\gamma + \beta V_M + \alpha V_M^2).$$

Таким образом, будем иметь зависимость силы сопротивления внедрению конуса от скорости:

$$F(V) = \begin{cases} (1 + k_f \operatorname{ctg} \eta)(\gamma + \beta V + \alpha V^2) S, & V < V_M, \\ ((\gamma + \beta V + \alpha V^2) + k_f \operatorname{ctg} \eta(\gamma + \beta V_M + \alpha V_M^2)) S, & V \geq V_M. \end{cases} \quad (9)$$

В статье [22] приводятся результаты исследований процессов удара и проникания стального конического ударника в мерзлый песчаный грунт на базе методики обращенного эксперимента с использованием техники мерных стержней. Представлены зависимости максимальных значений силы сопротивления внедрению в грунт конусов с диаметром основания 10, 12 и 19,8 мм в диапазоне изменения скоростей удара от 100 до 400 м/с. Состояние образцов песчаного грунта до замораживания при температуре -18°C характеризуется практически полным водонасыщением. В результате серии численных расчетов определены параметры модели грунтовой среды Григоряна, обеспечивающие хорошее согласование результатов осесимметричных численных расчетов и экспериментальных данных.

В настоящей статье принимаются следующие параметры начального упругого участка для мерзлого песка: начальная плотность $\rho_0 = 2065 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 21 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$ и параметры ударной адиабаты: $C_0 = 1700 \text{ м/с}$, $s = 3,4$. Для аппроксимации нелинейной зависимости предела текучести от давления, используемой в [22] в численных расчетах, значения параметров критерия текучести Мора – Кулона – Треска (сцепления, внутреннего трения и максимального значения предела текучести) принимаются: $\tau = 16 \text{ МПа}$, $k = 0,15$, $\tau_M = 32,5$, коэффициент трения – $k_f = 0,1$.

На рис. 4 приведены максимальные значения безразмерной силы сопротивления внедрению в мерзлый грунт стального конического ударника с диаметром основания 10 мм и углом раствора $\eta = 30^\circ$. Сплошной линией отмечены аппроксимации (8), (9), маркерам соответствуют расчеты, полученные в обращенном эксперименте [21]; вертикальными линиями показана относительная ошибка 10%; $F^* = \rho_0 V_0^2 s / 2$. Отмечается хорошее согласование результатов экспериментов и моделирования в диапазоне скоростей удара от 150 до 400 м/с.

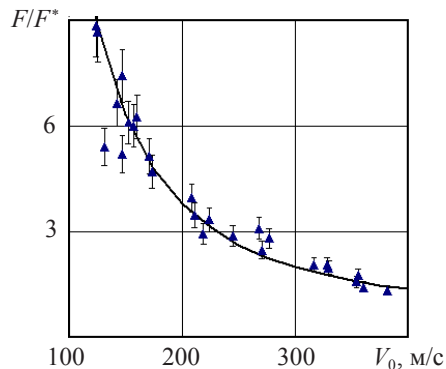


Рис. 4

Заключение

Рассмотрена задача о расширении с постоянной скоростью сферической полости из точки в безграничной упругопластической среде с условием пластичности Мора – Кулона – Треска. Получена зависимость напряжения на границе полости от скорости ее расширения в предположении несжимаемости среды за фронтом ударной волны.

Впервые получены конечные выражения для коэффициентов трехчленной аппроксимации «напряжение–скорость» в зависимости от экспериментально определяемых физико-механических параметров грунта – коэффициентов ударной адиабаты и зависимости предела текучести от давления.

Проведена верификация полученных формул на основе сравнения с известными данными экспериментов по внедрению стального конического ударника в мерзлый песчаный грунт. Показано, что отличие результатов расчетов и экспериментов не превышает 10%.

Список литературы

1. Велданов В.А., Федоров С.В. Особенности поведения грунта на границе контакта с недеформируемым ударником. *Прикладная механика и техническая физика*. 2005. Т. 46. №6. С. 116–127.
2. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Central European Journal of Engineering*. 2014. Vol. 4. Iss. 1. P. 1–19. DOI: 10.2478/s13531-013-0135-4.
3. Omidvar M., Malioche Jeanne D., Bless S., Iskander M. Phenomenology of rapid projectile penetration into granular soils. *International Journal of Impact Engineering*. 2015. Vol. 85. P. 146–160. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2015.06.002.
4. Аптуков В.Н., Хасанов А.Р. Расширение цилиндрической полости в сжимаемой упругопластической среде. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2017. №1. С. 5–23. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.01.
5. Аптуков В.Н., Дубинский А.В., Хасанов А.Р. *Исследование и оптимизация защитных свойств многослойных металлических преград при высокоскоростном ударе*. Пермь: Изд-во ПГНИУ. 2019. 430 с.
6. Forrestal M.J., Longcope D.B. Closed-form solution for forces on conical-nosed penetrators into geological targets with constant shear strength. *Mechanics of Materials*. 1982. Vol. 1. P. 285–295.
7. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *International Journal of Impact Engineering*. 1992. Vol. 12. No 3. P. 427–444.
8. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А., Макарова А.А. Анализ приближенных ре-

шений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде. *Проблемы прочности и пластичности*. 2011. Вып. 73. С. 58–63.

9. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Тарасова А.А., Гоник Е.Г. Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны. *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. Вып. 74. С. 49–58.

10. Котов В.Л. Аппроксимация напряжений в окрестности полости, расширяющейся с постоянной скоростью в среде с условием пластичности Мора – Кулона. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Вып. 81. №2. С. 177–190.

11. Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Линник Е.Ю., Баландин В.В. Примененные модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт. *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54. №4. С. 114–125.

12. Баженов В.Г., Баландин В.В., Григорян С.С., Котов В.Л. Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах. *Прикладная математика и механика*. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 98–115.

13. Bragov A.M., Balandin V.V., Igumnov L.A., Kotov V.L., Krushka L., Lomunov A.K. Impact and penetration of cylindrical bodies into dry and water-saturated sand. *International Journal of Impact Engineering*. 2018. Vol. 122. P. 197–208. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2018.08.012.

14. Григорян С.С. К решению задачи о подземном взрыве в мягких грунтах. *Прикладная математика и механика*. 1964. Т. 28. Вып. 6. С. 1070–1082.

15. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментально-теоретическое исследование процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред. *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50. №6. С. 115–125.

16. Котов В.Л., Тимофеев Д.Б. Решение задачи о расширении сферической полости в среде с условием пластичности Мора – Кулона – Треска. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Вып. 81. №3. С. 292–304.

17. Arlery M., Gardou M., Fleureau J.M., Mariotti C. Dynamic behaviour of dry and water-saturated sand under planar shock conditions. *International Journal of Impact Engineering*. 2010. Vol. 37. P. 1–10.

18. Prowd W.G., Chapman D.J., Williamson D.M. et al. The dynamic compaction of sand and related porous systems. *Shock Compression of Condensed Matter-2007: Proceedings of the Conference of the American Physical Society Topical Group on Shock Compression of Condensed Matter*. Waikoloa, Hawai'i. June 24–29, 2007. P. 1403–1408.

19. Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Баландин В.В. Исследование динамических свойств водонасыщенного песка по результатам обращенных экспериментов. *Журнал технической физики*. 2018. Т. 88. №4. С. 545–554. DOI: 10.21883/JTF.2018.04.45722.2412.

20. Rosenber Z., Dekel E. A numerical study of the cavity expansion process and its application to long-rod penetration mechanics. *International Journal of Impact Engineering*. 2008. Vol. 35. No 3. P. 147–154.

21. Forrestal M.J., Longcope D.B. Target strength of ceramic materials for high velocity penetration. *Journal of Applied Physics*. 1990. Vol. 67. P. 3669–3672.

22. Брагов А.М., Баландин В.В., Котов В.Л., Баландин В.В., Линник Е.Ю. Экспериментальное исследование проникания конического ударника в мерзлый песчаный грунт. *Прикладная механика и техническая физика*. 2018. Vol. 59. №3. С. 111–120.

References

1. Veldanov V.A., Fedorov S.V. Soil behavior at the interface with a rigid projectile during penetration. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2005. Vol. 46. No 6. P. 867–875. DOI: 10.1007/s10808-005-0146-x.

2. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Engineering models of high speed penetration into geological shields. *Central Europ. J. Eng.* 2014. Vol. 4. Iss. 1. P. 1–19. DOI: 10.2478/s13531-013-0135-4.

3. Omidvar M., Malioche Jeanne D., Bless S., Iskander M. Phenomenology of rapid projectile penetration into granular soils. *Int. J. Imp. Eng.* 2015. Vol. 85. P. 146–160. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2015.06.002.

4. Aptukov V.N., Khasanov A.R. Rasshirenie tsilindricheskoy polosti v szhimaemoy uprugoplasticheskoy srede [Expansion of a cylindrical cavity in a compressible elastic-plastic medium]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2017. No 1. P. 5–23. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.1.01 (In Russian).
5. Aptukov V.N., Dubinsky A.V., Khasanov A.R. *Issledovaniye i optimizatsiya zashchitnykh svoystv mnogosloynnykh metallicheskih pregrad pri vysokoskorostnom udare [Research and Optimization of the Protective Properties of Multilayer Metal Barriers during High-Speed Impact]*. Perm. Perm State University Publ. 2019. 430 p. (In Russian).
6. Forrestal M.J., Longcope D.B. Closed-form solution for forces on conical-nosed penetrators into geological targets with constant shear strength. *Mechanics of Materials*. 1982. Vol. 1. P. 285–295.
7. Forrestal M.J., Luk V.K. Penetration into soil targets. *Int. J. Imp. Eng.* 1992. Vol. 12. No 3. P. 427–444.
8. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Tarasova A.A., Makarova A.A. Analiz priblizhennykh resheniy zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v gruntovoy srede [The analysis of approximate solutions for a spherical cavity expansion in a soil medium problems]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2011. Iss. 73. P. 58–63 (In Russian).
9. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Tarasova A.A., Gonik E.G. Resheniye zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v predpolozhenii neszhimayemosti za frontom udarnoy volny [The solution of the problem of the expansion of a spherical cavity in a soil medium assuming incompressibility beyond the shock front]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2012. Iss. 74. P. 49–58 (In Russian).
10. Kotov V.L. Approksimatsiya napryazheniy v okrestnosti polosti, rasshiryayushcheysya s postoyannoy skorostyu v srede s usloviem plastichnosti Mora – Kulona [Approximating stresses in the vicinity of a cavity expanding at a constant velocity in a medium with the Mohr – Coulomb plasticity condition]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 2. P. 177–190 (In Russian).
11. Kotov V.L., Balandin V.V., Bragov A.M., Linnik E.Yu., Balandin V.V. Using a local-interaction model to determine the resistance to penetration of projectiles into sandy soil. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2013. Vol. 54. No 4. P. 612–621. DOI: 10.1134/S0021894413040123.
12. Bazhenov V.G., Balandin V.V., Grigoryan S.S., Kotov V.L. Analysis of models for calculating the motion of solids of revolution of minimum resistance in soil media. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 78. No 1. P. 65–76. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2014.05.008.
13. Bragov A.M., Balandin V.V., Igumnov L.A., Kotov V.L., Krushka L., Lomunov A.K. Impact and penetration of cylindrical bodies into dry and water-saturated sand. *Int. J. Imp. Eng.* 2018. Vol. 122. P. 197–208. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2018.08.012.
14. Grigorian S.S. K resheniyu zadachi o podzemnom vzryve v myagkikh gruntakh [To the solution of the problem of an underground explosion in soft soils]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 1964. Vol. 28. Iss. 6. P. 1070–1082 (In Russian).
15. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L. Experimental-theoretical study of the penetration of rigid projectiles and identification of soil properties. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2009. Vol. 50. No 6. P. 1011–1019. DOI: 10.1007/s10808-009-0135-6.
16. Kotov V.L., Timofeev D.B. Resheniye zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v srede s usloviyem plastichnosti Mora – Kulona – Treska [Analyzing the spherical cavity expansion problem in a medium with Mohr – Coulomb – Tresca's plasticity condition]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 3. P. 292–304 (In Russian).
17. Arlery M., Gardou M., Fleureau J.M., Mariotti C. Dynamic behaviour of dry and water-saturated sand under planar shock conditions. *Int. J. Imp. Eng.* 2010. Vol. 37. P. 1–10.
18. Prowd W.G., Chapman D.J., Williamson D.M. et al. The dynamic compaction of sand and related porous systems. *Shock Compression of Condensed Matter-2007: Proceedings of the Conference of the American Physical Society Topical Group on Shock Compression of Condensed Matter*. Waikoloa, Hawai'i. June 24–29, 2007. P. 1403–1408.

19. Bragov A.M., Balandin V.I.V., Kotov V.L., Balandin V.I.VI. Investigation of the dynamic properties of water-saturated sand by the results of inverted experiments. *Technical Physic.* 2018. Vol. 63. No 4. P. 530–539. DOI: 10.1134/S1063784218040060.
20. Rosenberg Z., Dekel E. A numerical study of the cavity expansion process and its application to long-rod penetration mechanics. *Int. J. Imp. Eng.* 2008. Vol. 35. No 3. P. 147–154.
21. Forrestal M.J., Longcope D.B. Target strength of ceramic materials for high velocity penetration. *J. Appl. Phys.* 1990. Vol. 67. P. 3669–3672.
22. Bragov A.M., Balandin V.V., Kotov V.L., Balandin V.I.VI., Linnik E.Yu. Experimental study of the impact and penetration of a cone in frozen sand. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2018. Vol. 59. No 3. P. 482–490. DOI: 10.1134/S0021894418030124.

EVALUATING CONTACT STRESSES IN AN IMPACTOR PENETRATING A HARD SOIL

Linnik E.Yu.

*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

Finite formulas have been derived for evaluating contact stresses in a rigid impactor penetrating a soil, taking into account the friction in the framework of the local interaction model. In analyzing dynamic deformation of the soil, its volumetric compressibility, shear resistance and initial strength are accounted for. The obtained evaluations of resistance to penetration of an impactor into the soil are based on a quadratic relation between the stress normal to the impactor surface and impact velocity. The authors have pioneered in deriving finite expressions for coefficients of a trinomial approximation as a function of experimentally determined physical-mechanical parameters of the soil – a dynamic compressibility diagram (a shock adiabat) and a yield strength – pressure diagram. Impact compressibility of soils is described based on Hugoniot's adiabat – a linear relation between shock wave velocity and mass velocity of the medium particles behind the shockwave front. Plastic deformation obeys the Mohr – Coulomb yield criterion with a constraint on the limiting value of maximal tangential stresses according to Tresca's criterion – the Mohr – Coulomb – Tresca plasticity condition.

An earlier obtained analytical solution of a one-dimensional problem of a spherical cavity expanding at a constant velocity from a point in a half-space occupied by a plastic soil medium is used. A formula for determining critical pressure (a minimal pressure required for the formation of a cavity, accounting for internal pressure in the framework of Mohr – Coulomb's yield criterion) is also used, which generalizes a known solution for an elastic ideally plastic medium with Tresca's criterion. The derived formulas have been verified by comparing their results with the available data from experiments on the penetration of a steel conical impactor into a frozen sandy soil. It is shown that the disagreement between the numerical and experimental results is within 10%.

Keywords: soil, strength, internal friction, compressibility, expansion of a spherical cavity, Mohr – Coulomb – Tresca plasticity condition, penetration, conical impactor.